УДК 517.584

©2017 р. О.В. Шавала

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

ПРО ПОВНОТУ СИСТЕМ ФУНКЦІЙ, ПОРОДЖЕНИХ ФУНКЦІЄЮ БЕССЕЛЯ

Ми досліджуємо повноту систем функцій, породжених функцією Бесселя з від'ємним півцілим індексом, меншим за -1.

We investigate completeness of systems of functions generated by Bessel function with negative half integer order less than -1.

Нехай $p \in (0;+\infty)$ і $L_2((0;1);x^p dx)$ – простір вимірних функцій f, для яких $\int_0^1 t^p|f(t)|^2dt < +\infty$, зі скалярним добутком $\langle f_1; f_2\rangle = \int_0^1 t^p f_1(t)\overline{f_2(t)}dt$, нормою $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 t^p|f(t)|^2dt}$ і $[x]$ – ціла частина числа x. Добре відомо ([1, с.71]), що при $\nu > 1$ функція Бесселя $J_{-\nu}(z)$ порядку $-\nu$ має нескінченну кількість дійсних нулів і $2[\nu]$ попарно спряжених комплексних нулів. Якщо $[\nu]$ – непарне ціле число, то серед комплексних нулів є два чисто уявних (див. також [2], [3, с.532]). Нехай $\rho_j = \rho_{-\nu,j}$, $j \in \mathbb{N}$, – ті нулі функції $J_{-\nu}(z)$, для яких $\Im\rho_j > 0$, якщо ρ_j – комплексне число і $\rho_j > 0$, якщо ρ_j – дійсне число.

У цій роботі ми продовжуємо дослідження, розпочаті в працях [4–6]. Зокрема, було доведено

Теорема A([4, с.39-40]). *Система функцій* $\{\rho_j\sqrt{\rho_j x}J_{-3/2}(\rho_j x) : j \in \mathbb{N}\backslash\{1\}\}$, $\rho_j := \sqrt{\lambda}_j$, *є повною в просторі* $L_2((0;1), x^2dx)$, *має в цьому просторі біортогональну систему* $\{\gamma_k : k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}\}$,

$$\bar\gamma_k(x) := \frac{\pi}{x^2\rho_k^2\cos^2\rho_k}\times$$

$$\times(\rho_k\sqrt{\rho_k x}J_{-3/2}(\rho_k x) - \rho_1\sqrt{\rho_1 x}J_{-3/2}(\rho_1 x)),$$

і не є базисом цього простору.

Теорема B([5, с.181]). *Система* $\{\sqrt{x}J_{-5/2}(\rho_j x) : j \in \mathbb{N}\backslash\{1;2\}\}$ *є повною, мінімальною в просторі* $L_2((0;1);x^4dx)$, *має в цьому просторі біортогональну систему* $\{\gamma_k(x) : k \in \mathbb{N}\backslash\{1;2\}\}$. *При цьому*

$$\overline{\gamma_k}(x) := \frac{2\sqrt{x}}{(\rho_1^2-\rho_2^2)\rho_k^{5/2}J^2_{-3/2}(\rho_k)x^4}\times$$
$$\times((\rho_k^2-\rho_2^2)(\rho_k^{5/2}J_{-5/2}(\rho_k x) - \rho_1^{5/2}J_{-5/2}(\rho_1 x)) -$$
$$(\rho_k^2-\rho_1^2)(\rho_k^{5/2}J_{-5/2}(\rho_k x) - \rho_2^{5/2}J_{-5/2}(\rho_2 x))).$$

Теорема C ([6]). *Нехай* $u_j(x) = \rho_j^\nu\sqrt{\pi x/2}J_{-\nu}(\rho_j x)$, *де* $\nu > 1$ *– півціле число. Тоді система* $\{u_j(x) : j \in \mathbb{N}\}$ *є переповненою в просторі* $L_2((0;1);x^{2\nu-1}dx)$.

Слід зазначити, що розгляд властивостей функцій $J_{-\nu}(z)$ пов'язаний з розглядом наступної крайової задачі [7;8]

$$-f'' + \frac{\nu^2-1/4}{x^2}f = \lambda f, \lambda = \rho^2,$$
$$f(1) = 0,$$
$$\exists c_k \in \mathbb{C} : f(x) = \sum_{k\in\overline{0;\nu}} c_k x^{-\nu+2k+1/2} + o(x^{\nu+1/2}),$$
$$x \to 0+.$$

Наша мета полягає в доведенні такого твердження.

Теорема. *Нехай* $v_j(x) = \sqrt{x}J_{-\nu}(\rho_j x)$, *де* $\nu > 1$ *– півціле число. Тоді система* $\{v_j(x) : j \in \mathbb{N}\backslash\{1;2;...;m\}\}$, *де* $m \in \mathbb{N}$ *таке, що* $-\nu+m = -1/2$ *є повною в просторі* $L_2((0;1);x^{2\nu-1}dx)$.

Ключовою для її доведення є нижче сформульована лема

Лема([8, с.190]). *Нехай* z *– довільне число. Тоді*

$$\int_0^1 \cos(zt)\frac{J_{-\nu}(\rho_j t)}{(\rho_j t)^{-\nu}}dt = (-1)^{m+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\rho_j^{1+\nu}\times$$

$$\times J_{-\nu+1}(\rho_j)\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \frac{J_{-\nu}(z)}{(z^2-\rho_j^2)z^{-\nu}}, \qquad (1)$$

де $\nu > 1$ – півціле число, $m \in \mathbb{N}$ таке, що $-\nu+m = -1/2$, $(z^{-1}d/dz)^m$ – m разів застосована операція $z^{-1}d/dz$ (диференціювання з наступним множенням на $1/z$).

Доведення теореми. Скористаємось методом з праць [4-6]. Припустимо, що система $\{v_j(x) : j \in \mathbb{N}\backslash\{1;2;...;m\}\}$ неповна. Тоді існує ненульова функція $\varphi \in L_2((0;1);x^{2\nu-1}dx)$ така, що

$$\int\limits_0^1 t^{2\nu-1/2}J_{-\nu}(\rho_j t)\varphi(t)dt = 0, j \in \mathbb{N}\backslash\{1;2;...;m\}.$$

Нехай

$$Q(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^1 t^{2\nu-1/2}z^{\nu}J_{-\nu}(zt)\varphi(t)dt$$

або

$$Q(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \tilde{\varphi}(t)\frac{J_{-\nu}(zt)}{(zt)^{-\nu}}dt, \qquad (2)$$

де $\tilde{\varphi}(t) = t^{\nu-1/2}\varphi(t) \in L_2(0;1)$. З [3, с.67] маємо

$$\sqrt{\pi/2}J_{-\nu}(zt)/(zt)^{-\nu} = \cos\left(zt+\frac{m\pi}{2}\right)\times$$
$$\times\sum_{r=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^r(m+2r)!(zt)^{m-2r}}{(2r)!(m-2r)!2^{2r}} -$$
$$-\sin\left(zt+\frac{m\pi}{2}\right)\times$$
$$\times\sum_{r=0}^{[(m-1)/2]}\frac{(-1)^r(m+2r+1)!(zt)^{m-2r-1}}{(2r+1)!(m-2r-1)!2^{2r+1}},$$

де $-\nu = -m-1/2$, $m \in \mathbb{N}$. Отже

$$Q(z) = \sum_{r=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^r(m+2r)!z^{m-2r}}{(2r)!(m-2r)!2^{2r}}\times$$
$$\times\int_0^1 \tilde{\varphi}(t)t^{m-2r}\cos(zt+m\pi/2)dt-$$
$$-\sum_{r=0}^{[(m-1)/2]}\frac{(-1)^r(m+2r+1)!z^{m-2r-1}}{(2r+1)!(m-2r-1)!2^{2r+1}}\times$$
$$\times\int_0^1 \tilde{\varphi}(t)t^{m-2r-1}\sin(zt+m\pi/2)dt.$$

Тоді Q – парна ціла функція і $Q(\rho_j) = 0$, $j \in \mathbb{N}$. Будемо вважати, що c_i – деякі сталі. Згідно з нерівністю Коші-Буняковського маємо

$$\left|\int_0^1 \tilde{\varphi}(t)t^{m-2r}\cos\left(zt+\frac{m\pi}{2}\right)dt\right| \le \frac{c_1e^{|\Im z|}}{\sqrt{1+|\Im z|}},$$
$$r \in \{0;[m/2]\},$$
$$\left|\int_0^1 \tilde{\varphi}(t)t^{m-2r-1}\sin\left(zt+\frac{m\pi}{2}\right)dt\right| \le \frac{c_1e^{|\Im z|}}{\sqrt{1+|\Im z|}},$$
$$r \in \{0;[(m-1)/2]\},$$

де $m \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Звідси

$$|Q(z)| \le c_2\frac{e^{|\Im z|}}{\sqrt{1+|\Im z|}}(1+|z|)^m, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Нехай $L(z) := \sqrt{\pi/2}z^{\nu}J_{-\nu}(z) = \cos(z+m\pi/2)\sum_{r=0}^{[m/2]}((-1)^r(m+2r)!z^{m-2r})/((2r)!(m-2r)!2^{2r}) - \sin(z+m\pi/2)\sum_{r=0}^{[(m-1)/2]}((-1)^r(m+2r+1)!z^{m-2r-1})/((2r+1)!(m-2r-1)!2^{2r+1})$. Тоді існують промені $\arg z = \psi_k$, $k \in \{0;1;2;3\}$, $\psi_0 \in (0;\pi/2)$, $\psi_1 \in (\pi/2;\pi)$, $\psi_2 \in (\pi;3\pi/2)$, $\psi_3 \in (3\pi/2;2\pi)$, на яких

$$|L(z)| \ge c_3(1+|z|)^m\exp(|\Im z|).$$

Нехай $Q_0(z) = L(z)/((z^2-\rho_1^2)(z^2-\rho_2^2)\times...\times(z^2-\rho_m^2))$, $\Omega = Q/Q_0$. Тоді Ω є цілою парною функцією порядку $\tilde{\rho} \le 1$. Крім цього,

$$|\Omega(z)| \le c_4(1+|z|)^{2m-1/2},$$
$$\arg z = \psi_k, k \in \{0;1;2;3\}.$$

Остання нерівність справедлива для всіх $z \in \mathbb{C}$. Справді, нехай $G_0 = \{z : \psi_3 < \arg z < \psi_0\}$, $G_1 = \{z : \psi_0 < \arg z < \psi_1\}$, $G_2 = \{z : \psi_1 < \arg z < \psi_2\}$, $G_3 = \{z : \psi_2 < \arg z < \psi_3\}$. Тоді візьмемо довільну голоморфну гілку функції $\sqrt{i^k+z}$ в G_k, $k \in \{0;1;2;3\}$ і розглянемо функцію $\tilde{\Omega}_k(z) = \Omega(z)/((i^k+z)^{2m-1}\sqrt{i^k+z})$, голоморфну в області G_k. На межі області G_k функція $\tilde{\Omega}_k$ є обмеженою і має порядок $\tilde{\rho}_k \le 1$ в G_k. Тому згідно з принципом Фрагмена і Ліндельофа, вона є обмеженою в G_k. Отже, $|\Omega(z)| \le c_5(1+|z|)^{2m-1/2}$ для всіх $z \in \mathbb{C}$. Але, Ω – парна ціла функція. Тому $Q(z) = (a_{2m-2}z^{2m-2}+a_{2m-4}z^{2m-4}+\ldots+a_4z^4+a_2z^2+$

$a_0)Q_0(z)$, де a_{2i}, $i \in \{0;1;\dots;m-1\}$ – довільні комплексні числа.

Скористаємось рівністю [3, с. 56]

$$\frac{d}{dz}\frac{J_{-\nu}(z)}{z^{-\nu}} = -z^{\nu}J_{-\nu+1}(z),$$

отримаємо

$$\left(\frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)^m \frac{J_{-\nu}(zx)}{(zx)^{-\nu}} =$$

$$= (-1)^m x^{2m}\frac{J_{-\nu+m}(zx)}{(zx)^{-\nu+m}}. \qquad (3)$$

Оскільки $x^{1/2}J_{-1/2}(x) = \sqrt{2/\pi}\cos x$, то з (2) і (3) маємо

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m ((a_{2m-2}z^{2m-2} + a_{2m-4}z^{2m-4} +$$

$$+ \dots + a_4z^4 + a_2z^2 + a_0)Q_0(z)) =$$

$$= (-1)^m\int_0^1 \tilde{\varphi}(t)t^{2m}\cos(zt)dt. \qquad (4)$$

З формули (1) отримаємо

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \frac{L(z)}{(z^2-\rho_j^2)} =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}\rho_j^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_j)}\int_0^1 \cos(zt)\frac{J_{-\nu}(\rho_j t)}{(\rho_j t)^{-\nu}}dt.$$

Далі, виберемо числа b_1, b_2, …, b_m так, щоб

$$\frac{a_{2m-2}z^{2m-2} + a_{2m-4}z^{2m-4} + \dots + a_2z^2 + a_0}{(z^2-\rho_1^2)(z^2-\rho_2^2)\cdot\ldots\cdot(z^2-\rho_m^2)} =$$

$$= \frac{b_1}{z^2-\rho_1^2} + \frac{b_2}{z^2-\rho_2^2} + \dots + \frac{b_m}{z^2-\rho_m^2}.$$

Помножимо цей вираз на $z^2-\rho_1^2$. Тоді

$$b_1 = \frac{a_{2m-2}\rho_1^{2m-2} + a_{2m-4}\rho_1^{2m-4} + \dots + a_2\rho_1^2 + a_0}{(\rho_1^2-\rho_2^2)\cdot\ldots\cdot(\rho_1^2-\rho_m^2)}.$$

Аналогічно одержуємо

$$b_2 = \frac{a_{2m-2}\rho_2^{2m-2} + a_{2m-4}\rho_2^{2m-4} + \dots + a_2\rho_2^2 + a_0}{(\rho_2^2-\rho_1^2)(\rho_2^2-\rho_3^2)\cdot\ldots\cdot(\rho_2^2-\rho_m^2)},$$

...

$$b_m = \frac{a_{2m-2}\rho_m^{2m-2} + a_{2m-4}\rho_m^{2m-4} + \dots + a_2\rho_m^2 + a_0}{(\rho_m^2-\rho_1^2)\cdot\ldots\cdot(\rho_m^2-\rho_{m-1}^2)}.$$

Тоді

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m ((a_{2m-2}z^{2m-2} + a_{2m-4}z^{2m-4} +$$

$$+ \dots + a_4z^4 + a_2z^2 + a_0)Q_0(z)) =$$

$$= \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \Bigg((a_{2m-2}z^{2m-2} + a_{2m-4}z^{2m-4} +$$

$$+ \dots + a_2z^2 + a_0)\frac{L(z)}{(z^2-\rho_1^2)\times ... \times(z^2-\rho_m^2)}\Bigg) =$$

$$= \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \left(\left(\frac{b_1}{z^2-\rho_1^2} + \dots + \frac{b_m}{z^2-\rho_m^2}\right)L(z)\right) =$$

$$= b_1\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \frac{L(z)}{z^2-\rho_1^2} + \dots + b_m\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m \frac{L(z)}{z^2-\rho_m^2} =$$

$$= b_1\frac{(-1)^{m+1}\rho_1^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)}\int_0^1 \cos(zt)\frac{J_{-\nu}(\rho_1 t)}{(\rho_1 t)^{-\nu}}dt +$$

$$+ \dots + b_m\frac{(-1)^{m+1}\rho_m^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)}\int_0^1 \cos(zt)\frac{J_{-\nu}(\rho_m t)}{(\rho_m t)^{-\nu}}dt =$$

$$= (-1)^{m+1}\int_0^1 \cos(zt)\Bigg(\frac{b_1\rho_1^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)}\frac{J_{-\nu}(\rho_1 t)}{(\rho_1 t)^{-\nu}} +$$

$$+ \dots + \frac{b_m\rho_m^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)}\frac{J_{-\nu}(\rho_m t)}{(\rho_m t)^{-\nu}}\Bigg)dt.$$

Враховуючи (4), отримуємо

$$\tilde{\varphi}(t) = -t^{-2m}\Bigg(\frac{b_1\rho_1^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)}\frac{J_{-\nu}(\rho_1 t)}{(\rho_1 t)^{-\nu}} +$$

$$+ \dots + \frac{b_m\rho_m^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)}\frac{J_{-\nu}(\rho_m t)}{(\rho_m t)^{-\nu}}\Bigg).$$

Оскільки $\tilde{\varphi} \in L_2(0;1)$ і $(\rho_j t)^{\nu}J_{-\nu}(\rho_j t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\nu,k}\rho_j^{2k}t^{2k}$, де $a_{\nu,k} = (-1)^k 2^{\nu-2k}/(k!\Gamma(k-\nu+1))$, то це можливо лише у випадку, коли

$$\frac{b_1\rho_1^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)}\sum_{k=0}^{m-1} a_{\nu,k}\rho_1^{2k}t^{2k} +$$

$$+ \dots + \frac{b_m\rho_m^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)}\sum_{k=0}^{m-1} a_{\nu,k}\rho_m^{2k}t^{2k} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{\nu,k}t^{2k}\left(\frac{b_1\rho_1^{-1-\nu+2k}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} +\right.$$

$$+\ldots+\frac{b_m\rho_m^{-1-\nu+2k}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)}\Bigg)=0$$

або

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{b_1\rho_1^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)}+\ldots+\frac{b_m\rho_m^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)}=0,\\ \frac{b_1\rho_1^{1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)}+\ldots+\frac{b_m\rho_m^{1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{b_1\rho_1^{-\nu+2m-3}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)}+\ldots+\frac{b_m\rho_m^{-\nu+2m-3}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)}=0. \end{array}\right. \qquad (5)$$

Остання система має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} \frac{\rho_1^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} & \ldots & \frac{\rho_m^{-1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)}\\ \frac{\rho_1^{1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} & \ldots & \frac{\rho_m^{1-\nu}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \frac{\rho_1^{-\nu+2m-3}}{J_{-\nu+1}(\rho_1)} & \ldots & \frac{\rho_m^{-\nu+2m-3}}{J_{-\nu+1}(\rho_m)} \end{vmatrix}=0$$

або

$$\Delta:=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1\\ \rho_1^2 & \rho_2^2 & \ldots & \rho_m^2\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \rho_1^{2(m-1)} & \rho_2^{2(m-1)} & \ldots & \rho_m^{2(m-1)} \end{vmatrix}=0.$$

Це неможливо, оскільки визначник Δ є визначником Вандермонда і тому $\Delta = \prod_{i>k}(\rho_i^2-\rho_k^2)\neq 0$. Отже, система (5) має єдиний нульовий розв'язок $b_1 = b_2 = ... = b_m$. Отже, $\tilde{\varphi} = 0$, що суперечить нашому припущенню. Таким чином, система $\{v_j(x) : j \in \mathbb{N}\backslash\{1;2;...;m\}\}$ є повною в просторі $L_2((0;1);x^{2\nu-1}dx)$.

Зауваження. Аналогічні питання можна розглядати, коли ρ_j – нулі функції $aJ_{-\nu}(z) + zJ'_{-\nu}(z)$, $\nu > 1$, $a \in \mathbb{R}$ ([9;10]) і зокрема нулі $J'_{-\nu}(z)$, $\nu > 1$ ([11–13]).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974. — Т.2. — 296 с.

2. *Hurwitz A.* Ueber die Nullstellen der Bessel'schen Function // Math. Ann. – 1889. – **33**. – P. 246-266.

3. *Ватсон Г.Н.* Теория Бесселевых функций. — М.: ИЛ., 1949. — Ч.1. — 787 с.

4. *Винницький Б., Шавала О.* Обмеженість розв'язків лінійного диференціального рівняння другого порядку і одна крайова задача для рівняння Бесселя // Математичні Студії. – 2008. – **30**, N1. – С. 31-41.

5. *Шавала О.* Про деякі апроксимаційні властивості функцій Бесселя з індексом $-5/2$ // Математичні Студії. – 2015. – **43**, N2. – С. 180-184.

6. *Шавала О.* Про переповнені системи з функцій Бесселя // Актуальні проблеми фізики, математики та інформатики. – 2012. – N4. – С. 10–11.

7. *Vynnyts'kyi B., Shavala O.* Some properties of boundary value problems generated by Bessel's equation // International conference dedicated to the 120th anniversary of S. Banach. — Lviv: 2012. – P. 70.

8. *Vynnyts'kyi B., Shavala O.* Some properties of boundary value problems for Bessel's equation // Математичний вісник Наукового товариства імені Шевченка. – 2013. – **10**. – С. 189-192.

9. *Landau L.J.* Ratios of Bessel Functions and Roots of a $\alpha J_\nu(x) + xJ'_\nu(x) = 0$ // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1999. – **240**. – P. 174-204.

10. *Elbert A., Siafarikas P.* On the zeros of $\alpha C_\nu(x)+xC'_\nu(x)$, where $C_\nu(x)$ is a cylinder function // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1992. – **164**. – P. 21-33.

11. *Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark Ch.W.* NIST handbook of mathematical functions. — USA: NIST and Cambridge university press, 2010. — 951 p.

12. *Lense J.* Über die Nullstellen der Besselfunktionen und ihrer ersten Ableitungen // Jahresbericht der Deutschen. – 1934. – **43**. – S. 146-153.

13. *Керимов М.К., Скороходов С.Л.* О вычислении комплексных нулей функций Бесселя $J_\nu(z)$ и $I_\nu(z)$ и их производных// Журнал вычисл. мат. и мат. физ. – 1984. – **24**, N10. – С. 1497-1513.