УДК 517.95

©2017 р. М. М. Бокало, О. В. Ільницька

Львівський національний університет імені Івана Франка

КЛАСИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМ ІНТЕГРАЛЬНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Досліджено три задачі для нелінійних параболічних рівнянь зі змінним інтегральним запізненням: мішану задачу для рівнянь без виродження, крайову задачу для рівнянь, що вироджуються в початковий момент часу, та задачу Фур'є. Доведено існування та єдиність класичних розв'язків таких задач, а також отримано їх апріорні оцінки.

Such thee problems are considered: initial boundary value problem for nonlinear parabolic equations with variable integral delay, boundary value problem for degenerate nonlinear parabolic equations with variable integral delay, Fourier problem for nonlinear parabolic equations with variable integral delay. The conditions of existence and uniqueness of a classical solution of these problems are obtained.

Вступ

У даній роботі досліджено три задачі для нелінійних параболічних рівнянь зі змінним інтегральним запізненням: мішану задачу для рівнянь без виродження, крайову задачу для рівнянь, що вироджуються в початковий момент часу, та задачу Фур'є. Доведено існування та єдиність класичних розв'язків таких задач, а також отримано їх апріорні оцінки.

Наявність запізнення в диференціальних рівняннях, що описують певні динамічні процеси, є врахуванням того, що стан еволюційної системи в актуальний момент часу залежить від станів в попередні моменти часу. Рівняння із запізненням використовують, зокрема, для моделювання харчових ланцюгів та реакції імунної системи людського організму на вірус імунодефіциту ([21], [23]). В останні роки інтенсивно розвивається математичний апарат для дослідження рівнянь та їх систем із запізненням (див., наприклад, [2], [4], [6], [11], [13], [17], [19], [26], [27]). На даний час досить повно розроблено теорію диференціальних рівнянь зі сталим запізненням. Сталість запізнення, як правило, є додатковим припущенням для спрощення дослідження, що не мотивовано реальними процесами. Більш природними є рівняння зі змінним запізненням. Звичайні диференціальні рівняння зі змінним запізненням досліджуються досить активно ([7], [9], [23]), але рівняння з частинними похідними зі змінним запізненням не є достатньо вивченими. У [4] досліджено мішану задачу для нелінійних параболічних рівнянь зі змінним локальним запізненням. Наскільки нам відомо, мішана задача для нелінійних параболічних рівнянь зі змінним інтегральним запізненням раніше не розглядались. Існування та єдиність розв'язку такої задачі досліджено у першому розділі цієї роботи.

Нелінійні вироджувані диференціальні рівняння використовують при моделюванні різних процесів, зокрема, опріснення морської води, руху рідин та газів у пористих середовищах. Такі рівняння виникають і в теоріях еластичності, відносності та оптимізації ([19]). Параболічні рівняння із виродженням та задачі для них досліджувались у багатьох роботах, серед яких [1], [5], [10], [17], [19].

Наскільки відомо авторам, задачі для параболічних вироджуваних (за рахунок коефіцієнтів) рівнянь із запізненням досліджені лише у [3] у випадку змінного локального запізнення. Крайова задача для нелінійних параболічних рівнянь зі змінним інтегральним запізненням вперше досліджена тут і результати по ній подані у другому розділі роботи.

Задача Фур'є для еволюційних рівнянь виникає при моделюванні нестаціонарних процесів у природі, що почались дуже давно і початкові умови не впливають на стан системи у даний момент. У цьому випадку можна вважати, що початковим моментом є $-\infty$, а 0 – кінцевим моментом часу, а замість стандартної початкової умови ставити умову на поведінку розв'язку при прямуванні часової змінної до $-\infty$. Задачі Фур'є для еволюційних рівнянь виникають при моделюванні різних процесів у у економіці, фізиці, екології, кібернетиці, тощо, і досить добре досліджені (див, наприклад, [15], [16], [20], [22], [24], [25], [28], [29]).

Задачі Фур'є для параболічних рівнянь із запізненням досліджені у роботах [2], [20], але лише у випадку, коли запізнення є сталим. Наскільки авторам відомо, задача Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь зі змінним інтегральним запізненням раніше не розглядалась. Існування та єдиність розв'язку такої задачі досліджено у третьому розділі.

1. Мішана задача для параболічних рівнянь із запізненням

1.1 Основні позначення та допоміжні факти.

Нагадаємо деякі позначення і поняття, які будемо використовувати. Під $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 1)$ розумітимемо лінійний простір, складений з впорядкованих наборів $z = (z_1, \ldots, z_k)$ дійсних чисел, з нормою $|z| = (|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{1/2}$. Через $C(H)$, де H – множина в $\mathbb{R}^k$, позначатимемо лінійний простір неперервних на H функцій. Якщо K – компакт в $\mathbb{R}^k$, то на $C(K)$ задаємо норму $\|v\|_{C(K)} := \max\limits_{z\in K} |v(z)|$, з якою цей простір є банаховим. Коли H – довільна некомпактна множина в $\mathbb{R}^k$, то послідовність $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до v в $C(H)$, якщо $||v_m - v||_{C(K)} \underset{m\to\infty}{\to} 0$ для будь-якого компакту $K \subset H$.

Нехай $\alpha \in (0, 1]$, K – компакт в $\mathbb{R}^{n+1} := \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Під $C^{\alpha,\alpha/2}(K)$ розумітимемо банахів простір, що є підпростором $C(K)$ і складається з функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in K$, зі скінченою нормою

$$\|v\|^K_{\alpha,\alpha/2} := \|v\|_{C(K)} + \\ + \sup_{\substack{(x,t),(x',t)\in K\\ x\neq x'}} \frac{|v(x,t) - v(x',t)|}{|x - x'|^{\alpha}} + \\ + \sup_{\substack{(x,t),(x,t')\in K\\ t\neq t'}} \frac{|v(x,t) - v(x,t')|}{|t - t'|^{\alpha/2}}$$

(див., наприклад, [8, ст. 16, 17]).

Через $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(H)$, де H – довільна некомпактна множина в $\mathbb{R}^{n+1}$, позначатимемо простір функцій v таких, що $v \in C^{\alpha,\alpha/2}(K)$ для довільного компакту $K \subset H$. Під $C^{2,1}(D)$ $\big($відповідно, $C^{2,1}(\overline{D})\big)$, де D – область в $\mathbb{R}^{n+1}$, розумітимемо лінійний простір функцій $v(x,t)$, $(x,t) \in D$ (відповідно, $(x,t) \in \overline{D}$), які разом зі своїми похідними $v_{x_k}, v_{x_k x_l}$ $(k,l = \overline{1,n})$, v_t визначені і неперервні на D (відповідно, на $\overline{D}$). Якщо D – обмежена область, то вважаємо, що на просторі $C^{2,1}(\overline{D})$ задано норму $||v||_{C^{2,1}(\overline{D})} := ||v||_{C(\overline{D})} + \sum\limits_{k=1}^{n} ||v_{x_k}||_{C(\overline{D})} + \sum\limits_{k,l=1}^{n} ||v_{x_k x_l}||_{C(\overline{D})} + ||v_t||_{C(\overline{D})}$, з якою він є банаховим. Через $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$, якщо D – обмежена область в $\mathbb{R}^{n+1}$, позначатимемо банахів простір функцій v з простору $C^{2,1}(\overline{D})$ зі скінченою нормою

$$||v||^{\overline{D}}_{2+\alpha,1+\alpha/2} = \|v\|_{C(\overline{D})} + \sum_{k=1}^{n} \|v_{x_k}\|^{\overline{D}}_{\alpha,\alpha/2} + \\ + \sum_{k,l=1}^{n} \|v_{x_k x_l}\|^{\overline{D}}_{\alpha,\alpha/2} + \|v_t\|^{\overline{D}}_{\alpha,\alpha/2}.$$

Під $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(G)$, де G – область в $\mathbb{R}^{n+1}$ або об'єднання області з частиною своєї межі, розумітимемо простір функцій v таких, що $v \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$ для довільної обмеженої області D такої, що $\overline{D} \subset G$.

Твердження 1. *Нехай послідовність функцій $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ є обмеженою в $C^{\alpha,\alpha/2}(K)$, де K – компакт в $\mathbb{R}^{n+1}$, тобто, $||u_m||^K_{\alpha,\alpha/2} \leq C_1$ $\forall m \in \mathbb{N}$, де $C_1 > 0$ – стала, яка не залежить від m. Тоді існують функція $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(K)$ та підпослідовність $\{u_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ такі, що $u_{m_j} \underset{j\to\infty}{\to} u$ в $C(K)$.*

Доведення. Дане твердження випливає з теореми Арцела-Асколі.

Використовуючи діагональний процес та твердження 1, не важко отримати таке твердження.

Твердження 2. *Нехай H – довільна некомпактна множина в $\mathbb{R}^{n+1}$ така, що $H = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$, де $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ – сім'я компактів в $\mathbb{R}^{n+1}$, причому $K_i \subset K_{i+1}$ для кожного $i \in \mathbb{N}$. Припустимо, що $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ – послідовність функцій з $C_{loc}^{\alpha,\alpha/2}(H)$ така, що для будь-якого $i \in \mathbb{N}$ послідовність звужень членів даної послідовності на K_i є обмеженою в $C^{\alpha,\alpha/2}(K_i)$, тобто, $||u_m||_{\alpha,\alpha/2}^{K_i} \le C_2$ $\forall m \in \mathbb{N}$, де $C_2 > 0$ – стала, яка не залежить від m, але може залежати від K_i. Тоді існують функція $u \in C_{loc}^{\alpha,\alpha/2}(H)$ та підпослідовність $\{u_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ послідовності $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ такі, що $u_{m_j} \underset{j\to\infty}{\rightarrow} u$ в $C(H)$.*

1.2 Формулювання задачі та основних результатів розділу 1.

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ – межа Ω, $T > 0$. Покладемо $Q := \Omega \times (0,T]$ (тоді $\overline{Q} := \overline{\Omega} \times [0,T]$), $\Sigma := \partial\Omega \times (0,T]$.

Розглянемо мішану задачу для еволюційного рівняння з інтегральним запізненням: знайти функцію $u \in C\big(\overline{\Omega} \times [\tau_0,T]\big) \cap C^{2,1}(Q)$, яка задовольняє рівняння

$$Pu(x,t) := u_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t) u_{x_k x_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t) u_{x_k}(x,t) + a_0(x,t)u(x,t) - g(x,t,u(x,t),J_\tau u(x,t)) = f(x,t),\ (x,t)\in Q, \tag{1}$$

крайову умову

$$Ru(x,t) := u(x,t) = h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{2}$$

і початкову умову

$$Gu(x,t) := u(x,t) = u_0(x,t),\ (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0], \tag{3}$$

де $J_\tau u(x,t) := \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)u(x,s)ds$, $\tau \in C([0,T])$ – невід'ємна функція, $\tau_0 := \inf\limits_{t\in(0,T]}(t-\tau(t))$ і, якщо $\tau_0 = 0$, то $[\tau_0,0] := \{0\}$.

Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (1)–(3).

На вихідні дані задачі (1)–(3) накладаємо такі обмеження:

$(\mathcal{A}_1)$ a_{kl}, $a_k \in C(Q)$, $a_{kl} = a_{lk}$ $(k,l = \overline{1,n})$, існує стала $\nu \ge 0$ така, що

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)\xi_k\xi_l \ge \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

$\forall (x,t) \in Q$, $\forall (\xi_1,...,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$;

$(\mathcal{A}_2)$ $g(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in \Omega \times (0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, – неперервна за усіма змінними і неперервно диференційовна за змінними ξ та η функція, причому існують визначені на Q невід'ємні неперервні обмежені функції g_1, g_2 такі, що $\forall(x,t,\xi,\eta) \in \Omega\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$:

$$0 \le g_\xi(x,t,\xi,\eta) \le g_1(x,t),$$

$$0 \le g_\eta(x,t,\xi,\eta) \le g_2(x,t);$$

крім того, $g(x,t,0,0) = 0$, $(x,t) \in Q$;

$(\mathcal{A}_3)$ $J \in C(Q \times (\tau_0,T])$, $J(x,t,s) \ge 0$ $\forall (x,t,s) \in Q\times(\tau_0,T]$, $\sup\limits_{(x,t)\in Q} \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)ds < \infty$;

$(\mathcal{A}_4)$ $a_0 \in C(Q)$, $a_0^- := \inf\limits_{(x,t)\in Q} \Big[a_0(x,t) - g_1(x,t) - g_2(x,t) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)ds\Big] > 0$;

$(\mathcal{A}_5)$ $f \in C(Q)$, $h \in C(\overline{\Sigma})$, $u_0 \in C(\overline{\Omega} \times [\tau_0,0])$, причому f є обмеженою та виконується умова узгодження нульового порядку:

$$h(x,0) = u_0(x,0) \qquad \forall x \in \partial\Omega.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_4)$. Припустимо, що u_1, u_2 – розв'язки задач, що відрізняються від задачі (1)–(3) тільки тим, що замість f, h, u_0 стоять, відповідно, $f_1, h_1, u_{0,1}$ та $f_2, h_2, u_{0,2}$ з такими ж властивостями, які вказані, відповідно, для f, h, u_0 в умові $(\mathcal{A}_5)$. Тоді виконується нерівність*

$$\min\Big\{\frac{1}{a_0^-}\inf_{(y,s)\in Q}\left(f_1(y,s) - f_2(y,s)\right), \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}\left(h_1(y,s) - h_2(y,s)\right), \min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]}\left(u_{0,1}(y,s) - u_{0,2}(y,s)\right), 0\Big\} \le$$

$$\leq u_1(x,t) - u_2(x,t) \leq$$

$$\leq \max\Big\{ \frac{1}{a_0^-} \sup_{(y,s)\in Q} \left(f_1(y,s) - f_2(y,s)\right),$$

$$\max_{(y,s)\in \overline{\Sigma}} \left(h_1(y,s) - h_2(y,s)\right),$$

$$\max_{(y,s)\in \overline{\Omega}\times[\tau_0,0]} \left(u_{0,1}(y,s) - u_{0,2}(y,s)\right), 0\Big\},$$

$$(x,t) \in Q. \qquad (4)$$

Зауважимо, що з цієї теореми випливає неперервна залежність розв'язку задачі (1)–(3) від вихідних даних.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_5)$. *Тоді задача* (1)–(3) *має не більше одного розв'язку.*

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_5)$. *Тоді для розв'язку задачі* (1)–(3) *правильна оцінка*

$$\min\{\frac{1}{a_0^-} \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s), \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h(y,s),$$

$$\min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]} u_0(y,s), 0\} \leq u(x,t) \leq$$

$$\leq \max\{\frac{1}{a_0^-} \sup_{(y,s)\in Q} f(y,s), \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h(y,s),$$

$$\max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]} u_0(y,s), 0\}, \quad (x,t)\in Q. \qquad (5)$$

Наслідок 3. *Нехай виконуються умови теореми 1, і, крім того,* $f_1(x,t) \leq f_2(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$, $h_1(x,t) \leq h_2(x,t)$ $\forall (x,t) \in \Sigma$, $u_{0,1}(x,t) \leq u_{0,2}(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega}\times[\tau_0,0]$. *Тоді правильна нерівність* $u_1(x,t) \leq u_2(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$.

Введемо ще деякі функційні простори. Згідно зі сказаним раніше (див. п. 1.1) під $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$, де $\alpha \in (0,1]$, розуміємо простір функцій $v \in C^{2,1}(Q)$ таких, що для будь-яких строго внутрішньої підобласті Ω' області Ω (тобто, $\overline{\Omega'} \subset \Omega$) та числа $\delta \in (0,T)$ звуження v на $\overline{\Omega'}\times[\delta,T]$ належить простору $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega'}\times[\delta,T])$.

Через $C^{\alpha,\alpha/2,0}(\overline{Q}\times[\tau_0,T])$ позначаємо простір неперервних функцій $q(x,t,s)$, $(x,t,s) \in \overline{Q}\times[\tau_0,T]$, для кожної з яких існує стала $L>0$ така, що правильна нерівність

$$\left|q(x,t,s) - q(\widetilde{x},\widetilde{t},s)\right| \leq L(|x-\widetilde{x}|^\alpha + |t-\widetilde{t}|^{\alpha/2})$$

для довільних $(x,t,s), (\widetilde{x},\widetilde{t},s) \in \overline{Q}\times[\tau_0,T]$.

Через $C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ позначаємо простір неперервних функцій $\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta) \in \overline{\Omega}\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, кожна з яких є неперервно диференційовною за змінними ξ,η та задовольняє умову: для довільних $q_1>0$, $q_2>0$ існують сталі $L_k = L_k(\widetilde{g},q_1,q_2) > 0$ $(k=\overline{1,3})$ такі, що виконуються нерівності

$$\left|\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta) - \widetilde{g}(\widetilde{x},\widetilde{t},\xi,\eta)\right| \leq L_1(|x-\widetilde{x}|^\alpha + |t-\widetilde{t}|^{\frac{\alpha}{2}}),$$

$$|\widetilde{g}_\xi(x,t,\xi,\eta)| \leq L_2, \qquad |\widetilde{g}_\eta(x,t,\xi,\eta)| \leq L_3$$

для будь-яких $(x,t,\xi,\eta), (\widetilde{x},\widetilde{t},\xi,\eta) \in \overline{\Omega}\times[0,T]\times[-q_1,q_1]\times[-q_2,q_2]$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_5)$. *Припустимо, що для деякого* $\alpha \in (0,1]$ *маємо*

$(\mathcal{B}_1)$ $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$,

$(\mathcal{B}_2)$ a_{kl}, a_k, $a_0 \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$ $(k,l=\overline{1,n})$, $g \in C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{loc}(\overline{\Omega}\times[0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $J \in C^{\alpha,\alpha/2,0}(\overline{Q}\times[\tau_0,T])$, $\tau \in C^{\alpha/2}([0,T])$, $f \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$, $u_0 \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}\times[\tau_0,0])$, $h \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Sigma})$.

Крім того, нехай

$(\mathcal{B}_3)$ $\partial a_{kl}/\partial x_s \in C(Q)$ $(k,l,s=\overline{1,n})$.

Тоді існує (єдиний) розв'язок задачі (1)–(3) *і він належить простору* $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}\times[\tau_0,T]) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$.

1.3 Допоміжні твердження.

Розглянемо задачу: знайти функцію $u \in C\big(\overline{\Omega}\times[\tau_0,T]\big)\cap C^{2,1}(Q)$, яка задовольняє рівняння

$$\widehat{P}u(x,t) := u_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)u_{x_kx_l}(x,t) +$$

$$+\sum_{k=1}^n a_k(x,t)u_{x_k}(x,t) + \widehat{a}_0(x,t)u(x,t) -$$

$$-\widehat{g}(x,t)J_\tau u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t)\in Q, \quad (6)$$

крайову умову (2) і початкову умову (3), де τ, J_τ такі ж як і у (1).

Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (6), (2), (3).

Припустимо, що функції $a_{k,l}, a_k$ $(k,l=\overline{1,n})$, J, f, u_0, h задовольняють умови $(\mathcal{A}_1)$,

$(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{A}_5)$, а функції $\widehat{a}$, $\widehat{g}$ задовольняють умову

$(\mathcal{A}_6)$ $\widehat{a}_0, \widehat{g}$ – неперервні і обмежені на Q, $\inf\limits_{(x,t)\in Q} \widehat{a}_0(x,t) > 0$, $\widehat{g} \geq 0$ на Q,

$$\widehat{a_0^-} := \inf_{(x,t)\in Q}\Big[\widehat{a}_0(x,t) - \widehat{g}(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)ds\Big] > 0.$$

Лема 1. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_3)$ *і* $\widehat{a}_0, \widehat{g} \in C(Q)$, $\widehat{g} \geq 0$ *на* Q. *Тоді для функцій* $u, v \in C\big(\overline{\Omega}\times[\tau_0,T]\big)\cap C^{2,1}(Q)$ *таких, що* $\widehat{P}u(x,t) < \widehat{P}v(x,t)$ $\forall (x,t)\in Q$, $Ru(x,t) < Rv(x,t)$ $\forall (x,t)\in\Sigma$, $Gu(x,t) < Gv(x,t)$ $\forall (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]$, *правильна нерівність* $u(x,t) < v(x,t)$ $\forall (x,t)\in Q$.

Доведення. Позначимо $w(x,t) := u(x,t) - v(x,t)$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega}\times[\tau_0,T]$, $\widetilde{f}(x,t) := \widehat{P}w(x,t) = \widehat{P}u(x,t) - \widehat{P}v(x,t) < 0$ $\forall (x,t) \in Q$, $\widetilde{h}(x,t) := Rw(x,t) = Ru(x,t) - Rv(x,t) < 0$ $\forall (x,t)\in\Sigma$, $\widetilde{u}_0(x,t) := Gw(x,t) = Gu(x,t) - Gv(x,t) < 0$ $\forall (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]$. Врахувавши ці позначення, отримаємо такі рівності

$$w_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)w_{x_kx_l}(x,t) + $$

$$+\sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)w_{x_k}(x,t) + \widehat{a}_0(x,t)w(x,t) -$$

$$-\widehat{g}(x,t)J_\tau w(x,t) = \widetilde{f}(x,t), \quad (x,t)\in Q, \quad (7)$$

$$Rw(x,t) = \widetilde{h}(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma, \quad (8)$$

$$Gw(x,t) = \widetilde{u}_0(x,t), \quad (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0], \quad (9)$$

де $\widetilde{f}, \widetilde{h}, \widetilde{u}_0$ – від'ємні функції.

Треба показати, що $w(x,t) < 0$ $\forall (x,t) \in Q$. Припустимо, що це не так. З нашого припущення і того, що на підставі рівностей (8) і (9) маємо $w(x,t) < 0$ при $(x,t)\in(\overline{\Omega}\times[\tau_0,0])\cup\Sigma$, випливає існування точки $(x^0,t_0)\in Q$ такої, що $w(x,t) < 0$, коли $(x,t)\in\Omega\times(0,t_0)$, $w(x,t_0) \leq 0$, коли $x\in\Omega$, та $w(x^0,t_0) = 0$. Звідси випливає, що $J_\tau w(x^0,t_0) \leq 0$ і $w_t(x^0,t_0) \geq 0$. Врахувавши, що x^0 є точкою локального максимуму функції $x \mapsto w(x,t_0) : \Omega \to \mathbb{R}$, маємо: $w_{x_k}(x^0,t_0) = 0$ $(k,l = \overline{1,n})$, $\sum\limits_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x^0,t_0)w_{x_kx_l}(x^0,t_0) \leq 0$. Звідси та з рівності (7) одержуємо

$$0 \leq w_t(x^0,t_0) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x^0,t_0)w_{x_kx_l}(x^0,t_0) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} a_k(x^0,t_0)w_{x_k}(x^0,t_0) + \widehat{a}_0(x^0,t_0)w(x^0,t_0) -$$

$$-\widehat{g}(x^0,t_0)J_\tau w(x^0,t_0) = \widetilde{f}(x^0,t_0) < 0.$$

Отримали протиріччя, що доводить наше твердження. □

Наслідок з леми 1 *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_3)$ *і* $\widehat{a}_0, \widehat{g}\in C(Q)$, $\widehat{g}\geq 0$ *на* Q. *Тоді для функції* $u \in C\big(\overline{\Omega}\times[\tau_0,T]\big)\cap C^{2,1}(Q)$ *такої, що* $\widehat{P}u(x,t) < 0$ $\forall (x,t)\in Q$, $Ru(x,t) < 0$ $\forall (x,t)\in\Sigma$, $Gu(x,t) < 0$ $\forall (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]$, *правильна нерівність* $u(x,t) < 0$ $\forall (x,t)\in Q$.

Доведення. Це твердження безпосередньо випливає з леми 1 при $v = 0$.

Лема 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_3)$ *і* $\widehat{a}_0, \widehat{g}\in C(Q)$, $\widehat{g}\geq 0$ *на* Q, $\widehat{a_0^-} > -1$ *(*$\widehat{a_0^-}$ *визначено в* $(\mathcal{A}_6)$*). Тоді для функцій* $u, v \in C\big(\overline{\Omega}\times[\tau_0,T]\big)\cap C^{2,1}(Q)$ *таких, що* $\widehat{P}u(x,t) \leq \widehat{P}v(x,t)$ $\forall (x,t)\in Q$ $Ru(x,t) \leq Rv(x,t)$ $\forall (x,t)\in\Sigma$, $Gu(x,t) \leq Gv(x,t)$ $\forall (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]$, *правильна нерівність* $u(x,t)\leq v(x,t)$ $\forall (x,t)\in Q$.

Доведення. Позначимо $w(x,t) := u(x,t) - v(x,t)$ $\forall (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,T]$. З наших припущень випливає, що $\widehat{P}w(x,t) \leq 0$ $\forall (x,t)\in Q$, $Rw(x,t) \leq 0$ $\forall (x,t)\in\Sigma$, $Gw(x,t) \leq 0$ $\forall (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]$. Нехай $w^\lambda(x,t) := w(x,t) - \lambda e^t$ $\forall (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,T]$, де $\lambda > 0$ – довільне фіксоване число. Тоді

$$\widehat{P}w^\lambda(x,t) = \widehat{P}w(x,t) - \lambda e^t\big(\widehat{a}_0(x,t) -$$

$$-\widehat{g}(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)e^{s-t}ds + 1\big). \qquad (10)$$

Покажемо, що правильна нерівність

$$\widehat{a}_0(x,t) - \widehat{g}(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)e^{s-t}ds + 1 > 0 \qquad (11)$$

для будь-якої точки $(x,t)\in Q$. Справді, маємо

$$\inf_{(x,t)\in Q}(\widehat{a}_0(x,t)-\widehat{g}(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}J(x,t,s)e^{s-t}ds)\geq$$

$$\geq\inf_{(x,t)\in Q}\Big(\widehat{a}_0(x,t)-\widehat{g}(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}J(x,t,s)ds\Big)=$$

$$=\widehat{a}_0^- > -1,$$

оскільки $\sup\limits_{s\leq t}e^{s-t}=1,\ 0\leq\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}J(x,t,s)e^{s-t}ds\leq$ $\leq\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}J(x,t,s)ds$ і $\widehat{g}(x,t)\geq 0$ при $(x,t)\in Q$. В силу умови $\widehat{P}w(x,t)\leq 0$ і нерівності (11) приходимо до висновку (див. (10)), що $\widehat{P}w^{\lambda}(x,t)<0\ \forall(x,t)\in Q$. Легко бачити, що $Rw^{\lambda}(x,t)=Rw(x,t)-\lambda e^{t}<0\ \forall(x,t)\in\Sigma$, а також $Gw^{\lambda}(x,t)=Gw(x,t)-\lambda e^{t}<0$ $\forall(x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]$. Звідси на підставі наслідку з леми 1 отримаємо нерівність $w^{\lambda}(x,t)<0\ \forall(x,t)\in Q$, тобто $w(x,t)<\lambda e^{t}\ \forall(x,t)\in Q$. Зафіксувавши $(x,t)\in Q$, спрямуємо в цій нерівності λ до 0. У результаті отримаємо нерівність $w(x,t)\leq 0\ \forall(x,t)\in Q$, тобто $u(x,t)\leq v(x,t)\ \forall(x,t)\in Q$. □

Твердження 3. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{A}_5)$, $(\mathcal{A}_6)$. *Тоді для довільного розв'язку задачі* (6), (2), (3) *виконується оцінка*

$$\min\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_0^-}\inf_{(y,s)\in Q}f(y,s),\ \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}h(y,s),$$

$$\min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]}u_0(y,s),\ 0\Big\}\leq u(x,t)\leq$$

$$\leq\max\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_0^-}\sup_{(y,s)\in Q}f(y,s),\ \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}h(y,s),$$

$$\max_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]}u_0(y,s),0\Big\},\quad (x,t)\in Q.\qquad (12)$$

Доведення. Нехай u – який-небудь розв'язок задачі (6), (2), (3). Приймемо

$$C_1:=\max\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_0^-}\sup_{(y,s)\in Q}f(y,s),\ \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}h(y,s),$$

$$\max_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]}u_0(y,s),\ 0\Big\}.$$

Очевидно, що $C_1\geq 0$. Тоді для функції $v(x,t):=C_1$, $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,T]$, маємо

$$\widehat{P}v(x,t)=\big(\widehat{a}_0(x,t)-\widehat{g}(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}J(x,t,s)ds\big)C_1\geq$$

$$\geq\widehat{a}_0^-\,C_1\geq\widehat{a}_0^-\frac{1}{\widehat{a}_0^-}\sup_{(y,s)\in Q}f(y,s)=$$

$$=\sup_{(y,s)\in Q}f(y,s)\geq f(x,t),\quad (x,t)\in Q,$$

$$Rv(x,t)=C_1\geq\max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}h(y,s)\geq h(x,t),\ (x,t)\in\Sigma,$$

$$Gv(x,t)=C_1\geq\max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]}u_0(y,s)\geq$$

$$\geq u_0(x,t),\ (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0].$$

Звідси на підставі леми 2 маємо, що $u(x,t)\leq C_1\ \forall(x,t)\in Q$.

Тепер покладемо

$$C_2:=\min\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_0^-}\inf_{(y,s)\in Q}f(y,s),\ \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}h(y,s),$$

$$\min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]}u_0(y,s),0\Big\}.$$

Очевидно, що $C_2\leq 0$. Тоді

$$\widehat{P}v(x,t)=\big(\widehat{a}(x,t)-\widehat{g}(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}J(x,t,s)ds\big)\,C_2\leq$$

$$\leq\widehat{a}_0^-\,C_2\leq\widehat{a}_0^-\frac{1}{\widehat{a}_0^-}\inf_{(y,s)\in Q}f(y,s)=$$

$$=\inf_{(y,s)\in Q}f(y,s)\leq f(x,t),\ (x,t)\in Q,$$

$$Rv(x,t)=C_2\leq\min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}}h(y,s)\leq h(x,t),\ (x,t)\in\Sigma,$$

$$Gv(x,t)=C_2\leq\min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0]}u_0(y,s)\leq$$

$$\leq u_0(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0].$$

Звідси, на підставі леми 2 маємо, що $u(x,t)\geq C_2\ \forall(x,t)\in Q$. □

Лема 3. *Для довільних* $(x,t) \in Q,\ \xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2 \in \mathbb{R}$ *правильна рівність*

$$g(x,t,\xi_1,\eta_1) - g(x,t,\xi_2,\eta_2) =$$
$$= (\xi_1-\xi_2)G_1(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2)+$$
$$+(\eta_1-\eta_2)G_2(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2),$$

де

$$G_1(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) := \int_0^1 g_\xi\Big(x,t,z(\xi_1-\xi_2)+$$
$$+\xi_2, z(\eta_1-\eta_2)+\eta_2\Big)dz, \tag{13}$$

$$G_2(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) := \int_0^1 g_\eta\Big(x,t,z(\xi_1-\xi_2)+$$
$$+\xi_2, z(\eta_1-\eta_2)+\eta_2\Big)dz, \tag{14}$$

причому

$$0 \le G_i(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2) \le g_i(x,t) \quad (i=1,2). \tag{15}$$

Доведення. На підставі леми Адамара маємо для будь-яких $(x,t)\in Q, \xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2 \in \mathbb{R}$ правильна рівність

$$g(x,t,\xi_1,\eta_1) - g(x,t,\xi_2,\eta_2) =$$
$$=\big(\xi_1-\xi_2\big)\int_0^1 g_\xi\Big(x,t,z(\xi_1-\xi_2)+\xi_2, z(\eta_1-\eta_2)+$$
$$+\eta_2\Big)dz+\big(\eta_1-\eta_2\big)\int_0^1 g_\eta\Big(x,t,z(\xi_1-\xi_2)+\xi_2,z(\eta_1-\eta_2)+$$
$$+\eta_2\Big)dz=(\xi_1-\xi_2)G_1(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2)+$$
$$+(\eta_1-\eta_2)G_2(x,t,\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2).$$

З умови $(\mathcal{A}_2)$ випливає (15). □

1.4 Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. Позначимо $w(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{\Omega}\times[\tau_0,T])$. Розглядаючи різницю виразів $Pu_1(x,t)$ і $Pu_2(x,t)$ та використовуючи лему 3, отримаємо рівність

$$\widetilde{P}w(x,t) := w_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)w_{x_kx_l}(x,t)+$$
$$+\sum_{k=1}^n a_k w_{x_k}(x,t) + \widehat{a}_0(x,t)\,w(x,t)-$$
$$-\widehat{g}(x,t)J_\tau w(x,t) = \widetilde{f}(x,t),\ (x,t)\in Q, \tag{16}$$

де

$$\widehat{a}_0(x,t) := a_0(x,t) - G_1\Big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),$$
$$J_\tau u_1(x,t), J_\tau u_2(x,t)\Big) \ge a_0(x,t) - g_1(x,t),\ (x,t)\in Q,$$
$$\widehat{g}(x,t) := G_2\Big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),J_\tau u_1(x,t),$$
$$J_\tau u_2(x,t)\Big) \le g_2(x,t), \quad (x,t)\in Q,$$
$$\widetilde{f}(x,t) := Pu_1(x,t) - Pu_2(x,t),\ (x,t)\in Q,$$

де G_1 і G_2 визначені, відповідно, в (13) і (14). Маємо

$$Rw(x,t) = \widetilde{h}(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma, \tag{17}$$

$$Gw(x,t)) = \widetilde{u_0}(x,t), \quad (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0], \tag{18}$$

де

$$\widetilde{h}(x,t) := Ru_1(x,t) - Ru_2(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma,$$
$$\widetilde{u}_0(x,t) := Gu_1(x,t) - Gu_2(x,t),\ (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,0].$$

Перевіримо виконання умов твердження 3 стосовно задачі (16)–(18). Для цього достатньо переконатися, що $\widehat{g} \ge 0$ на Q і $\widehat{a_0}^- > 0$. З леми 3 (див. (15)) випливає, що $\widehat{g}(x,t) \ge 0$ для будь-яких $(x,t)\in Q$, а також

$$\widehat{a_0}^- := \inf_{(x,t)\in Q}\Big(\widehat{a}_0(x,t) - \widehat{g}(x,t)\int_{t-\tau(t)}^t J(x,t,s)ds\Big) \ge$$
$$\ge \inf_{(x,t)\in Q}\Big(a_0(x,t)-g_1(x,t)-g_2(x,t)\int_{t-\tau(t)}^t J(x,t,s)ds\Big) =$$
$$= a_0^- > 0.$$

Отож, умови твердження 3 виконуються. З цього твердження випливає, що для функції w, яка є розв'язком задачі (16) – (18), правильні нерівності (12) із заміною u, f, h, u_0 на, відповідно, $w, \widetilde{f}, \widetilde{h}, \widetilde{u}_0$. Звідси отримаємо нерівності (4). □

Доведення наслідку 1. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 – два різні розв'язки задачі (1)–(3). Тоді з теореми 1 маємо, що $0 \le u_1(x,t) - u_2(x,t) \le 0$ $\forall (x,t) \in Q$, тобто $u_1 = u_2$ на Q, а це протирічить нашому припущенню. Отож, наше твердження є правильним. $\square$

Доведення наслідку 2. Дане твердження безпосередньо отримуємо з теореми 1, взявши $u_1 = u$, $u_2 = 0$. $\square$

Доведення наслідку 3. З умови наслідку маємо, що $\widetilde{f}(x,t) \le 0$ $\forall (x,t) \in Q$, $\widetilde{h}(x,t) \le 0$ $\forall (x,t) \in \Sigma$, $\widetilde{u}_0(x,t) \le 0$ $\forall (x,t) \in \overline{\Omega} \times [-\tau_0, 0]$. З (4) отримаємо $u_1(x,t) - u_2(x,t) \le 0$ $\forall (x,t) \in Q$, тобто $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$. $\square$

Доведення теореми 2. Покладемо

$$C_1 := \max\{\frac{1}{a_0^-} \sup_{(y,s)\in Q} f(y,s), \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h(y,s), \max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,T]} u_0(y,s), 0\} \ge 0, \qquad (19)$$

$$C_2 := \min\{\frac{1}{a_0^-} \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s), \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}} h(y,s), \min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_0,T]} u_0(y,s), 0\} \le 0. \qquad (20)$$

Визначимо послідовність функцій $\{v_p\}_{p=0}^{\infty} \subset C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times [\tau_0, T]\big) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$ таким чином. Спочатку приймемо $v_0(x,t) = C_1$, $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [\tau_0, T]$. Наступні члени цієї послідовності визначимо так: якщо відома функція v_{p-1}, то функцію v_p знаходимо як розв'язок задачі

$$\widetilde{P}v_p(x,t) := v_{p,t}(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t) v_{p,x_k x_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t) v_{p,x_k}(x,t) + a_0(x,t) v_p(x,t) = g(x,t,v_{p-1}(x,t), J_\tau v_{p-1}(x,t)) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \qquad (21)$$

$$v_p(x,t) = h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \qquad (22)$$

$$v_p(x,t) = u_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [\tau_0, 0]. \qquad (23)$$

Покажемо, що так визначити послідовність $\{v_p\}$ можна. Нехай p – довільне фіксоване натуральне число. Позначимо

$$\widetilde{f}_p(x,t) := g\big(x,t,v_{p-1}(x,t), J_\tau v_{p-1}(x,t)\big) + f(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}. \qquad (24)$$

Оскільки $v_{p-1} \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times [\tau_0, T]\big)$, то з умови $(\mathcal{B}_2)$ випливає, що $f_p \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$. Звідси, а також умов нашої теореми за теоремою 9 монографії [12, ст. 93] функція $v_p \in C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{Q}\big) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$ знаходиться однозначно для кожного $p \in N$. Використовуючи умову (23) та те, що $u_0 \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times [\tau_0, 0])$, легко переконатися, що функція v_p належить до простору $C^{\alpha,\alpha/2}\big(\overline{\Omega} \times [\tau_0, T]\big) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$.

Покажемо, що правильні нерівності

$$C_2 \leqslant v_{p+1}(x,t) \leqslant v_p(x,t) \leqslant C_1, \quad (x,t) \in Q, \qquad (25)$$

для довільного $p \in N$.

Для цього використаємо метод математичної індукції. Доведемо спочатку, що $v_1(x,t) \leqslant v_0(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}$. За означенням v_1 маємо

$$v_1(x,t) - v_0(x,t) \le v_1(x,t) - C_1 \le \le 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [\tau_0, 0], \qquad (26)$$

$$v_1(x,t) - v_0(x,t) \le v_1(x,t) - C_1 \le 0, \ (x,t) \in \Sigma. \qquad (27)$$

Використовуючи лему 3 та умову $(\mathcal{A}_2)$, а точніше те, що $g_\xi \ge 0$, $g_\eta \ge 0$, $g(x,t,0,0) = 0$, матимемо

$$\widetilde{P}v_1(x,t) - \widetilde{P}v_0(x,t) = f(x,t) + g(x,t,C_1,C_1) - a_0(x,t)C_1 = f(x,t) - C_1\Big(a_0(x,t) - G_1(x,t,C_1,0,C_1,0) - G_2(x,t,C_1,0,C_1,0) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)ds\Big) \le$$

$$\le f(x,t) - C_1\big(a_0(x,t) - g_1(x,t) - g_2(x,t) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)ds\big) \le f(x,t) - a_0^- C_1 =$$

$$= f(x,t) - \sup_{(y,s)\in Q} f(y,s) \le 0, \quad (x,t) \in Q. \tag{28}$$

З (26)–(28) та з леми 2 випливає, що $v_1(x,t) \le v_0(x,t),\ (x,t) \in Q$.

Тепер покажемо, що з нерівності $v_p(x,t) \le v_{p-1}(x,t),\ (x,t) \in Q$, для якого-небудь $p \in N$ випливає нерівність $v_{p+1}(x,t) \le v_p(x,t),\ (x,t) \in Q$.

Дійсно, з (22), (23) маємо, що

$$v_{p+1}(x,t) - v_p(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [\tau_0, 0],$$

$$v_{p+1}(x,t) - v_p(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma.$$

На підставі леми 3 легко бачити, що

$$\widetilde{P}v_{p+1}(x,t) - \widetilde{P}v_p(x,t) =$$
$$= g\big(x,t,v_p(x,t),J_\tau v_p(x,t)\big) -$$
$$-g(x,t,v_{p-1}(x,t),J_\tau v_{p-1}(x,t)\big) =$$
$$= G_1\Big(x,t,v_p(x,t),v_{p-1}(x,t),J_\tau v_p(x,t),$$
$$J_\tau v_{p-1}(x,t)\Big) \times (v_p(x,t) - v_{p-1}(x,t)) +$$
$$+G_2\Big(x,t,v_p(x,t),v_{p-1}(x,t),J_\tau v_p(x,t),$$
$$J_\tau v_{p-1}(x,t)\Big) \times \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)\big(v_p(x,s)-$$
$$-v_{p-1}(x,s)\big)ds \leqslant 0, \quad (x,t) \in Q.$$

Звідси та з леми 2 отримаємо потрібне твердження. Отже, з принципу математичної індукції випливає, що $v_{p+1}(x,t) \leqslant v_p(x,t) \leqslant C_1,\ (x,t) \in Q$, для довільного $p \in N$.

Залишилось показати, що для кожного $p \in N$ маємо $C_2 \leqslant v_p(x,t)\ \forall (x,t) \in Q$. Для цього використаємо метод математичної індукції. Очевидно, що $C_2 \leqslant v_0(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$. Нехай для деякого $p \in N$ маємо $C_2 \leqslant v_{p-1}(x,t)\ \forall (x,t) \in Q$. Доведемо, що тоді $C_2 \leqslant v_p(x,t),\ (x,t) \in Q$. Покладемо $v_*(x,t) := C_2,\ (x,t) \in \overline{\Omega} \times [\tau_0, T]$. Враховуючи означення C_2 та (22), (23), отримаємо

$$v_*(x,t) - v_p(x,t) = C_2 - u_0(x,t) \le$$
$$\le 0, \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \times [\tau_0, 0], \tag{29}$$

$$v_*(x,t) - v_p(x,t) = C_2 - h(x,t) \leqslant 0,\ (x,t) \in \Sigma. \tag{30}$$

Використовуючи лему 3 та умову $(\mathcal{A}_2)$, а точніше те, що $g_\xi \ge 0,\ g_\eta \ge 0,\ g(x,t,0,0) = 0$, матимемо

$$\widetilde{P}v_*(x,t) - \widetilde{P}v_p(x,t) = a_0(x,t)C_2 - g\big(x,t,$$
$$v_{p-1}(x,t), J_\tau v_{p-1}(x,t)\big) - f(x,t) \le$$
$$\le C_2\Big(a_0(x,t) - g_1(x,t) - g_2(x,t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)ds\Big) -$$
$$-f(x,t) \le a_0^- C_2 - f(x,t) =$$
$$= \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s) - f(x,t) \le 0,\ (x,t) \in Q. \tag{31}$$

З (29)–(31) на підставі леми 2 отримаємо

$$v_*(x,t) \leqslant v_p(x,t), \qquad (x,t) \in Q,$$

що і потрібно було довести.

Отже, послідовність $\{v_p\}$ – монотонна і обмежена. Звідси випливає, що існує визначена на $\overline{\Omega} \times [\tau_0, T]$ функція u така, що для кожної точки $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [\tau_0, T]$ маємо $v_p(x,t) \to u(x,t)$ при $p \to \infty$ і u задовольняє умови (2), (3). Покажемо, що u – шуканий розв'язок.

З (21) – (23) та (25) в силу теореми 10.1 монографії [8, ст. 238, 239] отримаємо

$$||v_p||^{\overline{Q}}_{\alpha,\alpha/2} \le C_3, \quad p \in N, \tag{32}$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка не залежить від p. Отже (див. твердження 1), $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$ та існує підпослідовність послідовності $\{v_p\}_{p=1}^{\infty}$ (цю підпослідовність позначимо так само, як і всю послідовність, через $\{v_p\}_{p=1}^{\infty}$) така, що

$$v_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad C(\overline{Q}). \tag{33}$$

Звідси та умов (3), $(\mathcal{B}_2)$ і того, що $u(x,0) = u_0(x,0)$ випливає, що $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times [\tau_0, T])$.

Тепер відмітимо, що з умов $(\mathcal{A}_2)$–$(\mathcal{A}_5)$, $(\mathcal{B}_2)$ та оцінки (32) маємо

$$||\widetilde{f}_p||^{\overline{Q}}_{\alpha,\alpha/2} \leqslant C_4, \quad p \in N, \tag{34}$$

де $C_4 > 0$ – стала, яка не залежить від p.

Тепер для довільного $\delta > 0$ позначимо $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \operatorname{dist}\{x, \partial\Omega\} > \delta\}$. Нехай $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – монотонна послідовність чисел така, що $0 < \delta_k < T$, $\delta_k \underset{k\to\infty}{\downarrow} 0$ і Ω_{δ_k} – область в R^n. Очевидно, що $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Omega_{\delta_k} = \Omega$. Позначимо $Q_k := \Omega_{\delta_k} \times (\delta_k, T]$. Враховуючи (34) і умови нашої теореми, з теореми 5 монографії [12, ст. 86, 87] для кожного $k \in \mathbb{N}$ матимемо

$$||v_p||^{\overline{Q_k}}_{2+\alpha,1+\alpha/2} \leqslant C_5, \quad p \in N, \qquad (35)$$

де $C_5 > 0$ – стала, яка від p не залежить, але залежить від C_3, C_4, і може залежати від k.

Із (33), (35) на підставі твердження 2 випливає, що $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\text{loc}}(Q)$ та можна вибрати підпослідовність $\{v_{p_j}\}_{j=1}^{\infty}$, яка збігається до u в $C^{2,1}(Q)$. Поклавши в (21) $p = p_j$ та спрямувавши j до нескінченності, на підставі сказаного вище матимемо, що u задовольняє рівняння (1). Як уже зазначалось, u також задовольняє умови (2), (3), а отже, ця функція є розв'язком задачі (1)-(3). □

2. Крайова задача без початкових умов для параболічних рівнянь із запізненням та виродженням у початковий момент часу

2.1 Формулювання задачі та основних результатів розділу 2.

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ – межа Ω, $T > 0$. Покладемо $Q := \Omega \times (0, T]$, $\widetilde{Q} := \overline{\Omega} \times (0, T]$, $\Sigma := \partial\Omega \times (0, T]$.

Розглянемо таку задачу : знайти функцію $u \in C(\widetilde{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$, яка задовольняє рівняння

$$Pu(x,t) := p(x,t)u_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)\times$$

$$\times u_{x_k x_l}(x,t) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)u_{x_k}(x,t)+$$

$$+a_0(x,t)u(x,t) - g(x,t,u(x,t),J_\tau u(x,t)) =$$

$$= f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \qquad (36)$$

крайову умову

$$Ru(x,t) := u(x,t) = h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \qquad (37)$$

та аналог початкової умови

$$\overline{\lim_{t\to+0}}\, ||u(\cdot,t)||_{C(\overline{\Omega})} < \infty, \qquad (38)$$

де $J_\tau u(x,t) := \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)u(x,s)ds$,

$\tau : (0,T] \to \mathbb{R}$ – неперервна функція така, що $0 \leq \tau(t) < t$ при $t \in (0,T]$ (тоді $\tau_0 := \inf\limits_{t\in(0,T]}(t - \tau(t)) = 0$).

На вихідні дані задачі (36)–(38) накладаємо такі обмеження: виконуються умови $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_4)$ (див. п. 1.2) та

$(\mathcal{A}_7)$ $p \in C(Q)$, $p(x,t) > 0$ $\forall (x,t) \in Q$, $\lim\limits_{t\to 0+} p(x,t) = 0$ $\forall x \in \Omega$, а також існує функція $\varphi \in C((0,T])$, яка задовольняє умови: $\varphi(t) > 0$ при $t \in (0,T]$,

$$\int_0^T \varphi(z)dz = +\infty, \quad \sup_{t\in(0,T]} \int_{t-\tau(t)}^{t} \varphi(z)dz < \infty,$$

$$\sup_{(x,t)\in Q} [p(x,t)\varphi(t)] < \infty; \qquad (39)$$

$(\mathcal{A}_8)$ $f \in C(Q)$, $h \in C(\Sigma)$ – обмежені.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_4)$, $(\mathcal{A}_7)$. Припустимо, що u_1, u_2 – розв'язки задач, що відрізняються від задачі (36)–(38) тільки тим, що замість f, h стоять, відповідно, f_1, h_1 та f_2, h_2 з такими ж властивостями, як f, h з умови $(\mathcal{A}_8)$. Тоді виконується нерівність*

$$\min\Big\{\frac{1}{a_0^-} \inf_{(y,s)\in Q} (f_1(y,s) - f_2(y,s)),$$

$$\inf_{(y,s)\in\Sigma} (h_1(y,s) - h_2(y,s)), 0\Big\} \leq$$

$$\leq u_1(x,t) - u_2(x,t) \leq$$

$$\leq \max\Big\{\frac{1}{a_0^-} \sup_{(y,s)\in Q} (f_1(y,s) - f_2(y,s)),$$

$$\sup_{(y,s)\in\Sigma} (h_1(y,s) - h_2(y,s)), 0\Big\}, \quad (x,t) \in Q. \qquad (40)$$

Зауважимо, що з цієї теореми безпосередньо випливає неперервна залежність розв'язку задачі (36)–(38) від початкових даних.

Наслідок 4. *Нехай виконуються умови теореми 3 і, крім того, $f_1(x,t) \leq f_2(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$, $h_1(x,t) \leq h_2(x,t)$ $\forall (x,t) \in \Sigma$. Тоді правильна нерівність $u_1(x,t) \leq u_2(x,t)$ $\forall (x,t) \in Q$.*

Наслідок 5. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_4)$ *(див. п. 1.2) та* $(\mathcal{A}_7)$, $(\mathcal{A}_8)$. *Тоді для розв'язку задачі* (36)–(38) *правильна оцінка*

$$\min\{\frac{1}{a_0^-}\inf_{(y,s)\in Q} f(y,s), \inf_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\} \le u(x,t) \le$$
$$\le \max\{\frac{1}{a_0^-}\sup_{(y,s)\in Q} f(y,s), \sup_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\},$$
$$(x,t)\in Q. \qquad (41)$$

Наслідок 6. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_4)$, $(\mathcal{A}_7)$, $(\mathcal{A}_8)$. *Тоді задача* (36)–(38) *має не більше одного розв'язку.*

Згідно з означеннями пункту 1.1, під $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$ розумітимемо простір функцій $v \in C(Q)$ таких, що для строго внутрішньої підобласті Ω' області Ω (тобто, $\overline{\Omega'} \subset \Omega$) та будь-якого числа $\delta \in (0,T)$ звуження v на $\overline{\Omega'} \times [\delta, T]$ належить простору $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega'} \times [\delta,T])$, а під $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{Q})$ (відповідно, $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$) – простір функцій $v \in C(\widetilde{Q})$ (відповідно, $C(\Sigma)$) таких, що будь-якого числа $\delta \in (0,T)$ звуження v на $\overline{\Omega} \times [\delta,T]$ (відповідно, $\partial\Omega \times [\delta,T]$) належить простору $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}\times[\delta,T])$ (відповідно, $C^{\alpha,\alpha/2}(\partial\Omega\times[\delta,T])$).

Під $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$ розумітимемо простір функцій $v \in C^{2,1}(Q)$ таких, що їх похідні v_{x_k}, $v_{x_kx_l}$ $(k,l=\overline{1,n})$, v_t належать простору $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$.

Через $C^{\alpha,\alpha/2,0}_{\mathrm{loc}}(\widetilde{Q}\times(0,T])$ позначатимемо простір неперервних функцій $q(x,t,s)$, $(x,t,s)\in\widetilde{Q}\times(0,T]$, таких, що для будь-якого $\delta\in(0,T)$ існує стала $L=L(q,\delta)>0$ така, що

$$\left|q(x,t,s)-q(\widetilde{x},\widetilde{t},s)\right| \le L(|x-\widetilde{x}|^\alpha+|t-\widetilde{t}|^{\alpha/2})$$

для довільних (x,t,s), $(\widetilde{x},\widetilde{t},s)$ з $\overline{\Omega}\times[\delta,T]\times[\delta,T]$.

Через $C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ позначатимемо простір неперервних функцій $\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta)\in\overline{\Omega}\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, кожна з яких є неперервно диференційовною за змінними ξ,η та для будь-яких $\delta\in(0,T)$, $q_1,q_2>0$ існують сталі $L_k=L_k(\widetilde{g},\delta,q_1,q_2)>0$ $(k=\overline{1,3})$ такі, що виконуються нерівності

$$\left|\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta)-\widetilde{g}(\widetilde{x},\widetilde{t},\xi,\eta)\right| \le L_1(|x-y|^\alpha+|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}),$$

$$|\widetilde{g}_\xi(x,t,\xi,\eta)| \le L_2, \quad |\widetilde{g}_\eta(x,t,\xi,\eta)| \le L_3$$

для довільних $(x,t,\xi,\eta),(\widetilde{x},\widetilde{t},\xi,\eta)$ з $\overline{\Omega}\times[\delta,T]\times[-q_1,q_1]\times[-q_2,q_2]$.

Позначимо через $C^{\alpha/2}_{\mathrm{loc}}((0,T])$ простір функцій $v(t)$, $t\in(0,T]$ таких, що будь-якого числа $\delta\in(0,T)$ звуження v на $[\delta,T]$ належить простору $C^{\alpha/2}([\delta,T])$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_4)$, $(\mathcal{A}_7)$, $(\mathcal{A}_8)$. *Припустимо, що для деякого* $\alpha\in(0,1]$ *виконується умова* $(\mathcal{B}_1)$ *(див. формулювання теореми 2) та умова*

$(\mathcal{B}_4)$ $p, a_{kl}, a_k, a_0 \in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\widetilde{Q})$ $(k,l=\overline{1,n})$,
$g\in C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{loc}(\overline{\Omega}\times(0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$,
$J\in C^{\alpha,\alpha/2,0}_{loc}(\widetilde{Q}\times(0,T])$, $\tau\in C^{\alpha/2}_{loc}((0,T])$,
$f\in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\widetilde{Q})$, $h\in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\Sigma)$.

Крім того, нехай виконується умова $(\mathcal{B}_3)$. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (36)–(38) *і він належить простору* $C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\widetilde{Q})\cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$.

2.2 Допоміжні твердження

Розглянемо таку задачу: знайти функцію $u\in C(\widetilde{Q})\cap C^{2,1}(Q)$, яка задовольняє рівняння

$$\widehat{P}u(x,t) := p(x,t)u_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)u_{x_kx_l}(x,t) +$$
$$+\sum_{k=1}^n a_k(x,t)u_{x_k}(x,t)+\widehat{a}_0(x,t)u(x,t)-$$
$$-\widehat{g}(x,t)J_\tau u(x,t)=f(x,t), \quad (x,t)\in Q, \quad (42)$$

та умови (37), (38),

де τ, J_τ такі, як у рівнянні (36).

Ми припускаємо, що функції $a_{k,l}, a_k$ $(k,l=\overline{1,n})$, p,J,f,h задовольняють умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{A}_7)$, $(\mathcal{A}_8)$, а функції $\widehat{a}_0$, $\widehat{g}$ задовольняють умову $(\mathcal{A}_6)$.

Твердження 4. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{A}_6)$–$(\mathcal{A}_8)$. *Тоді для розв'язку задачі (42),* (37)–(38) *правильна оцінка*

$$\min\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^-}\inf_{(y,s)\in Q} f(y,s), \inf_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\right\} \le u(x,t) \le$$
$$\le \max\left\{\frac{1}{\widehat{a}_0^-}\sup_{(y,s)\in Q} f(y,s), \sup_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\right\},$$
$$(x,t)\in Q. \qquad (43)$$

Доведення твердження 4. Спочатку введемо такі позначення:

$$\theta(t):=\int_T^t \varphi(z)dz,\ \varkappa(t):=\int_{t-\tau(t)}^t \varphi(z)dz,\ t\in(0,T]. \tag{44}$$

На підставі умови $(\mathcal{A}_7)$ маємо, що $\theta(t)\le 0$ при $t\in(0,T]$, θ монотонно зростає на $(0,T]$, $\theta(T)=0$, $\theta(t)\to-\infty$ при $t\to 0$, $\varkappa(t)>0$ при $t\in(0,T]$ та $\varkappa$ – обмежена функція.

Нехай u – розв'язок задачі (42), (37), (38). Позначимо через $M>0$ сталу таку, що

$$|u(x,t)|\le M,\ \ (x,t)\in\widetilde{Q}, \tag{45}$$

і покладемо $u^\mu(x,t):=u(x,t)e^{\mu\,\theta(t)}$, $(x,t)\in\widetilde{Q}$, звідки,

$$u(x,t)=u^\mu(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)},\quad (x,t)\in\widetilde{Q}, \tag{46}$$

де $\mu>0$ – довільне число.

З рівності (42), врахувавши рівності

$$u_t(x,t)=u^\mu_t(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)}-\mu\varphi(t)\,u^\mu(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)},$$

$$u_{x_k}(x,t)=u^\mu_{x_k}(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)}\ (k=\overline{1,n}),$$

$$\int_{t-\tau(t)}^t J(x,t,s)u(x,s)ds=\int_{t-\tau(t)}^t J(x,t,s)e^{-\mu\,\theta(s)}\times$$

$$\times u^\mu(x,s)ds,$$

матимемо

$$p(x,t)\,u^\mu_t(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)}-\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)\times$$

$$\times u^\mu_{x_kx_l}(x,t)e^{-\mu\theta(t)}+\sum_{k=1}^n a_k(x,t)u^\mu_{x_k}(x,t)e^{-\mu\theta(t)}+$$

$$+\big(\widehat{a}_0(x,t)-\mu p(x,t)\varphi(t)\big)\,u^\mu(x,t)e^{-\mu\,\theta(t)}-$$

$$-\widehat{g}(x,t)\int_{t-\tau(t)}^t J(x,t,s)u^\mu(x,s)e^{-\mu\,\theta(s)}ds=$$

$$=f(x,t),\quad (x,t)\in Q.$$

Помноживши цю рівність на $e^{\mu\,\theta(t)}$ і позначивши

$$\widehat{a}^\mu_0(x,t):=\widehat{a}_0(x,t)-\mu p(x,t)\varphi(t),\ (x,t)\in Q,$$

$$f^\mu(x,t):=f(x,t)e^{\mu\,\theta(t)},\quad (x,t)\in Q,$$

$$J^\mu(x,t,s):=J(x,t,s)e^{\mu(\theta(t)-\theta(s))},$$

$$(x,t,s)\in Q\times(0,T], \tag{47}$$

отримаємо

$$p(x,t)\,u^\mu_t(x,t)-\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)u^\mu_{x_kx_l}(x,t)+$$

$$+\sum_{k=1}^n a_k(x,t)\,u^\mu_{x_k}(x,t)+\widehat{a}^\mu_0(x,t)\,u^\mu(x,t)-$$

$$-\widehat{g}(x,t)\int_{t-\tau(t)}^t J^\mu(x,t,s)u^\mu(x,s)ds=$$

$$=f^\mu(x,t),\ (x,t)\in Q. \tag{48}$$

З умови (37) та співвідношення (46) маємо

$$u^\mu(x,t)=h^\mu(x,t),\quad (x,t)\in\Sigma, \tag{49}$$

де $h^\mu(x,t):=h(x,t)e^{\mu\,\theta(t)}$, $(x,t)\in\Sigma$.

Нехай $\varepsilon\in(0,T)$ – довільне число. Позначимо $\tau_\varepsilon:=\min\limits_{t\in[\varepsilon,T]}(t-\tau(t))$. Очевидно, що $0<\tau_\varepsilon\le\varepsilon$. Приймемо

$$Q_\varepsilon:=\Omega\times(\varepsilon,T]\quad(\text{тоді } \overline{Q_\varepsilon}:=\overline{\Omega}\times[\varepsilon,T]),$$

$$\Sigma_\varepsilon:=\partial\Omega\times(\varepsilon,T].$$

Розглянемо задачу: знайти функцію $w\in C\big(\overline{\Omega}\times[\tau_\varepsilon,T]\big)\cap C^{2,1}(Q_\varepsilon)$, яка задовольняє рівняння

$$p(x,t)w_t(x,t)-\sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)w_{x_kx_l}(x,t)+$$

$$+\sum_{k=1}^n a_k(x,t)w_{x_k}(x,t)+\widehat{a}^\mu_0(x,t)w(x,t)-$$

$$-\widehat{g}(x,t)\int_{t-\tau(t)}^t J^\mu(x,t,s)w^\mu(x,s)ds=$$

$$=f^\mu(x,t),\quad (x,t)\in Q_\varepsilon, \tag{50}$$

крайову умову

$$w(x,t)=h^\mu(x,t),\quad (x,t)\in\Sigma_\varepsilon, \tag{51}$$

і початкову умову

$$w(x,t)=u^\mu(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_\varepsilon,\varepsilon]. \tag{52}$$

Переконаємося, що вихідні дані задачі (50)–(52) підпадають під умови наслідку 2 при досить малих значеннях μ.

З умови твердження маємо, що $\widehat{g} \geq 0$ на Q. Покажемо, що існує $\mu^* > 0$ таке, що $\widehat{a}_\mu^- > 0$ для $\mu \in (0, \mu^*)$, де $\widehat{a}_\mu^- := \inf\limits_{(x,t)\in Q} \Big[\widehat{a}_0(x,t) - \mu p(x,t)\varphi(t) - -\widehat{g}(x,t) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s) e^{\mu(\theta(t)-\theta(s))} ds\Big]$. Покажемо, що $\widehat{a}_\mu^- \to \widehat{a}_0^-$ при $\mu \to 0+$. Справді, оскільки $\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s) ds \leq \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s) e^{\mu(\theta(t)-\theta(s))} ds \leq \leq \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s) ds \cdot e^{\mu\varkappa(t)}$, то

$$\sup_{(x,t)\in Q} \Big| \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s) e^{\mu(\theta(t)-\theta(s))} ds - \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s) ds \Big| \leq$$

$$\leq \sup_{(x,t)\in Q} \Big[\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s) ds \cdot \big(e^{\mu\varkappa(t)} - 1\big)\Big] \leq$$

$$\leq \big(e^{\mu \sup\limits_{t\in(0,T]} \varkappa(t)} - 1\big) \sup_{(x,t)\in Q} \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s) ds \underset{\mu\to 0+}{\longrightarrow} 0.$$

Звідки, враховуючи умову $(\mathcal{A}_7)$, отримаємо

$$\widehat{a}_\mu^- \underset{\mu\to 0+}{\longrightarrow} \widehat{a}_0^-. \tag{53}$$

З (53), оскільки $\widehat{a}_0^- > 0$, випливає існування $\mu^* > 0$ такого, що

$$\widehat{a}_\mu^- > 0 \quad \text{при} \quad \mu \in (0, \mu^*). \tag{54}$$

Отже, при $\mu \in (0, \mu^*)$ умови наслідку 2 для задачі (50)–(52) виконуються.

З (48) і (49) випливає, що звуження u^μ на $\overline{\Omega} \times [\tau_\varepsilon, T]$ є розв'язком задачі (50)–(52). Отож, на підставі наслідку 2 для $\mu \in (0, \mu^*)$ маємо оцінку

$$\min\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_\mu^-} \inf_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f^\mu(y,s), \min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}_\varepsilon} h^\mu(y,s),$$

$$\min_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_\varepsilon,\varepsilon]} u^\mu(y,s), 0\Big\} \leq u^\mu(x,t) \leq$$

$$\leq \max\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_\mu^-} \sup_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f^\mu(y,s), \max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}_\varepsilon} h^\mu(y,s),$$

$$\max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_\varepsilon,\varepsilon]} u^\mu(y,s), 0\Big\} \quad (x,t) \in Q_\varepsilon. \tag{55}$$

Зрозуміло, що для будь-якого $\varepsilon \in (0, T)$ маємо

$$\inf_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f^\mu(y,s) \geq \inf_{(y,s)\in Q} f^\mu(y,s), \tag{56}$$

$$\min_{(y,s)\in\overline{\Sigma}_\varepsilon} h^\mu(y,s) \geq \inf_{(y,s)\in\Sigma} h^\mu(y,s), \tag{57}$$

$$\sup_{(y,s)\in Q_\varepsilon} f^\mu(y,s) \leq \sup_{(y,s)\in Q} f^\mu(y,s), \tag{58}$$

$$\max_{(y,s)\in\overline{\Sigma}_\varepsilon} h^\mu(y,s) \leq \sup_{(y,s)\in\Sigma} h^\mu(y,s). \tag{59}$$

Також легко переконатися, врахувавши оцінку (45) і монотонність θ, що

$$\max_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times[\tau_\varepsilon,\varepsilon]} |u^\mu(y,s)| \leq \sup_{(y,s)\in\overline{\Omega}\times(0,\varepsilon]} |u(y,s)e^{\mu\theta(s)}| \leq$$

$$\leq M e^{\mu\theta(\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0. \tag{60}$$

На підставі (56)–(59) і (60) з (55), спрямувавши ε до $0+$, отримаємо

$$\min\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_\mu^-} \inf_{(y,s)\in Q} f^\mu(y,s), \inf_{(y,s)\in\Sigma} h^\mu(y,s), 0\Big\} \leq$$

$$\leq u^\mu(x,t) \leq$$

$$\leq \max\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_\mu^-} \sup_{(y,s)\in Q} f^\mu(y,s), \sup_{(y,s)\in\Sigma} h^\mu(y,s), 0\Big\},$$

$$(x,t) \in Q, \quad \mu \in (0, \mu^*). \tag{61}$$

Нехай $Q_- := \{(x,t) \in Q \mid f(x,t) < 0\}$,
$Q_+ := \{(x,t) \in Q \mid f(x,t) > 0\}$,
$\Sigma_- := \{(x,t) \in \Sigma \mid h(x,t) < 0\}$,
$\Sigma_+ := \{(x,t) \in \Sigma \mid h(x,t) > 0\}$.

У випадку $Q_- \neq \varnothing$, маючи на увазі нерівність $0 < e^{\mu\theta(s)} \leq 1,\ s \in (0,T]$, отримаємо

$$\inf_{(y,s)\in Q} f^\mu(y,s) = \inf_{(y,s)\in Q_-} f(y,s) e^{\mu\theta(s)} \geq$$

$$\geq \inf_{(y,s)\in Q_-} f(y,s) = \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s),$$

а тому (див.(54)) маємо

$$\frac{1}{\widehat{a}_\mu^-} \inf_{(y,s)\in Q} f^\mu(y,s) \geq \frac{1}{\widehat{a}_\mu^-} \inf_{(y,s)\in Q} f(y,s). \tag{62}$$

Отже, в цьому випадку в лівій частині нерівності (61) перший член можна замінити на $\frac{1}{\widehat{a}_\mu^-} \inf\limits_{(y,s)\in Q} f(y,s)$. Очевидно, що теж саме можна зробити і тоді, коли $Q_- = \varnothing$, бо в цьому випадку перший член нерівності (61) є невід'ємний, а отже не визначає значення лівої частини цієї нерівності.

Провівши аналогічні міркування стосовно другого члена лівої частини, а також першого та другого членів правої частини нерівності (61), одержимо

$$\min\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_\mu^-}\inf_{(y,s)\in Q} f(y,s), \inf_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\Big\} \le$$

$$\le u(x,t)e^{\mu\,\theta(t)} \le \max\Big\{\frac{1}{\widehat{a}_\mu^-}\sup_{(y,s)\in Q} f(y,s),$$

$$\sup_{(y,s)\in\Sigma} h(y,s), 0\Big\},\ \mu\in(0,\mu^*),\ (x,t)\in Q. \tag{63}$$

Зафіксувавши довільним чином вибрану точку $(x,t)\in Q$, перейдемо в (63) до границі при $\mu\to 0+$. У результаті, взявши до уваги (53), отримаємо оцінку (43). □

2.3 Доведення основних результатів.

Доведення теореми 3. Позначимо $w(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t)$, $(x,t)\in\widetilde{Q}$. Розглядаючи різницю виразів Pu_1 і Pu_2, на підставі леми 3 отримаємо

$$p(x,t)w_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t)w_{x_kx_l}(x,t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} a_k(x,t)w_{x_k}(x,t) + \widehat{a}_0(x,t)\,w(x,t) -$$

$$-\widehat{g}(x,t)J_\tau w(x,t) = \widehat{f}(x,t),\ (x,t)\in Q, \tag{64}$$

$$w(x,t) = \widehat{h}(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma, \tag{65}$$

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\,||w(\cdot,t)||_{C(\overline{\Omega})} < \infty, \tag{66}$$

де

$$\widehat{a}_0(x,t) := a_0(x,t) - G_1\big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),$$

$$J_\tau u_1(x,t), J_\tau u_2(x,t)\big),$$

$$\widehat{g}(x,t) := G_2\big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),$$

$$J_\tau u_1(x,t), J_\tau u_2(x,t)\big),$$

$$\widehat{f}(x,t) := f_1(x,t) - f_2(x,t),\ (x,t)\in Q,$$

$$\widehat{h}(x,t) := h_1(x,t) - h_2(x,t),\ (x,t)\in\Sigma,$$

а G_1 і G_2 визначені, відповідно, в (13) і (14).

З (64)–(66) випливає, що функція w є розв'язком задачі (42), (37)–(38). Перевіримо чи виконуються умови твердження 4. Для цього достатньо переконатися, що $\widehat{g}\ge 0$ на Q і $\widehat{a}^- > 0$. З леми 3 випливає, що $\widehat{g}\ge 0$ на Q. Використовуючи умову $(\mathcal{A}_2)$ та лему 3 маємо

$$\widehat{a_0^-} := \inf_{(x,t)\in Q}\Big[\widehat{a}_0(x,t) - \widehat{g}(x,t)\int_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)ds\Big] \ge$$

$$\ge \inf_{(x,t)\in Q}\Big[a_0(x,t) - G_1\big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),$$

$$J_\tau u_1(x,t), J_\tau u_2(x,t)\big) - G_2\big(x,t,u_1(x,t),u_2(x,t),$$

$$J_\tau u_1(x,t), J_\tau u_2(x,t)\big)\int_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)ds\Big] \ge$$

$$\ge \inf_{(x,t)\in Q}\Big[a_0(x,t) - g_1(x,t) - g_2(x,t)\int_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)ds\Big] =$$

$$= a_0^- > 0.$$

Отже, умови твердження 4 виконуються. З цього випливає, що для функції w правильні нерівності (43), з яких випливають нерівності (40). □

Доведення наслідків 4–6 проводиться аналогічно доведенню, відповідно, наслідків 1–3.

Доведення теореми 4. Нехай ε – довільне число з проміжку $(0, T/3)$, а позначення Q_ε, Σ_ε, τ_ε такі ж, як при доведенні твердження 4.

Візьмемо функцію $\theta_\varepsilon \in C^\infty((0,T])$, яка задовольняє умови: $0\le\theta_\varepsilon(t)\le 1$ при $t\in(0,T]$, $\theta_\varepsilon(t) = 0$ при $t\in(0,2\varepsilon]$ і $\theta_\varepsilon(t)=1$ при $t\in(3\varepsilon,T]$. Покладемо

$$h_\varepsilon(x,t) := \theta_\varepsilon(t)h(x,t), \quad (x,t)\in\Sigma,$$

$$f_\varepsilon(x,t) := \theta_\varepsilon(t)f(x,t), \quad (x,t)\in Q.$$

Зауважимо, що

$$|h_\varepsilon(x,t)| \le |h(x,t)| \quad \forall (x,t)\in\Sigma, \tag{67}$$

$$|f_\varepsilon(x,t)| \le |f(x,t)| \quad \forall (x,t)\in Q. \qquad (68)$$

Розглянемо задачу: знайти функцію $u_\varepsilon \in C\big(\overline{\Omega}\times[\tau_\varepsilon,T]\big)\cap C^{2,1}(Q_\varepsilon)$, яка задовольняє рівняння

$$Pu_\varepsilon(x,t) = f_\varepsilon(x,t), \quad (x,t)\in Q_\varepsilon, \qquad (69)$$

та умови

$$u_\varepsilon(x,t) = h_\varepsilon(x,t), \quad (x,t)\in \Sigma_\varepsilon, \qquad (70)$$

$$u_\varepsilon(x,t) = 0, \quad (x,t)\in \overline{\Omega}\times[\tau_\varepsilon,\varepsilon], \qquad (71)$$

де P – диференціальний оператор, який визначений у (36).

З теореми 2 випливає існування єдиного розв'язку u_ε задачі (69)–(71) і належність його до простору $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_\varepsilon)\cap C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}\times[\tau_\varepsilon,T])$. На підставі наслідку 2 для звуження u_ε на $\overline{\Omega}\times[\tau_\varepsilon,2\varepsilon])$ маємо оцінку

$$|u_\varepsilon(x,t)| \le \max\{\frac{1}{a_0^-}\sup_{(y,s)\in Q_\varepsilon/Q_{2\varepsilon}}|f_\varepsilon(y,s)|,$$

$$\sup_{(y,s)\in\Sigma_\varepsilon/\Sigma_{2\varepsilon}}|h_\varepsilon(y,s)|\},\ (x,t)\in Q_\varepsilon/Q_{2\varepsilon}. \qquad (72)$$

З означень f_ε та h_ε випливає, що права частина (72) дорівнює нулю, а тому $u_\varepsilon(x,t)=0$ для кожного $(x,t)\in\overline{\Omega}\times[\tau_\varepsilon,2\varepsilon])$. Довизначимо u_ε нулем на всю множину $\widetilde{Q}$ і залишимо за цим продовженням позначення u_ε. Легко переконатися, що u_ε є розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (36) – (38) тільки тим, що замість f і h стоять, відповідно, f_ε і h_ε. Звідси на підставі наслідку 5 та (67), (68) випливає, що

$$|u_\varepsilon(x,t)| \le \max\{\frac{1}{a_0^-}\sup_{(y,s)\in Q}|f(y,s)|,$$

$$\sup_{(y,s)\in\Sigma}|h(y,s)|\}, \quad (x,t)\in Q. \qquad (73)$$

Нехай $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^\infty$ – послідовність чисел з інтервалу $(0,T/3)$ така, що $\varepsilon_j\downarrow 0$ при $j\to\infty$. Перепозначимо $u_j := u_{\varepsilon_j}$, $f_j := f_{\varepsilon_j}$, $h_j := h_{\varepsilon_j}$ для кожного $j\in\mathbb{N}$. З (73) випливає, що послідовність $\{u_j\}$ є обмеженою на $\widetilde{Q}$, тобто маємо

$$\sup_{(x,t)\in\widetilde{Q}}|u_j(x,t)| \le C_3, \qquad j\in\mathbb{N}, \qquad (74)$$

де $C_3>0$ – стала, яка не залежить від j.

Нехай $\{\delta_k\}_{k=1}^\infty$ – монотонна послідовність чисел така, що $\delta_k \underset{k\to\infty}{\downarrow} 0$, $0<\delta_k<T$ і $\Omega_k := \{x\in\Omega : \operatorname{dist}\{x,\partial\Omega\}>\delta_k\}$ – область в $\mathbb{R}^n$ для кожного $k\in\mathbb{N}$. Позначимо $I_k := (\delta_k,T]$, $Q_k := \Omega_k\times I_k$, $Q^k := \Omega\times I_k$. Відмітимо, що $Q_k\subset Q^k$, $Q_k\subset Q_{k+1}$, $Q^k\subset Q^{k+1}$ для будь-якого $k\in\mathbb{N}$; $\bigcup_{k=1}^\infty\Omega_k=\Omega$, $\bigcup_{k=1}^\infty\overline{Q}_k=Q$, $\bigcup_{k=1}^\infty\overline{Q^k}=\widetilde{Q}$.

Нехай $g_j(x,t) := f_j(x,t) + g(x,t,u_j(x,t),J_\tau u_j(x,t))$, $(x,t)\in\widetilde{Q}$, для кожного $j\in\mathbb{N}$. З неперервності функцій g на $\widetilde{Q}\times\mathbb{R}^2$, f_j, u_j $(j\in\mathbb{N})$ на $\widetilde{Q}$ та оцінок (67), (68), (74) випливає, що функції g_j $(j\in\mathbb{N})$ є неперервними на $\widetilde{Q}$ і для довільного $k\in\mathbb{N}$ виконується оцінка

$$||g_j||_{C(\overline{Q^k})} \leqslant C_4, \quad j\in N, \qquad (75)$$

де $C_4>0$ – стала, яка не залежить від j, але може залежати від k.

З (69) випливає, що для кожного $j\in\mathbb{N}$ маємо рівність

$$p(x,t)u_{j,t}(x,t) - \sum_{k,l=1}^n a_{kl}(x,t)u_{j,x_kx_l}(x,t)$$

$$+\sum_{k=1}^n a_k(x,t)u_{j,x_k}(x,t) + a_0(x,t)u_j(x,t)$$

$$= g_j(x,t),\ (x,t)\in Q, \qquad (76)$$

а з (70) – рівність

$$u_j(x,t) = h_j(x,t),\ (x,t)\in\Sigma. \qquad (77)$$

Відмітимо, що на підставі умов $(\mathcal{B}_1)$, $(\mathcal{B}_3)$, $(\mathcal{B}_4)$ рівняння (76) є частковим випадком рівняння (1.1), дослідженого у главі 3 монографії [8]. Зокрема, теорема 10.1 (ст. 238-239) цієї монографії встановлює оцінки сталої Гельдера розв'язку рівняння (1.1) у підобласті області його задання. На підставі цієї теореми для розв'язку рівняння (76), що задовольняє умову (77), отримуємо оцінку

$$||u_j||_{\alpha,\alpha/2}^{\overline{Q^k}} \le C_5, \quad j\in N, \qquad (78)$$

де $C_5>0$ – стала, яка не залежить від j, але може залежати від k.

Отже, згідно з твердженням 2 існують функція $u \in C^{\alpha,\alpha/2}_{\text{loc}}(\widetilde{Q})$ і підпослідовності послідовності $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ (цю підпослідовність позначимо так само, як і всю послідовність, через $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$) такі, що

$$u_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{в} \quad C(\,\widetilde{Q}\,). \tag{79}$$

Покажемо, що u – розв'язок задачі (36)–(38).

Відмітимо, що з умов $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_3)$, $(\mathcal{A}_8)$, $(\mathcal{B}_2)$ та оцінки (78) маємо

$$||g_j||^{\overline{Q^k}}_{\alpha,\alpha/2} \leqslant C_6, \quad j \in N, \tag{80}$$

де $C_6 > 0$ – стала, яка не залежить від j, але може залежати від k.

Зауважимо, що на підставі умов $(\mathcal{B}_1)$, $(\mathcal{B}_3)$, $(\mathcal{B}_4)$ рівняння (76) є частковим випадком рівняння (10.1), дослідженого у главі 4 монографії [8]. Зокрема, теорема 10.1 (ст. 400) цієї монографії встановлює локальні оцінки розв'язку рівняння (10.1) та його похідних у класах Гельдера. На підставі цієї теореми для розв'язку рівняння (76) отримуємо оцінку

$$||u_j||^{\overline{Q}_k}_{2+\alpha,1+\alpha/2} \leqslant C_7, \quad j \in N, \tag{81}$$

де $C_7 > 0$ – стала, яка від j не залежить, але залежить від C_5, C_6, k.

Із (79), (81), на підставі твердження 2 та теореми про диференціювання границі збіжної функційної послідовності випливає, що функція u належить простору $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\text{loc}}(Q)$ і з послідовності $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність $\{u_{j_m}\}_{m=1}^{\infty}$, яка збігається до u у просторі $C^{2,1}(Q)$. Тепер відмітимо, що $h_j \to h$ при $j \to \infty$ в $C(\Sigma)$. Звідси маємо умову (37). З (74) та (79) випливає виконання умови (38). Також зауважимо, що з (79) та неперервності функцій g, f_j маємо $g_j(x,t) \to f(x,t) + g(x,t,u(x,t),J_\tau u(x,t))$ при $j \to \infty$ для кожної точки $(x,t) \in Q$. Враховуючи сказане, візьмемо $j = j_m$ у (76) та перейдемо там до границі при $m \to \infty$. У результаті отримаємо рівність (36). Теорема доведена. □

3. Задача Фур'є для нелінійного еволюційного рівняння з інтегральним запізненням

3.1 Формулювання задачі та основних результатів розділу 3.

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\partial\,\Omega$ – межа Ω. Покладемо $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$ (тоді $\overline{Q} := \overline{\Omega} \times S$), $\Sigma := \partial\,\Omega \times S$.

Розглянемо задачу: знайти функцію $u \in C\big(\overline{Q}\big) \cap C^{2,1}(Q)$, яка задовольняє рівняння

$$Pu(x,t) := u_t(x,t) - \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}(x,t) u_{x_k x_l}(x,t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} a_k(x,t) u_{x_k}(x,t) + a_0(x,t)u(x,t) -$$

$$-g\Big(x,t,u(x,t),J_\tau u(x,t)\Big) = f(x,t), \;\; (x,t) \in Q, \tag{82}$$

крайову умову

$$u(x,t) = h(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{83}$$

і аналог початкової умови

$$\varlimsup_{t\to-\infty} ||u(\cdot,t)||_{C(\overline{\Omega})} < \infty, \tag{84}$$

де $\tau \in C(S)$, $\tau(t) \geq 0$ $\forall t \in S$, $\sup\limits_{t\in S} \tau(t) < \infty$,

$$J_\tau u(x,t) := \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)u(x,s)ds \;\; \forall (x,t) \in Q.$$

Далі цю задачу коротко називатимемо задачею (82)–(84).

На вихідні дані задачі (82)–(84) накладаємо такі обмеження: виконуються умови $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_8)$ і

$(\mathcal{A}_9)$ $J \in C(Q \times S)$, $J(x,t,s) \geq 0$ $\forall (x,t,s) \in Q \times S$ і $\sup\limits_{(x,t)\in Q} \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)ds < \infty$;

$(\mathcal{A}_{10})$ $a_0 \in C(Q)$, $a_0^- := \inf\limits_{(x,t)\in Q} \Big[a_0(x,t) - g_1(x,t) - g_2(x,t) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} J(x,t,s)ds\Big] > 0$.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_8)$–$(\mathcal{A}_{10})$. *Припустимо, що* u_1, u_2 – *розв'язки задач, що відрізняються від задачі* (82)–(84) *тільки тим, що замість* f, h *стоять,* *відповідно,* f_1, h_1 *та* f_2, h_2. *Тоді виконується нерівність*

$$\min\Big\{\frac{1}{a_0^-}\inf_{(y,s)\in Q}(f_1(y,s)-f_2(y,s)),$$

$$\inf_{(y,s)\in\Sigma}(h_1(y,s)-h_2(y,s)),0\Big\}\leq$$

$$\leq u_1(x,t)-u_2(x,t)\leq$$

$$\leq\max\Big\{\frac{1}{a_0^-}\sup_{(y,s)\in Q}(f_1(y,s)-f_2(y,s)),$$

$$\sup_{(y,s)\in\Sigma}(h_1(y,s)-h_2(y,s)),0\Big\},\ (x,t)\in Q. \quad (85)$$

Зауважимо, що з цієї теореми безпосередньо випливає неперервна залежність розв'язку задачі (82)–(84) від вихідних даних.

Наслідок 7. *Нехай виконуються умови теореми 5 і, крім того,* $f_1(x,t)\leq f_2(x,t)$ $\forall(x,t)\in Q$, $h_1(x,t)\leq h_2(x,t)$ $\forall(x,t)\in\Sigma$. *Тоді правильна нерівність* $u_1(x,t)\leq u_2(x,t)$ $\forall(x,t)\in Q$.

Наслідок 8. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_8)$–$(\mathcal{A}_{10})$. *Тоді задача* (82)–(84) *має не більше одного розв'язку.*

Наслідок 9. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_8)$–$(\mathcal{A}_{10})$. *Тоді, для розв'язку задачі* (82)–(84) *правильна оцінка*

$$\min\{\frac{1}{a_0^-}\inf_{(y,s)\in Q}f(y,s),\inf_{(y,s)\in\Sigma}h(y,s),0\}\leq u(x,t)\leq$$

$$\leq\max\{\frac{1}{a_0^-}\sup_{(y,s)\in Q}f(y,s),\sup_{(y,s)\in\Sigma}h(y,s),0\},\ (x,t)\in Q. \quad (86)$$

Згідно з означеннями пункту 1.1, під $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$ розумітимемо простір функцій $v\in C(Q)$ таких, що для строго внутрішньої підобласті Ω' області Ω (тобто, $\overline{\Omega'}\subset\Omega$) та будь-якого числа $t^*\in(-\infty,0)$ звуження v на $\overline{\Omega'}\times[t^*,0]$ належить простору $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega'}\times[t^*,0])$, а під $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ (відповідно, $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$) – простір функцій $v\in C(\overline{Q})$ (відповідно, $C(\Sigma)$) таких, що будь-якого числа $t^*\in(-\infty,0)$ звуження v на $\overline{\Omega}\times[t^*,0]$ (відповідно, $\partial\Omega\times[t^*,0]$) належить простору $C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}\times[t^*,0])$ (відповідно, $C^{\alpha,\alpha/2}(\partial\Omega\times[t^*,0])$).

Під $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$ розумітимемо простір функцій $v\in C^{2,1}(Q)$ таких, що їх похідні v_{x_k}, $v_{x_kx_l}$ $(k,l=\overline{1,n})$, v_t належать простору $C^{\alpha,\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(Q)$.

Через $C^{\alpha,\alpha/2,0}_{\mathrm{loc}}(\overline{Q}\times S)$ позначатимемо простір неперервних функцій $q(x,t,s)$, $(x,t,s)\in\overline{Q}\times S$, таких, що для будь-якого $t^*\in(-\infty,0)$ існує стала $L=L(q,t^*)>0$ така, що

$$\big|q(x,t,s)-q(\widetilde{x},\widetilde{t},s)\big|\leq L(|x-y|^\alpha+|t-s|^{\alpha/2})$$

для довільних (x,t,s), $(\widetilde{x},\widetilde{t},s)$ з $\overline{\Omega}\times[t^*,0]\times[t^*,0]$.

Через $C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}\times S\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ позначатимемо простір неперервних функцій $\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta)$, $(x,t,\xi,\eta)\in\overline{\Omega}\times S\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, кожна з яких є неперервно диференційовною за змінними ξ,η та для будь-яких чисел $t^*\in(-\infty,0)$, $q_1,q_2>0$ існують сталі $L_k=L_k(\widetilde{g},t^*,q_1,q_2)>0$ $(k=\overline{1,3})$ такі, що виконуються нерівності

$$\big|\widetilde{g}(x,t,\xi,\eta)-\widetilde{g}(\widetilde{x},\widetilde{t},\xi,\eta)\big|\leq L_1(|x-\widetilde{x}|^\alpha+|t-\widetilde{t}|^{\frac{\alpha}{2}}),$$

$$|\widetilde{g}_\xi(x,t,\xi,\eta)|\leq L_2,\qquad |\widetilde{g}_\eta(x,t,\xi,\eta)|\leq L_3$$

для довільних $(x,t,\xi,\eta),(y,s,\xi,\eta)$ з $\overline{\Omega}\times[t^*,0]\times[-q_1,q_1]\times[-q_2,q_2]$.

Позначимо через $C^{\alpha/2}_{\mathrm{loc}}(S)$ простір функцій $v(t)$, $t\in S$, таких, що будь-якого числа $t^*\in(-\infty,0)$ звуження v на $[t^*,0]$ належить простору $C^{\alpha/2}([t^*,0])$.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови* $(\mathcal{A}_1)$, $(\mathcal{A}_2)$, $(\mathcal{A}_8)$–$(\mathcal{A}_{10})$. *Припустимо, що для деякого* $\alpha\in(0,1]$ *виконується умова* $(\mathcal{B}_1)$ *та*

$(\mathcal{B}_5)$ a_{kl}, a_k, $a_0\in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\overline{Q})$ $(k,l=\overline{1,n})$,
$g\in C^{\alpha,\alpha/2,1,1}_{loc}(\overline{\Omega}\times S\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$,
$J\in C^{\alpha,\alpha/2,0}_{loc}(Q\times S)$, $\tau\in C^{\alpha/2}_{loc}(S)$,
$f\in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\overline{Q})$, $h\in C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\overline{\Sigma})$.

Крім того, нехай виконується умова $(\mathcal{B}_3)$. *Тоді існує (єдиний) розв'язок задачі* (82)–(84) *і він належить простору* $C^{\alpha,\alpha/2}_{loc}(\overline{Q})\cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}_{loc}(Q)$.

3.2 Доведення основних результатів. Нехай $\widehat{Q}:=\Omega\times(0,1]$, $\widetilde{Q}:=\overline{\Omega}\times(0,1]$.

Зробимо в задачі (82)–(84) заміну змінних:

$$t=\ln z,\quad z\in(0,1],\ t\in S. \tag{87}$$

Тоді $u(x,t):=\widetilde{u}(x,z)$, $(x,t)\in Q$, $(x,z)\in\widehat{Q}$, $u_t=\widetilde{u}_z z$, $u_{x_k}=\widetilde{u}_{x_k}$, $u_{x_kx_l}=\widetilde{u}_{x_kx_l}$ $(k,l=\overline{1,n})$,

$$J_\tau u(x,t):=\int_{t-\tau(t)}^{t}J(x,t,s)u(x,s)ds=$$

$$=\int\limits_{\ln z-\tau(\ln z)}^{\ln z}J(x,\ln z,s)u(x,s)ds=$$

$$=[s=\ln y,\ ds=y^{-1}dy]=$$

$$=\int_{z/e^{\tau(\ln z)}}^{z}J(x,\ln z,\ln y)y^{-1}\widetilde{u}(x,y)dy=$$

$$=\int_{z-\widetilde{\tau}(z)}^{z}\widetilde{J}(x,z,y)\widetilde{u}(x,y)dy=:\widetilde{J}_{\widetilde{\tau}}\widetilde{u}(x,z),$$

де $\widetilde{\tau}(z):=(1-e^{-\tau(\ln z)})z$ $\forall z\in(0,1]$, $\widetilde{J}(x,z,y):=J(x,\ln z,\ln y)y^{-1}$, $(x,z,y)\in\Omega\times(0,1]\times(0,1]$. Очевидно, що $\widetilde{\tau}$ є неперервною невід'ємною функцією на $(0,1]$ і $\int\limits_{z-\widetilde{\tau}(z)}^{z}\frac{ds}{s}=\ln s|_{z-\widetilde{\tau}(z)}^{z}=\ln\frac{z}{z-\widetilde{\tau}(z)}=\tau(\ln z)$, а отже, оскільки $\tau:S\to\mathbb{R}$ – обмежена, маємо

$$\sup_{z\in(0,1]}\int\limits_{z-\widetilde{\tau}(z)}^{z}\frac{dz}{z}<\infty. \tag{88}$$

Також маємо

$$\sup_{(x,z)\in\widetilde{Q}}\int\limits_{z-\widetilde{\tau}(z)}^{z}\widetilde{J}(x,z,y)dy=\sup_{(x,t)\in Q}\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}J(x,t,s)ds<\infty. \tag{89}$$

Отже, в результаті заміни змінних (87) ми прийдемо до задачі

$$\widetilde{p}(x,z)\widetilde{u}_z(x,z)-\sum_{k,l=1}^{n}\widetilde{a}_{kl}(x,z)\widetilde{u}_{x_kx_l}(x,z)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_k(x,z)\widetilde{u}_{x_k}(x,z)+\widetilde{a}_0(x,z)\widetilde{u}(x,z)-$$

$$-\widetilde{g}(x,z,\widetilde{u}(x,z),\widetilde{J}_{\widetilde{\tau}}\widetilde{u}(x,z))=\widetilde{f}(x,z),\ (x,z)\in\widehat{Q}, \tag{90}$$

$$\widetilde{u}(x,z)=\widetilde{h}(x,z),\quad (x,z)\in\widetilde{\Sigma}, \tag{91}$$

$$\overline{\lim_{z\to+0}}\,||\widetilde{u}(\cdot,z)||_{C(\overline{\Omega})}<\infty, \tag{92}$$

де $\widetilde{p}(x,z):=z$ $\forall(x,z)\in\widehat{Q}$, а $\widetilde{a}_{kl},\widetilde{a}_k,\widetilde{a}_0,\widetilde{g},\widetilde{f},\widetilde{h}$ – функції, отримані з функцій, відповідно, a_{kl},a_k,a_0,g,f,h при заміні змінних (87).

Легко переконатися, що задача (90)–(92) є аналогічна до задачі (36)–(38). Справді, якщо у формулюванні задачі (90)–(92) забрати символ "$\sim$" і поміняти z на t, то отримаємо точно задачу (36)–(38). Легко переконатися, враховуючи (88), (89), що вихідні дані задачі (90)–(92) задовольняють умови, які співпадають з умовами $(\mathcal{A}_1)$–$(\mathcal{A}_4)$, $(\mathcal{A}_7)$, $(\mathcal{A}_8)$ при відповідній заміні символів (зокрема, $\varphi(t)$ треба замінити на $1/z$). Звідси та результатів розділу 2 випливають всі наші твердження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

[1] *Агаев Г. Н.* О первой краевой задаче для линейных вырождающихся параболических уравнений // Изв. АН Азербайджанской ССР, Серия физ.-тех. и мат. наук. – 1976. – **2**. – С. 10–16.

[2] *Бокало М., Дмитрів В.* Задача Фур'є для різнокомпонентної еволюційної системи рівнянь із інтегральним запізненням // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2002. – **60**. – С. 32-49.

[3] *Бокало М.М., Ільницька О.В.* Крайова задача для нелінійних параболічних рівнянь із запізненням та виродженням в початковий момент // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, N9. – С. 1155-1168.

[4] *Бокало М., Ільницька О.* Мішані задачі для параболічних рівнянь зі змінним запізненням // Бук. мат. журн. – 2015. – **3**, N1. – С. 16-24.

[5] *Бугрій О.М.* Про задачі з однорідними граничними умовами для нелінійних рівнянь з виродженням // Укр. мат. вісник. – 2008. – **5**. – С. 435–469.

[6] *Дрінь С.С., Дрінь Я.М.* Задача Коші для рівняння фрактальної дифузії з відхиленням аргумента // Буковинський мат. журн. – 2015. – **3**, N2. – С. 23-26.

[7] *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию диференциальних уравнений с отклоняющимся аргументом – М.: Наука, 1971.— 296 с.

[8] *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа – М.: Наука, 1967. —736 с.

[9] *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом – М.: Наука, 1972. — 256 с.

[10] *Пукальський І. Д.* Нелокальна задача неймана для параболічного рівняння з виродженням // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, N9. – С. 1232-1243.

[11] *Слюсарчук В.Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем з післядією. – Р.: УДУВГ, 2003. — 288 с.

[12] *Фридман А.* Уравнения в частных производных параболического типа. – М.: Мир, 1968. — 428 с.

[13] *Akimenko V., Anguelov R.* Steady states and outbreaks of two-phase nonlinear age-structured model of population dynamics with discrete time delay// J. Biol. Dyn. – 2017. – **11**, N1. – P. 75-101, DOI: 10.1080/17513758.2016.1236988

[14] *Bainov D., Petrov V.* Asymptotic Properties of the Nonoscillatory Solutions of Second-Order Neutral Equations with a Deviating Argument // J. Appl. Math. Anal. Appl. – 1995. – **190**. — C. 645–653.

[15] *Bokalo M.* Dynamical problems without initial conditions for elliptic-parabolic equations in spatial unbounded domains/ M. Bokalo // Electron. J. Differ. Equ. – 2010. – **178**. – P. 1-24.

[16] *Bokalo M.* Linear evolution first-order problems without initial conditions / Bokalo M., Lorenzi A. // Milan J. Math. – 2009. – **77**. – P. 437-494.

[17] *Burger R., Evje S., Karlsenc K. H.* On Strongly Degenerate Convections Diffusion Problems Modeling Sedimentations Consolidation Processes // J. Appl. Math. Anal. Appl. – 2000. – **247**. – P. 517-556.

[18] *Burton T. A., Haddrock J. R.* On the Delay-Differential Equations $x'(t)+a(t)f(x(t-r(t)))=0$ and $x''(t)+a(t)f(x(t-r(t)))=0$ // J. Appl. Math. Anal. Appl. – 1976. – **54**. — P. 37-48.

[19] *Gui-Qiang G. Chen* On Degenerate Partial Differential Equations // Oxford Centre for Nonlinear PDE. – 2010. – **16**. – 38 c.

[20] *Dmytriv V.M.* On a Fourier problem for coupled evolution system of equations with time delays // Mat. Stud. – 2001. – **16**. — P. 141–156.

[21] *Dumrongpokaphan T., Lenbury Y., Ouncharoen R., Xu Y.* An Intracellular Delay-Differential Equation Model of the HIV Infection and Immune Control // Math. Model. Nat. Phenom. – 2007. – **2**. — P. 75–99.

[22] *Ivasishen S. D.* Parabolic boundary problems without initial conditions // Ukr. Mat. Zh. – 1982. – **34**, N5. – P. 547–552.

[23] *Feng W., Pao C. V., Lu X.* Global Attrators of Reaction-Diffusion Systems Modeling Food Chain Populations with Delays // Commun. Pure Appl. Anal. – 2011. – **10**. — P. 1463 - 1478.

[24] *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires – P.: Dunod Gauthier-Villars, 1969 — 554 p.

[25] *Oleinik O. A., Iosifjan G. A.* Analog of Saint-Venant's principle and uniqueness of solutions of the boundary problems in unbounded domain for parabolic equations// Usp. Mat. Nauk. – 1976. – **31**, N6. – P. 142-166.

[26] *Pao C.V.* Coupled nonlinear parabolic systems with time delays// J. Appl. Math. Anal. Appl. – 1995. – **196**. — P. 237-265.

[27] *Pao C.V.* Systems of Parabolic Equations with Continuous and Discrete Delays// J. Appl. Math. Anal. Appl. – 1997. – **205**. -– P. 157–185.

[28] *Tihonov A. N.* Uniqueness theorems for the heat equation // Matem. Sbornik. – 1935. – **2**. – P. 510-516.

[29] *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations // Amer. Math. Soc., Providence. –1997. – **49**. – 278 p.