УДК 517.5

©2017 р. І. Р. Ковальчук

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

# ПРО НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ КЛАСУ $H_\omega$ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ З ПАРНОЮ КІЛЬКІСТЮ ВУЗЛІВ НА ПЕРІОДІ

Отримано асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень тригонометричних поліномів $\tilde{S}_n^*(f,x)$, які інтерполюють функцію в $2n$ точках на періоді, на класах $H_\omega$.

We obtained asymptotic equalities for the upper bounds of deviations of trigonometric polynomials $\tilde{S}_n^*(f,x)$, that interpolate the function in $2n$ points on a period, on the classes $H_\omega$.

В даній роботі розглядатимемо тригонометричні інтерполяційні поліноми $n$-го порядку

$$\tilde{S}_n^*(f,x) = n^{-1}\cdot\sum_{k=-n}^{n-1} f\big(x_k^{(n)}\big)\cdot D_n^*\big(x-x_k^{(n)}\big),$$

які співпадають з функцією $f(x)\in C_{2\pi}$ у вузлах $x_k^{(n)} = kh$, $h=\frac{\pi}{n}$, $k=0,\pm1,..$, де

$$D_n^*(t) = D_n(t) - \frac{\cos \mathrm{nt}}{2} = \big(\sin nt\cdot \mathrm{ctg}\frac{t}{2}\big)/2$$

– модифіковане ядро Діріхле порядку $n$.

Цікавим є вивчення асимптотичної поведінки величини

$$\varepsilon_n^*(H_\omega,x) = \sup_{f\in H_\omega}|f(x)-\tilde{S}_n^*(f,x)|$$

при $n\to\infty$, де $H_\omega$ – клас функцій $f(\cdot)\in C_{2\pi}$, що задовольняють умову $|f(x')-f(x'')|\le\omega(|x'-x''|)$ (див. [1,с.119]). Для класів $W_\beta^2$ ця задача була розв'язана в [2]. Аналогічні оцінки для поліномів $\tilde{S}_n^*(f)$ з ядром $D_n(t)$ були отримані С. М. Нікольським в [3] і уточнені М. П. Корнійчуком в [4].

**Теорема.** *Має місце рівність*

$$\varepsilon_n^*(H_\omega,x) = \frac{|\sin nx|\cdot\ln n}{\pi}\cdot\omega(n^{-1}) + C(\omega,u)\frac{\omega(\pi/u)}{\pi} + O(n^{-1}\cdot\omega(n^{-1})) \quad (1)$$

*при $n\to\infty$, де*

$$C(\omega;u) = |\sin\pi u|\Big(\frac{\omega(1-u)}{u}+\frac{\omega(u)}{u} + \int_0^1 \frac{t^u}{1+t}\,dt\Big) \quad (2)$$

*і* $u=x/h$.

**Доведення.** Оскільки величина $\varepsilon_n^*$ лінійна і $\pi/n$-періодична, маємо $\varepsilon_n^*(H_\omega,x) = \varepsilon_n^*(H_\omega^x,x)$, де $H_\omega^x$ – клас функцій $f\in H_\omega$, таких що $f(x)=0$. І тому наша задача звелася до оцінки величини

$$\varepsilon_n^*(H_\omega^x,x) = \sup_{f\in H_\omega^x} n^{-1}\Big|\sum_{k=-n}^{n-1} f(x_k^{(n)})\cdot D_n^*(x-x_k^{(n)})\Big|$$

при $x\in[o,h]$.

Покладемо

$$\sigma_k = \sum_{i=k}^{n-1} D_n^*(x-x_i^{(n)}), k=\overline{1,n-1},$$

$$\sigma_k = \sum_{i=-n}^{-k} D_n^*(x-x_i^{(n)}), k=\overline{0,n}.$$

При цьому

$$\mathrm{sign}\sigma_k = \begin{cases}(-1)^{k+1}, k=\overline{1,n-1},\\ (-1)^k, k=\overline{0,n}.\end{cases} \quad (3)$$

Використавши перетворення Абеля і враховуючи (3), для будь-якої $f\in H_\omega^x$ маємо

$$\sum_{k=-n}^{n-1} f(x_k^{(n)})\cdot D_n^*(x-x_k^{(n)}) = f(x_0^{(n)})\cdot D_n^*(x) +$$

$$+f(x_1^{(n)})\cdot(\sigma_1+\sigma_{-1}) + (f(x_{-1}^{(n)})-f(x_1^{(n)}))\sigma_{-1} +$$

$$+\sum_{k=2}^{n-1}(f(x_k^{(n)})-f(x_{k-1}^{(n)}))\cdot\sigma_k+$$

$$+\sum_{k=-n}^{-2}(f(x_k^{(n)})-f(x_{k+1}^{(n)}))\cdot\sigma_k.$$

Тоді

$$\varepsilon_n^*(H_\omega^x,x)\le n^{-1}\Bigg(\omega(x)\cdot D_n^*(x)+$$

$$+\omega(h-x)\sigma_1+(\omega(h-x)-\omega(2h))\sigma_{-1}+$$

$$+\omega(h)\cdot\Bigg\{\sum_{k=-n}^{-2}|\sigma_k|+\sum_{k=2}^{n-1}|\sigma_k|\Bigg\}\Bigg).$$

Позначивши $\rho=\omega(2h)-\omega(h-x)$ отримаємо

$$\varepsilon_n^*(H_\omega^x,x)\le n^{-1}\Bigg(\omega(x)\cdot D_n^*(x)-\rho\sigma_{-1}+$$

$$+\omega(h-x)\sigma_1+\omega(h)\Bigg\{\sum_{k=-n}^{-2}|\sigma_k|+\sum_{k=2}^{n-1}|\sigma_k|\Bigg\}\Bigg). \tag{4}$$

Для оцінки знизу побудуємо функцію, яка перетворює знак нерівності в (4) в знак рівності. А саме нехай $F(t)$ – неперервна, $2\pi$-періодична функція, задана на періоді наступним чином: $F(x)=0$,

$$F(x_k^{(n)})=$$

$$=\begin{cases}\omega(x),k=0,\\ -\rho,k=-(2i-1),(i=1,2,...,[\frac{n+1}{2}]);\\ -\rho+\omega(h),k=-2i,(i=1,2,...,[\frac{n}{2}]);\\ \omega(h-x),k=2i-1,(i=1,2,...,[\frac{n-1}{2}]);\\ \omega(h-x)-\omega(h),k=2i,(i=1,2,...,[\frac{n-1}{2}]).\end{cases}$$

На кожному відрізку $(x_k^{(n)},x_{k+1}^{(n)})$,

$$k=\overline{-n,n-2},(x_0^{(n)},x),(x,x_1^{(n)}),(x_{n-1}^{(n)},x_n^{(n)})$$

будемо вважати $F(t)$ лінійною. Легко переконатися, що $F(t)\in H_\omega^x$. Відмітимо також, що

$$F(x_k^{(n)})-F(x_{k+1}^{(n)})=(-1)^k\cdot\omega(h),k=\overline{-n,-2}$$

$$F(x_k^{(n)})-F(x_{k-1}^{(n)})=(-1)^{k+1}\cdot\omega(h),k=\overline{2,n-1}.$$

Враховуючи (2) знайдемо

$$\sum_{k=-n}^{n-1}f(x_k^{(n)})\cdot D_n^*(x-x_k^{(n)})=$$

$$=\omega(x)\cdot D_n^*(x)-\rho\sigma_{-1}+\omega(h-x)\sigma_1+$$

$$+\omega(h)\Bigg\{\sum_{k=2}^{n-1}|\sigma_k|+\sum_{k=-n}^{-2}|\sigma_k|\Bigg\}+O(\omega(n^{-1})).$$

Тому отримаємо

$$\varepsilon_n^*(H_\omega^x,x)=n^{-1}\cdot\sum_{k=-n}^{n-1}F(x_k^{(n)})\cdot D_n^*(x-x_k^{(n)})+$$

$$+O(n^{-1}\cdot\omega(n^{-1})).$$

Оскільки

$$\sum_{k=2}^{n-1}|\sigma_k|+\sum_{k=-n}^{-2}|\sigma_k|=\sum_{k=-n}^{n-1}D_n^*(x-x_k^{(n)})+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n-1}|D_n^*(x-x_k^{(n)})|-\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n-1}D_n^*(x-x_k^{(n)}),$$

то за допомогою нескладних перетворень перейдемо до рівності

$$\varepsilon_n^*(H_\omega^x,x)=n^{-1}(\omega(h-x)+\omega(x))D_n^*(x)+$$

$$+\frac{\omega(h)}{2n}\sum_{k=-n}^{n-1}|D_n^*(x-x_k)|-$$

$$-n^{-1}(2\omega(h-x)-\omega(h))\sum_{k=-n}^{n-1}D_n^*(x-x_k)+$$

$$+\frac{\omega(2h)}{n}\sum_{k=-n}^{-1}D_n^*(x-x_k). \tag{5}$$

Оскільки при $t\in[-\pi,\pi]$

$$\sin nt\cdot\operatorname{ctg}(t/2)-(\sin nt)/t=O(1)$$

і $x_k^{(n)}=x_{-k}^{(n)}$, то

$$n^{-1}\sum_{k=-n}^{-1}D_n^*(x-x_k^{(n)})=$$

$$=n^{-1}\sum_{k=-n}^{-1}\frac{(-1)^k\cdot\sin nx}{x-x_k^{(n)}}+O(n^{-1})=$$

$$= -(2\pi)^{-1} \cdot \sin nx \cdot \int\limits_0^1 t^{x/h}(1+t)^{-1}\,dt + O(n^{-1}) \tag{6}$$

(при отриманні (6) ми враховували, що $(k+z)^{-1} = \int\limits_0^1 t^{k+z-1}\,dt$).

Такими ж міркуваннями отримаємо

$$n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} |D_n^*(x - x_k^{(n)})| =$$

$$= 2\pi^{-1} \cdot \ln n \cdot |\sin nx| + O(n^{-1}), \tag{7}$$

$$n^{-1} \sum_{k=-n}^{n-1} D_n^*(x - x_k^{(n)}) =$$

$$= O(n^{-1}) - \pi^{-1} \cdot \sin nx \int\limits_0^1 \frac{t^{x/h}}{1+t}\,dt, \tag{8}$$

$$n^{-1} D_n^* = (nx)^{-1} \cdot \sin nx + O(n^{-1}). \tag{9}$$

Враховуючи оцінки (6)–(9) при $0 \le x \le h$, матимемо, що

$$\varepsilon_n^*(H_\omega^x, x) = \pi^{-1} \cdot \omega(h) \cdot \ln n \cdot |\sin nx| +$$

$$+ \sin nx \frac{\omega(h-x) + \omega(h)}{nx} + \sin nx \cdot \frac{\omega(2h)}{\pi} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 t^{x/h} \cdot (1+t)^{-1}\,dt + O(n^{-1} \cdot \omega(n^{-1})).$$

Враховуючі, далі, що $h = \frac{\pi}{n}$ і позначивши $u = \frac{x}{h}$, отримаємо

$$\varepsilon_n^*(H_\omega, x) = \ln n |\sin nx| \omega(n^{-1}) +$$

$$+ \frac{\omega(\pi/n)}{\pi} \cdot C(\omega, u) + O\Big(\frac{\omega(n^{-1})}{n}\Big),$$

де $C(\omega; u)$ задано співвідношенням (2). Теорема доведена.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1.Степанец А.И. Методы теории приближения. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.

2. Кушпель А. К. Об одном методе приближения периодических функций // Укр. матем. журн. – 1984. – 36, №6. С.774 –776.

3. Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Труды математического ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР – 1945. – 15. – С.1–75.

4. Корнейчук Н. П. Об асимптотической оценке при приближении периодических функций, удовлетворяющих условий Липшица, интерполяционными многочленами с равноотстоящими узлами // Укр. матем. журн. – 1961. – 13, №1. С.100 –106.