УДК 517.95+511.2

©2017 р. І.Р. Тимків

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

ЗАДАЧА З БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В обмеженій циліндричній області досліджено задачу з локальними багатотоковими умовами за часовою змінною для параболічного рівняння з факторизованим оператором із залежними за часовою та просторовими змінними коефіцієнтами. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі. Доведено метричну теорему про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі.

In bounded cylindrical domains with local multipoint conditions on time variable for parabolic equation with factorized operator with coefficients depended on time and spatial variable are established. The conditions of existence and uniqueness of solution of the prolem are established. The metric theorem on evolution from belowof small denominators of the problem is proved.

1. Вступ. Задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною для рівнянь із частинними похідними активно досліджуються з другої половини XX-го століття. Інтерес до вивчення цих задач зумовлений потребами загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними та їхніми застосуваннями до потреб практики.

У роботах [1–4] розроблено методи дослідження двоточкових і багатоточкових задач для еволюційних рівнянь та систем рівнянь. У цих працях розглянуто переважно випадки коректно поставлених задач.

Проте багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними є, назагал, некоректними за Адамаром, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників.

У роботах [5–9] використано метричний підхід для дослідження умовно коректних задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для лінійних гіперболічних, параболічних та безтипних рівнянь. Доведено метричні твердження про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків розглядуваних задач, з яких випливає коректність задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів задачі.

У даній статті встановлено умови коректної розв'язності задачі з багатоточковими умовами за часовою змінною для параболічного рівняння з факторизованим оператором із коефіцієнтами залежними за часовою та просторовими змінними. Доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів багатоточкових умов та значень вузлів інтерполяції.

Надалі використовуватимемо такі позначення: Q — обмежена однозв'язна область в $\mathbb{R}^p$ з гладкою межею ∂Q; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in Q$; $D = (0,T) \times Q$; $\Sigma = [0,T] \times \partial Q$; δ_{jr} — символ Кронекера; $\mathrm{mes}_{\mathbf{P}} M$ — міра Лебега в просторі $\mathbf{P}$ множини $M \subset \mathbf{P}$; $U^n(\rho) = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} |z_j| \leq \rho\}$, $\rho > 0$; $L = -\sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + q(x)$, де $p_{ij}(x) = p_{ji}(x) > 0$, $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, $q(x) \geq 0$, $x \in Q$. Відзначимо, що задача

$$LX(x) = \lambda X(x), \quad X(x)\big|_{\partial Q} = 0$$

має повну ортонормовану в $L_2(\overline{Q})$ систему власних функцій $\{X_k(x), k \in \mathbb{N}\}$ і нескінченну множину додатних власних значень $\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, для яких виконуються [10] оцінки

$$C_1 k^{2/p} \leq \lambda_k \leq C_2 k^{2/p},\ 0 < C_1 < C_2,\ k \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Нехай $E_{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, — простір, одержаний поповненням простору скінченних сум $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$, за нормою

$\|\varphi; E_{\alpha,\beta}\| = \sqrt{\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} |\varphi_k|^2\lambda_k^{2\alpha}\exp(2\beta\lambda_k)}$, де $\varphi_k \in \mathbb{C}$; $C^n([0,T]; E_{\alpha,\beta})$, $n \in \mathbb{Z}_+$ — простір функцій $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(t)X_k(x)$, $u_k(t) \in C^n[0,T]$, таких, що для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $\partial^j u(t,x)/\partial t^j := \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k^{(j)}(t)X_k(x)$, $j \in \{0,1,\dots,n\}$, належать до простору $E_{\alpha,\beta}$ і є неперервними за t в нормі цього простору

$$\|u; C^n([0,T]; E_{\alpha,\beta})\| = \\ = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^j u(t,\cdot)}{\partial t^j}; E_{\alpha,\beta} \right\|.$$

2. Формулювання задачі. В області D розглянемо задачу

$$\prod_{q=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} + a_q(t)L\right) u(t,x) = f(t,x), \qquad (2)$$

$$\sum_{r=0}^{N_j} c_r^j(L) \frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}\bigg|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \qquad (3)$$

$0 \le N_j \le n-1, j \in \{1,\dots,n\}, 0 \le t_1 < \dots < t_n \le T$,

$$L^m u(t,x)\Big|_{\Sigma} = 0,\ m \in \{0,1,\dots,(\theta-1)\}, \quad (4)$$

де $a_q(t) \in C^{n-q}([0,T])$, $a_q(t) > 0$, $a_q(t) \neq a_j(t)$, $q \neq j$, $t \in [0,T]$, $q,j \in \{1,\dots,n\}$; $c_r^j(L) = \sum\limits_{i=0}^{M} c_{r,i}^j L^i$, $c_{r,i}^j \in \mathbb{C}$, $M \in \mathbb{N}$, $c_{0,M}^j \neq 0$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $\theta = \max\{n, M\}$. Оператори $(\partial/\partial t + a_q(t)L)$, $q \in \{1,\dots,n\}$, у рівнянні (2) діють на функцію u у порядку зростання індексу j.

Відзначимо, що умови (3) узагальнюють багатоточкові умови

$$\sum_{r=0}^{n-1} c_r \frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}\bigg|_{t=t_j} = \varphi_j(x), j \in \{1,\dots,n\}, \quad (5)$$

де $c_r \in \mathbb{C}$. Однозначна розв'язність задач з умовами (5) для гіперболічних та безтипних рівнянь встановлена для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів рівнянь, коефіцієнтів умов та вузлів інтерполяції $t_1,\dots,t_n$ (див. [5, 6]). Задачі з умовами вигляду (3) для систем параболічних рівнянь зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами досліджувались у роботі [9]. Для рівнянь зі змінними за часом коефіцієнтами у працях [5, 6] досліджено задачі з багатоточковими умовами

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad j \in \{1,\dots,n\}.$$

3. Побудова формального розв'язку. Розв'язок задачі (2) — (4) з простору $C^n([0,T]; E_{\alpha,\beta})$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x). \qquad (6)$$

Кожна функція $u_k(t), k \in \mathbb{N}$, є розв'язком задачі

$$\left(\frac{d}{dt} + a_n(t)\lambda_k\right)\cdots\left(\frac{d}{dt} + a_1(t)\lambda_k\right) u_k(t) = f_k(t), \qquad (7)$$

$$\sum_{r=0}^{N_j} c_r^j(\lambda_k) u_k^{(r)}(t_j) = \varphi_{j,k},\ j \in \{1,\dots,n\}, \quad (8)$$

де $f_k(t) = \int\limits_G f(t,x)X_k(x)dx$, $\varphi_{j,k} = \int\limits_G \varphi_j(x)X_k(x)dx, j \in \{1,\dots,n\}$.

Позначимо: $I_0(t) := 0$, $t > 0$,
$I_q(t) = -\int\limits_0^t a_q(\tau)d\tau$, $q \in \{1,\dots,n\}$,
$\Theta_{j,k}(t) = \exp((I_j(t) - I_{j-1}(t))\lambda_k)$,
$W_j\left(\frac{d}{dt},\lambda_k\right) = \left(\frac{d}{dt} + a_j(t)\lambda_k\right)\dots\left(\frac{d}{dt} + a_1(t)\lambda_k\right)$, $j \in \{1,\dots,n\}$.

Відомо [5, с.77], що функції
$u_{k,1}(t) = \Theta_{1,k}(t)$,
$u_{k,2}(t) = \Theta_{1,k}(t)\int\limits_0^t \Theta_{2,k}(\xi_1)d\xi_1$,
$u_{k,3}(t) = \Theta_{1,k}(t)\int\limits_0^t \left(\Theta_{2,k}(\xi_1)\int\limits_0^{\xi_1}\Theta_{3,k}(\xi_2)d\xi_2\right)d\xi_1$,

$$\dots, u_{k,n}(t) = \Theta_{1,k}(t)\int\limits_0^t \Theta_{2,k}(\xi_1)\times \qquad (9)$$

$$\times\dots\left(\int\limits_0^{\xi_{n-2}} \Theta_{n,k}(\xi_{n-1})d\xi_{n-1}\right)\dots d\xi_1,$$

утворюють на відрізку $[0,T]$ таку фундаментальну систему розв'язків рівняння (7), що $u_{k,q}^{(j-1)}(0) = \delta_{j,q}$, $j \in \{1,\dots,q\}$, причому для довільного j, $j \in \{2,\ldots,n\}$, виконуються рівності

$$W_{j-1}\left(\frac{d}{dt},\lambda_k\right)u_{kq}(t)=$$

$$=\delta_{j,q}\exp\left(-\int_0^t a_j(\tau)d\tau\lambda_k\right), \qquad (10)$$

де $t\in[0,T], q\in\{1,\ldots,j\}$.

Характеристичний визначник задачі (7), (8) зображується формулою

$$\Delta(k,\vec{t})=\det\left\|\sum_{r=0}^{N_j} c_r^j(\lambda_k)u_{k,q}^{(r)}(t_j)\right\|_{j,q=1}^{n}, \qquad (11)$$

де $\vec{t}=(t_1,\ldots,t_n)$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (2) — (4) *у шкалі просторів* $C^n([0,T];E_{\alpha,\beta})$, *де* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \Delta(k,\vec{t})\neq 0. \qquad (12)$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 5.3 із [5, с. 82].

Для кожного $k\in\mathbb{N}$ розв'язок задачі (7), (8) зображується формулою

$$u_k(t)=H_k(t)+\sum_{q=1}^{n}C_q(k)u_{k,q}(t), \qquad (13)$$

де

$$H_k(t)=\Theta_{1,k}(t)\int_0^t\Theta_{2,k}(\xi_1)\times$$

$$\times\left(\int_0^{\xi_1}\Theta_{3,k}(\xi_2)\times\ldots\times\int_0^{\xi_{n-2}}\Theta_{n,k}(\xi_{n-1})\times \qquad (14)\right.$$

$$\left.\left(\int_0^{\xi_{n-1}} f_k(\xi_n)\exp\{-I_n(\xi_n)\lambda_k\}d\xi_n\right)d\xi_{n-1}\ldots d\xi_2\right)d\xi_1,$$

функції $u_{k,q}(t)$ визначені формулами (9), а коефіцієнти $C_q(k)$, $q\in\{1,\ldots,n\}$, визначаються із системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n}C_q(k)\sum_{r=0}^{N_j}c_r^j(\lambda_k)u_{k,q}^{(r)}(t_j)=$$

$$=\varphi_{j,k}-\sum_{r=0}^{N_j}c_r^j(\lambda_k)H_k^{(r)}(t_j),\ j\in\{1,\ldots,n\}, \qquad (15)$$

визначник якої збігається з визначником $\Delta(k,\vec{t})$. Розв'язуючи систему (15) за правилом Крамера, одержуємо

$$C_q(k)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\Delta_{j,q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}\times$$

$$\times\left(\varphi_{j,k}-\sum_{r=0}^{N_j}c_r^j(\lambda_k)H_k^{(r)}(t_j)\right),\ q\in\{1,\ldots,n\},$$

де $\Delta_{j,q}(k,\vec{t})$, $j,q\in\{1,\ldots,n\}$, — алгебричне доповнення елемента $\sum\limits_{r=0}^{N_j}c_r^j(\lambda_k)u_{k,q}^{(r)}(t_j)$ у визначнику $\Delta(k,\vec{t})$. Підставляючи знайдені значення для $C_q(k)$, $q\in\{1,\ldots,n\}$, у формулу (13) отримаємо формальне зображення розв'язку задачі (2) — (4) у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(H_k(t)+\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{j,q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}\varphi_{j,k}\,u_{k,q}(t)-\right.$$

$$\left.-\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{j,q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}\sum_{r=0}^{N_j}c_r^j(\lambda_k)H_k^{(r)}(t_j)u_{k,q}(t)\right)X_k(x). \qquad (16)$$

Збіжність ряду (16) у просторі $C^n([0,T];E_{\alpha,\beta})$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки величина $|\Delta(k,\vec{t})|$ будучи відмінною від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості чисел $k\in\mathbb{N}$.

Позначимо:
$A_1=\max\limits_{1\leq j\leq n-1}\left\{\max\limits_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t(a_j(\tau)-a_{j+1}(\tau))d\tau\right\}$,
$A_2=\max\limits_{t\in[0,T]}\int\limits_0^t a_n(\tau)d\tau$, $d=N_1+\ldots+N_n-\max\limits_{j\in\{1,\ldots,n\}}N_j+nM$.

Теорема 2. *Нехай існують сталі* $\omega,\nu\in\mathbb{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k\in\mathbb{N}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k,\vec{t})|>\lambda_k^{-\omega}\exp(-\nu\lambda_k). \qquad (17)$$

Якщо $f\in C([0,T];E_{\alpha_1,\beta_1})$, $\varphi_j\in E_{\alpha_1,\beta_2}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_1=\alpha+\omega+d+n$, $\beta_1=$

$\beta+\nu+n(n-1)A_1/2$, $\beta_2=\beta_1+(n-1)A_1+A_2$, *то існує єдиний розв'язок задачі (2) — (4) з простору* $C^n\left([0,T];E_{\alpha,\beta}\right)$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* f *та* φ_j, $j\in\{1,\dots,n\}$.

Доведення. Із формул (9), (14) встановлюємо, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left|u_{k,q}^{(r)}(t)\right|\le C_3\lambda_k^r\exp((q-1)A_1\lambda_k),\quad(18)$$

$$\max_{t\in[0,T]}\left|H_k^{(r)}(t)\right|\le C_4\widetilde{f}_k\lambda_k^r\exp(((n-1)A_1+A_2)\lambda_k),\quad(19)$$

де $q,r\in\{1,\dots,n\}$, $\widetilde{f}_k=\max_{t\in[0,T]}|f_k(t)|$. Із формул (11) на підставі оцінок (18) отримуємо

$$\left|\Delta_{j,q}(k,\vec{t})\right|\le C_5\lambda_k^d\exp((n(n-1)/2-q+1)A_1\lambda_k),\quad(20)$$

де $j,q\in\{1,\dots,n\}$. Враховуючи нерівності (19) встановлюємо, що

$$\left|\sum_{r=0}^{N_j}c_r^j(\lambda_k)H_k^{(r)}(t_j)\right|\le C_6\widetilde{f}_k\lambda_k^{N_j+M}\times$$

$$\times\exp(((n-1)A_1+A_2)\lambda_k),j\in\{1,\dots,n\}.\quad(21)$$

Із формули (16) на підставі оцінок (17) – (21) знаходимо

$$\|u;C^n\left([0,T];E_{\alpha,\beta}\right)\|\le$$

$$\le C_7\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{f}_k^{\,2}\lambda_k^{2\alpha_1}\exp(2\beta_1\lambda_k)+}$$

$$+C_8\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_{j,k}|^2\lambda_k^{2\alpha_1}\exp(2\beta_2\lambda_k)}\le$$

$$C_9\left(\|f;C\left([0,T];E_{\alpha_1,\beta_1}\right)\|+\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j;E_{\alpha_1,\beta_2}\|\right).$$

Отже, норма функції u є скінченною і неперервно залежить від f, та φ_j, $j\in\{1,\dots,n\}$.

4. Оцінки визначника $\Delta(k,\vec{t})$. Для того, щоб з'ясувати питання про можливість виконання нерівності (17) наведемо деякі допоміжні твердження.

Лема 1.([8]) *Нехай* $q_1,\dots,q_n$ *— деякі натуральні числа, а* $F(z_1,\dots,z_n)$ *— такий многочлен змінних* $z_1,\dots,z_n$, *що його похідні*

$$\frac{\partial^{q_{j+1}+\ldots+q_n}F}{\partial z_{j+1}^{q_{j+1}}\ldots\partial z_n^{q_n}}=P_j,\quad j\in\{1\dots,n-1\},$$

є многочленами змінних $z_1,\dots,z_j$, *причому* $P_1=P_1(z_1)$ *має степінь* q_1. *Якщо для всіх* $\vec{z}\in U^n(\rho)$, $\rho>0$, *виконується нерівність*

$$\left|\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}F}{\partial z_1^{q_1}\ldots\partial z_n^{q_n}}\right|\ge\delta>0,$$

то

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^n}\{\vec{z}\in U^n(\rho):|F(z_1,\dots,z_n)|\le\varepsilon\}\le$$
$$\le C_{10}(\varepsilon/\delta)^{2/(q_1+\ldots+q_n)}.$$

Лема 2. ([7]) *Нехай функція* $y(t)$ *є* n *раз неперервно диференційовною на відрізку* $[a,b]$ *і нехай для всіх* $t\in[a,b]$ *виконується нерівність*

$$\left|\left(\frac{d}{dt}-v_1(t)\right)\ldots\left(\frac{d}{dt}-v_n(t)\right)y(t)\right|\ge\delta>0,$$

де $v_j\in C^{n-j}([a,b])$, $j\in\{1,\dots n\}$. *Тоді для довільного* $\varepsilon>0$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\{t\in(a,b):|y(t)|\le\varepsilon\}\le$$
$$\le C_{11}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}e^{(\mu_1+\ldots+\mu_n)(b-a)}},$$

$C_{11}=n2^{(n+1)/2}$, $\mu_j=\max_{t\in[0,T]}|v_j(t)|$, $j\in\{1,\dots,n\}$.

Позначимо: $\vec{z}=(z_1,\dots,z_n):=(c_{0,M}^1,\dots,c_{0,M}^n)$, $A_3=\max_{j\in\{1,\dots,n\}}\max_{t\in[0,T]}\{a_j(t)\}$.

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^n$*) векторів* $\vec{z}\in U^n(\rho)$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t}\in[0,T]^n$ *нерівність (17) виконується при* $\omega>n^2p/4-nM$, $\nu=n(n+1)A_3T/2$.

Доведення. Користуючись лемою 1 оцінемо зверху Лебегові міри множин $Z_\rho(k)=\{\vec{z}\in U^n(\rho):|\Delta(k,\vec{t})|\le h(k)\}$, де $\rho>0$, $h(k)=\lambda_k^{-n^2p/4-\varepsilon_1+nM}\exp(-n(n+1)A_3T/2\lambda_k)$, $\varepsilon_1>0$, $k\in\mathbb{N}$. Для цього продиференціюємо визначник $\Delta(k,\vec{t})$ за змінними $z_1,\dots$, z_n отримуємо

$$\frac{\partial^n\Delta(k,\vec{t})}{\partial z_1\ldots\partial z_n}=\lambda_k^{nM}\Upsilon(k,\vec{t}),\quad(22)$$

де

$$\Upsilon(k,\vec{t}) = \det \|u_{k,q}(t_j)\|_{j,q\in\{1,\ldots,n\}}\,.$$

Доведемо спочатку що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t}\in[0,T]^n$ нерівність

$$|\Upsilon(k,\vec{t})| \geq \lambda_k^{-\omega_0}\exp(-n(n+1)T/2\lambda_k), \quad (23)$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k\in\mathbb{N}$ при $\omega_0 > n(n-1)p/4$. Надалі запровадимо позначення: $\Upsilon_j(k,t_1,\ldots,t_j)$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, — визначник, який отримується з $\Upsilon(k,\vec{t})$ викреслюванням останніх $(n-j)$ рядків та останніх $(n-j)$ стовпців, $\Upsilon_{j,l}(k,t_1,\ldots,t_{j-1})$ — алгебричне доповнення елемента $u_{k,l}(t_j)$, $l\in\{1,\ldots,j\}$ у визначнику $\Upsilon_j(k,t_1,\ldots,t_j)$. Розкладемо визначник $\Upsilon_j(k,t_1,\ldots,t_j)$ за елементами останнього рядка, отримаємо

$$\Upsilon_j(k,t_1,\ldots,t_j) = \sum_{l=1}^{j} u_{k,l}(t_j)\times$$

$$\times\Upsilon_{j,l}(k,t_1,\ldots,t_{j-1}),\ j\in\{2,\ldots,n\}. \quad (24)$$

Із формул (10), (24) випливають рівності

$$W_{j-1}\left(\frac{d}{dt},\lambda_k\right)\Upsilon_j(k,t_1,\ldots,t_j)=\exp(I_j(t_j)\lambda_k)\times$$

$$\times\Upsilon_{j-1}(k,t_1,\ldots,t_{j-1}),\ j\in\{2,\ldots,n\}. \quad (25)$$

Для кожного $k\in\mathbb{N}$ розглянемо такі множини

$$B(k) = \{\vec{t}\in[0,T] : |\Upsilon(k,\vec{t})| < \nu_n(k)\},$$

$$B_j(k)=\{\vec{t}\in[0,T] : |\Upsilon_j(k,t_1,\ldots,t_j)| < \nu_j(k),$$

$$|\Upsilon_{j-1}(k,t_1,\ldots,t_{j-1})| \geq \nu_j(k)\}, j\in\{2,\ldots,n\},$$

де

$$\nu_j(k)=\lambda_k^{-j(j-1)p/4-j\varepsilon_2/n}\exp(-j(j+1)A_3T/2\lambda_k),$$

де $j\in\{2,\ldots,n\}$, $0<\varepsilon_2<\varepsilon_1$. Якщо $\vec{t}\in B_j(k)$, $j\in\{2,\ldots,n\}$, то з рівностей (25) випливає, що

$$\left|W_{j-1}\left(\frac{d}{dt},\lambda_k\right)\Upsilon_j(k,t_1,\ldots,t_j)\right| \geq$$

$$\geq \exp(-A_3T\lambda_k)\nu_{j-1}(k),\ j\in\{2,\ldots,n\}. \quad (26)$$

На підставі леми 2 та нерівностей (26) отримуємо, що

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} B_j(k;\vec{\tau}_j) \leq C_{12}\sqrt[j-1]{\frac{\exp(jA_3T\lambda_k)\nu_j(k)}{\nu_{j-1}(k)}} \leq$$

$$\leq C_{12}\lambda_k^{-p/2-\varepsilon_3},\ j\in\{2,\ldots,n\}, \quad (27)$$

де $B_j(k;\vec{\tau}_j) = \{t_j\in[0,T] : \vec{t}\in B_j(k)\}$, $\vec{\tau}_j = (t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n)$, $j\in\{2,\ldots,n\}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_2/n^2$. Інтегруючи оцінки (27) за змінними $t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n$ у кубі $[0,T]^{n-1}$, та враховуючи нерівності (1) отримаємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B_j(k) \leq C_{12}T^{n-1}\lambda_k^{-\frac{p}{2}-\varepsilon_3} \leq$$

$$\leq C_{13}k^{-1-\frac{2\varepsilon_3}{p}},\ j\in\{2,\ldots,n\}. \quad (28)$$

Оскільки $B(k)\subset\bigcup\limits_{j=2}^{n} B_j(k)$, то на підставі оцінок (28) одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B(k) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{n}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B_j(k) \leq$$

$$\leq C_{14}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1-\frac{2\varepsilon_3}{p}}. \quad (29)$$

Зі збіжності ряду (29) та леми Бореля-Кантетті [11] випливає нерівність (23). Із формули (22) на підставі оцінки (23) отримуємо, що для довільного вектора $\vec{z}\in U^n(\rho)$, $\rho>0$ і для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t}\in[0,T]^n$ нерівність

$$\left|\frac{\partial^n\Delta(k,\vec{t})}{\partial z_1\ldots\partial z_n}\right| \geq \lambda_k^{-n(n-1)p/4-\varepsilon_2+nM}\times$$

$$\times\exp(-n(n+1)A_3T/2\lambda_k) \quad (30)$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k\in\mathbb{N}$. Із твердження леми 1 на підставі нерівності (30) отримуємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{C}^n} Z_\rho(k) \leq$$

$$\leq C_{15}\left(\frac{h(k)\exp(n(n+1)A_3T/2\lambda_k)}{\lambda_k^{-n(n-1)p/4-\varepsilon_2+nM}}\right)^{2/n} \leq$$

$$\leq C_{15}\lambda_k^{-p/2-2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)/n}. \quad (31)$$

Із оцінок (1), (31) випливає, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{mes}_{\mathbb{C}^n} Z_\rho(k)$ є збіжним. Звідси, за лемою Бореля-Кантеллі, міра Лебега в $\mathbb{C}^n$ множини тих векторів $\vec{z}$, які належать до нескінченної кількості множин $Z_\rho(k)$, дорівнює нулеві. Множину $Z(k) = \{\vec{z} \in \mathbb{C}^n : |\Delta(k,\vec{t})| \leq h(k)\}$, $k \in \mathbb{N}$, можна зобразити як злічене об'єднання множин $Z_\rho(k)$, а, отже, й міра Лебега в $\mathbb{C}^n$ множини тих векторів $\vec{z}$, які належать до нескінченної кількості множин $Z(k)$, дорівнює нулеві. Теорему доведено.

Із теорем 2, 3 випливає таке твердження про однозначну розв'язність задачі (2) — (4) для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів складених з її параметрів.

Теорема 4. *Якщо* $f \in C([0,T]; E_{\alpha_1,\beta_1})$, $\varphi_j \in E_{\alpha_1,\beta_2}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, *де* $\alpha_1 = \alpha + n^2p/4 + d + n - nM$, $\beta_1 = \beta + n(n-1)A_1/2 + n(n+1)A_3T/2$, $\beta_2 = \beta_1 + (n-1)A_1 + A_2 + n(n+1)A_3T/2$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^n$*) векторів* $\vec{z} \in U^n(\rho)$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t} \in [0,T]^n$ *існує єдиний розв'язок задачі* (2) — (4) *з простору* $C^n([0,T]; E_{\alpha,\beta})$. *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* f *та* φ_j, $j \in \{1,\dots,n\}$.

Зауваження. Характерною особливістю, яка проявляється при дослідженні задачі з багатоточковими умовами (3) для параболічного рівняння (2), стала поява визначника $\Delta(k,\vec{t})$ (див. формулу (11)). Визначник $\Delta(k,\vec{t})$ має складну нелінійну структуру, в науковій літературі метричні оцінки знизу для нього не були встановлені.

Отримані результати доповнюють дослідження, проведені в [5, 6].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Asanova A.T.* On a solvability of a family of multi-point boundary value problems for system of differential equations and their application to the nonlocal boundary value problems // Mathematical journal, Almaty. – 2013. – **13**, N 3. – P. 58–73.

2. *Городецький В.В., Мартинюк О.В., Петришин Р.І.* Коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу еволюційних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, №3. – С. 339–353.

3. *Каленюк П.И., Баранецький Я.Е., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. — К.: Наук. думка, 1993. — 232 с.

4. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. — К. Інститут математики НАН України. — 1999. — 176 с.

5. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. — К.: Наук. думка, 1984. — 264 с.

6. *Пташник Б. Й.* Багатоточкові задачі для еволюційних рівнянь // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2011. – Т. 1, № 1-2. – С. 145–157.

7. *Симотюк М.М.* Багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — **46**, № 2. — С. 26–41.

8. *Симотюк М.М.* Багатоточкова задача для лінійних систем рівнянь з частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, №4. – С. 107–118.

9. *Симотюк М.М., Тимків І.Р.* Задача з багатоточковими умовами для системи параболічних рівнянь високого порядку зі змінними коефіцієнтами // Прикарпатський вісник НТШ. Сер. Число. – 2015, №1 (29). – С. 45–59.

10. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976. — 391 с.

11. *Спринжук В.Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. — М.: Наука, 1977. — 143 с.