УДК 517.52

©2017 р. **В.Ю. Слюсарчук**

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ІНТЕГРАЛЬНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ ПОДВІЙНИХ РЯДІВ

Показано, що для подвійних рядів аналог інтегральної ознаки Маклорена-Коші є хибним, знайдено умови, при виконанні яких цей аналог є правильним твердженням, і наведено загальну інтегральну ознаку, що застосовна до дослідження збіжності будь-яких подвійних векторних рядів.

It is shown that for the double series the analog of Maclaurin-Cauchy test is false. Found the conditions under which this analog is a correct statement. Found general statement of convergence of the double series. This statement is applicable to the study of convergence of any double vector series.

1. Подвійні ряди, подвійні невласні інтеграли та основний об'єкт досліджень. Нехай E – банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$.

Розглянемо довільні елементи $a_{n,m} \in E$, де $n, m \in \mathbb{N}$. Вираз

$$\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty} a_{n,m} \qquad (1)$$

називається *подвійним рядом.*

Означення 1. Подвійний ряд (1) називається *збіжним*, якщо існує границя

$$\lim_{p\to\infty,\ q\to\infty} \sum_{n=1}^{p}\sum_{m=1}^{q} a_{n,m}. \qquad (2)$$

Теорія подвійних рядів аналогічна теорії подвійних інтегралів.

Розглянемо множини

$$\Omega = \{(x, y) : x, y \in [1, +\infty)\}$$

і

$$\Omega_{a,b} = \{(x, y) : 1 \le x \le a, 1 \le y \le b\}.$$

Для неперервного відображення $f : \Omega \to E$ розглянемо невласний подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, d\Omega. \qquad (3)$$

Означення 2. Невласний подвійний інтеграл (3) називається *збіжним*, якщо існує границя

$$\lim_{a\to+\infty,\ b\to+\infty} \iint\limits_{\Omega_{a,b}} f(x, y)\, d\Omega. \qquad (4)$$

Якщо ж границі (2) і (4) не існують, то подвійний ряд (1) та невласний подвійний інтеграл (3) є *розбіжними.*

Метою статті є з'ясування умов збіжності подвійних рядів із використанням невласних подвійних інтегралів.

2. Аналог інтегральної ознаки Маклорена-Коші. У цьому пункті будемо розглядати випадок, коли $E = \mathbb{R}$.

Позначимо через $\mathfrak{F}_1$ множину всіх таких подвійних рядів (1), для кожного з яких ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,1}$$

і

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{1,m}$$

є збіжними.

Через $\mathfrak{F}_2$ позначимо множину неперервних функцій $f : \Omega \to [0, +\infty)$, для кожної з яких виконується співвідношення

$$f(x_1, x_2) \ge f(y_1, y_2),$$

якщо $1 \le x_1 \le y_1 < +\infty$ і $1 \le x_2 \le y_2 < +\infty$.

Справджується наступне твердження

Теорема 1. *Нехай:*
1) ряд (1) *є елементом множини* $\mathfrak{F}_1$*;*
2) $f \in \mathfrak{F}_2$*;*
3) $f(n,m) = a_{n,m}$ *для всіх* $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Тоді подвійний ряд (1) *і невласний подвійний інтеграл* (3) *одночасно збігаються або розбігаються.*

Ця теорема є наслідком загальної теореми, що наводиться у подальшому, і є аналогом наступної інтегральної ознаки Маклорена-Коші [1].

Теорема 2. *Нехай:*
1) $a_n > 0$, $n \geqslant 1$*;*
2) $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ *– неперервна монотонно незростаюча функція;*
3) $f(n) = a_n$, $n \geqslant 1$.

Тоді числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *і невласний інтеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(t)\,dt$ *одночасно збігаються або розбігаються.*

Зауваження 1. *У теоремі 1 перша умова є суттєвою. Без цієї умови теорема є хибною, що підтверджується наступним прикладом.*

Приклад 1. Використаємо функцію

$$g(x,y) = (x+1)^{-y^2-(y-1)x^2},$$

що є елементом множини $\mathfrak{F}_2$. Оскільки $g(x,1) = (x+1)^{-1}$, то числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(n,1)$$

розбігається і тому подвійний ряд

$$\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty} g(n,m) \tag{5}$$

не є елементом множини $\mathfrak{F}_1$.

Отже, перша умова теореми 1 для ряду (5) не виконується.

Далі покажемо, що відповідний невласний подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,d\Omega \tag{6}$$

збігається. Завдяки невід'ємності значень функції g для цього інтегралу виконується властивість адитивності і тому

$$\iint\limits_{\Omega} g(x,y)\,d\Omega =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_1} g(x,y)\,d\Omega + \iint\limits_{\Omega_2} g(x,y)\,d\Omega, \tag{7}$$

де

$$\Omega_1 = \{(x,y) : (x,y) \in [1,+\infty) \times [1,2]\}$$

і

$$\Omega_2 = \{(x,y) : (x,y) \in [1,+\infty) \times [2,+\infty)\}.$$

Покажемо, що кожний інтеграл у правій частині рівності (7) є збіжним.

Оскільки

$$\iint\limits_{\Omega_1} g(x,y)\,d\Omega =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_1^2 \left(\int\limits_n^{n+1} (x+1)^{-y^2-(y-1)x^2}\,dx \right) dy, \tag{8}$$

$$\int\limits_n^{n+1} (x+1)^{-y^2-(y-1)x^2}\,dx <$$

$$< \int\limits_n^{n+1} (n+1)^{-y^2-(y-1)n^2}\,dx = (n+1)^{-y^2-(y-1)n^2},$$

$$\int\limits_1^2 \left(\int\limits_n^{n+1} (x+1)^{-y^2-(y-1)x^2}\,dx \right) dy <$$

$$< \int\limits_1^2 (n+1)^{-y^2-(y-1)n^2}\,dy <$$

$$< \int\limits_1^2 (n+1)^{-1-(y-1)n^2}\,dy = \int\limits_0^1 \frac{e^{-\tau n^2 \ln(n+1)}}{n+1}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{(n+1)n^2\ln(n+1)}\left(1-e^{-n^2\ln(n+1)}\right) <$$

$$< \frac{1}{n^3\ln(n+1)}$$

і числовий ряд $\sum\limits_{n+1}^{\infty}\frac{1}{n^3\ln(n+1)}$ збігається, то завдяки рівності (8) інтеграл $\iint\limits_{\Omega_1} g(x,y)\,d\Omega$ є збіжним. Інтеграл $\iint\limits_{\Omega_2} g(x,y)\,d\Omega$ також збігається, оскільки

$$\iint\limits_{[1,+\infty)\times[2,+\infty)} (x+1)^{-y^2-(y-1)x^2}\,d\Omega <$$

$$< \iint\limits_{[1,+\infty)\times[2,+\infty)} 2^{-y^2-x^2}\,d\Omega < +\infty.$$

Таким чином, невласний подвійний інтеграл (6) збігається.

Отже, без виконання першої умови теореми 1 твердження цієї теореми хибне.

Далі позначимо через $\mathfrak{F}_3$ множину всіх неперервних на Ω функцій f зі значеннями в $[0,+\infty)$. Для функцій із цієї множини можна також використовувати наступне означення збіжності невласного подвійного інтегралу.

Означення 3. Невласний подвійний інтеграл (3) називається *збіжним*, якщо існує границя

$$\lim_{r\to+\infty}\iint\limits_{G_r} f(x,y)\,d\Omega, \tag{9}$$

де

$$G_r = \left\{(x,y) : x\geq 1, y\geq 1, x^2+y^2\leq r^2\right\}.$$

Якщо ж границя (9) не існує, то інтеграл (3) є розбіжним.

Зауваження 2. Для функцій з $\mathfrak{F}_3$ означення 2 і 3 рівносильні.

Далі використаємо теорему 1 та означення 3 для дослідження збіжності подвійного ряду, що є аналогом узагальненого гармонічного ряду.

Приклад 2. Дослідимо на збіжність подвійний ряд

$$\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty}\frac{1}{(n^2+m^2)^p}, \tag{10}$$

де $p\in\mathbb{R}$.

Очевидно, що ряд (10) є елементом множини $\mathfrak{F}_1$ тільки при $p>\frac{1}{2}$, тобто при $p\leq\frac{1}{2}$ цей ряд розбігається. При $p>\frac{1}{2}$ застосуємо до (10) теорему 1. Використаємо функцію

$$f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)^p}.$$

Очевидно, що $f\in\mathfrak{F}_2$, тобто функція f задовольняє другу умову теореми 1. Очевидно також, що для f виконується третя умова теореми 1.

Розглянемо невласний подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}\,d\Omega. \tag{11}$$

Використовуючи полярні координати, отримаємо, що при $p>\frac{1}{2}$

$$\iint\limits_{G_r}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}\,d\Omega =$$

$$= \int\limits_{\sqrt{2}}^{r}\left(\int\limits_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{r}} d\varphi\right)\frac{dr}{r^{2p-1}} =$$

$$= \int\limits_{\sqrt{2}}^{r}\left(\frac{\pi}{2}-2\arcsin\frac{1}{r}\right)\frac{dr}{r^{2p-1}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^{r}\frac{dr}{r^{2p-1}} - 2\int\limits_{\sqrt{2}}^{r}\arcsin\frac{1}{r}\,\frac{dr}{r^{2p-1}}.$$

Оскільки при $p > \dfrac{1}{2}$

$$\int\limits_{\sqrt{2}}^{r} \frac{dr}{r^{2p-1}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{r^{2(1-p)} - 2^{1-p}}{2(1-p)}, & \text{якщо } p \neq 1, \\ \ln \dfrac{r}{\sqrt{2}}, & \text{якщо } p = 1, \end{cases}$$

і

$$\frac{\pi}{2} \int\limits_{\sqrt{2}}^{r} \frac{dr}{r^{2p}} > \int\limits_{\sqrt{2}}^{r} \arcsin \frac{1}{r} \frac{dr}{r^{2p-1}} >$$

$$> \int\limits_{\sqrt{2}}^{r} \frac{dr}{r^{2p}} = \frac{r^{1-2p} - 2^{\frac{1-2p}{2}}}{1-2p},$$

то тільки при $p > 1$ існує скінчена границя

$$\lim_{r \to +\infty} \iint\limits_{G_r} \frac{1}{(x^2+y^2)^p} \, d\Omega,$$

тобто невласний подвійний інтеграл (11) збігається тільки при $p > 1$.

Отже, за теоремою 1 ряд (10) також збігається тільки при $p > 1$.

3. Загальна інтегральна ознака збіжності подвійних рядів. Нехай $[a]$ – ціла частина числа a. Справджується наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай:*
1) $a_{n,m} \in E$, $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*;*
2) $f : \Omega \to E$ *– неперервне відображення і* $f(n,m) = a_{n,m}$, $(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*;*
3) збігається невласний подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{\Omega} (f(x,y) - f([x],[y])) \, d\Omega. \qquad (12)$$

Тоді подвійний ряд $\sum\limits_{n=1,\ m=1}^{\infty} a_{n,m}$ *і невласний подвійний інтеграл* $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\, d\Omega$ *одночасно збігаються або розбігаються.*

Доведення. Завдяки першим двом умовам теореми справджується співвідношення

$$\iint\limits_{\Omega_{a,b}} f(x,y)\, d\Omega =$$

$$= \sum_{n=1}^{[a]-1} \sum_{m=1}^{[b]-1} a_{n,m} + \iint\limits_{\Omega_{[a],[b]}} (f(x,y) - f([x],[y]))\, d\Omega +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega_{a,b} \setminus \Omega_{[a],[b]}} f(x,y)\, d\Omega, \quad a \geq 2, b \geq 2,. \qquad (13)$$

Якщо невласний інтеграл $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\, d\Omega$ збігається, то існує границя

$$\lim_{a \to +\infty,\ b \to +\infty} \iint\limits_{\Omega_{a,b}} f(x,y)\, d\Omega.$$

Тому

$$\lim_{a \to +\infty,\ b \to +\infty} \iint\limits_{\Omega_{a,b} \setminus \Omega_{[a],[b]}} f(x,y)\, d\Omega = 0$$

і на підставі співвідношення (13) та третьої умови теореми існує границя

$$\lim_{a \to +\infty,\ b \to +\infty} \sum_{n=1}^{[a]-1} \sum_{m=1}^{[b]-1} a_{n,m}.$$

Отже, із збіжності невласного подвійного інтеграла $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\, d\Omega$ випливає збіжність подвійного ряду $\sum\limits_{n=1,\ m=1}^{\infty} a_{n,m}$.

Навпаки, якщо ряд $\sum\limits_{n=1,\ m=1}^{\infty} a_{n,m}$ збігається, тобто існує границя

$$\lim_{a \to +\infty,\ b \to +\infty} \sum_{n=1}^{[a]-1} \sum_{m=1}^{[b]-1} a_{n,m},$$

то

$$\lim_{a \to +\infty,\ b \to +\infty} \sum_{n=1}^{[a]} a_{n,[b]} = 0,$$

$$\lim_{a\to+\infty,\ b\to+\infty}\sum_{m=1}^{[b]} a_{[a],m}=0$$

і

$$\lim_{n\to+\infty,\ m\to+\infty} a_{n,m}=0.$$

Тому

$$\lim_{a\to+\infty,\ b\to+\infty}\iint\limits_{\Omega_{a,b}\setminus\Omega_{[a],[b]}} f([x],[y])\,d\Omega=0$$

і, отже, на підставі третьої умови теореми

$$\lim_{a\to+\infty,\ b\to+\infty}\iint\limits_{\Omega_{a,b}\setminus\Omega_{[a],[b]}} f(x,y)\,d\Omega=0.$$

Оскільки кожний доданок правої частини (13) при $a\to+\infty$ і $b\to+\infty$ має границю, то існує границя

$$\lim_{a\to+\infty,\ b\to+\infty}\iint\limits_{\Omega_{a,b}} f(x,y)\,d\Omega,$$

тобто збігається невласний подвійний інтеграл $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,d\Omega$.

Отже, із збіжності подвійного ряду $\sum\limits_{n=1,\ m=1}^{\infty} a_{n,m}$ випливає збіжність невласного подвійного інтеграла $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,d\Omega$.

Теорему 3 доведено.

При використанні на практиці теореми 3 потрібно перевіряти третю умову цієї теореми про збіжність інтеграла (12).

Зауваження 3. У теоремі 3 достатньою умовою збіжності інтеграла (12) є збіжність подвійного ряду

$$\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty}\ \sup_{\substack{x\in[n,n+1)\\ y\in[m,m+1)}}\|f(x,y)-f([x],[y])\|_E. \quad (14)$$

Нехай $L(E,E)$ – банаховий простір лінійних неперервних операторів $A:E\to E$ з нормою

$$\|A\|_{L(E,E)}=\sup_{\|x\|_E=1}\|Ax\|_E.$$

Зауваження 4. У випадку диференційовного на $\Omega\setminus\Gamma$ відображення $f:\Omega\to E$, де

$$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$$

і

$$\Gamma_1=\{(x,y): x=[x], x\ge 1, y\ge 1\},$$
$$\Gamma_2=\{(x,y): y=[y], x\ge 1, y\ge 1\},$$

замість збіжності ряду (14) можна використати збіжність ряду

$$\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty}\ \sup_{\substack{x\in[n,n+1)\\ y\in[m,m+1)}}\Big(\|f'_x(x,y)\|_{L(E,E)}+ + \big\|f'_y(x,y)\big\|_{L(E,E)}\Big), \quad (15)$$

що випливає з теореми про скінчений приріст (див. [2, розд. X, §4]), оскільки для всіх $(x,y)\in\Omega\setminus\Gamma$

$$\begin{aligned}&\|f(x,y)-f([x],[y])\|_E\le\\ &\le\|f(x,y)-f([x],y)\|_E+\\ &+\|f([x],y)-f([x],[y])\|_E\le\\ &\le\sup_{t_1\in([x],x)}\|f'_x(t_1,y)\|_{L(E,E)}\|x-[x]\|_E+\\ &+\sup_{t_2\in([y],y)}\big\|f'_y(x,y_2)\big\|_{L(E,E)}\|y-[y]\|_E\le\\ &\le\sup_{t_1\in([x],x),\ t_2\in([y],y)}\|f'_x(t_1,t_2)\|_{L(E,E)}+\\ &+\sup_{t_1\in([x],x),\ t_2\in([y],y)}\big\|f'_y(t_1,t_2)\big\|_{L(E,E)}.\end{aligned}$$

У багатьох випадках досліджувати на збіжність ряд (14) або (15) легше, ніж досліджувати на збіжність інтеграл (12).

4. Теорема 1 – наслідок теореми 3. Розглянемо множини

$$R_{n,m}=$$
$$=\{(x,y): n\le x<n+1, m\le y<m+1\},$$

де $n,m\in\mathbb{N}$, та невласний подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{\Omega}(f([x],[y])-f(x,y))\,d\Omega.$$

Оскільки
$$f([x],[y]) \geq f(x,y)$$
для всіх $(x,y)\in\Omega$,
$$\Omega = \bigcup_{n=1,\ m=1}^{\infty} R_{n,m}$$
і
$$R_{n,m}\cap R_{p,q}=\emptyset,$$
якщо $(n,m)\neq(p,q)$, то
$$\iint\limits_{\Omega}(f([x],[y])-f(x,y))\,d\Omega=$$
$$=\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty}\ \iint\limits_{R_{n,m}}(f([x],[y])-f(x,y))\,d\Omega.$$
На підставі другої та третьої умов теореми 1
$$\iint\limits_{R_{n,m}}(f([x],[y])-f(x,y))\,d\Omega=$$
$$=\iint\limits_{R_{n,m}}(f(n,m)-f(x,y))\,d\Omega\leq$$
$$\leq\iint\limits_{R_{n,m}}(f(n,m)-f(n+1,m+1))\,d\Omega=$$
$$=a_{n,m}-a_{n+1,m+1}.$$
Тому
$$\iint\limits_{\Omega}(f([x],[y])-f(x,y))\,d\Omega\leq$$
$$\leq\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty}(a_{n,m}-a_{n+1,m+1})=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(a_{n+k,1+k}-a_{n+k+1,2+k})+$$
$$+\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(a_{1+k,m+k}-a_{2+k,m+k+1})\leq$$
$$\leq\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,1}+\sum_{m=2}^{\infty}a_{1,m}.$$
Звідси та з першої умови теореми 1 випливає збіжність невласного подвійного інтеграла $\iint\limits_{\Omega}(f([x],[y])-f(x,y))\,d\Omega$. Тому за теоремою 3 справджується твердження теореми 1.

5. Множина рядів, до яких застосовна теорема 3. Покажемо, що до кожного подвійного ряду (1) застосовна теорема 3. Це випливає з наступного твердження.

Теорема 4. *Для кожного ряду* (1) *існує неперервне відображення* $f:\Omega\to E$, *для якого* $f(n,m)=a_{n,m}$, $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, *і невласний подвійний інтеграл* (12) *збігається.*

Доведення. Використаємо множини $\{\varepsilon_{n,m}:n,m\in\mathbb{N}\}$, $\{\delta_{n,m}:n,m\in\mathbb{N}\}$, для яких
$$0<\delta_{n,m}=$$
$$=\varepsilon_{n,m}\max\Bigg\{1,\max_{i_1,i_2,j_1,j_2\in\{0,1\}}\|a_{n+i_1,m+i_2}-$$
$$-a_{n+j_1,m+j_2}\|_E\Bigg\}<\frac{1}{2}$$
і подвійний ряд
$$\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty}\delta_{n,m} \tag{16}$$
збігається. Також використаємо функцію
$$\gamma_{n,m}(u,v)=$$
$$=\begin{cases}\varepsilon_{n,m}^{-2}, & \text{якщо } (u,v)\in K_{n,m},\\ 0, & \text{якщо } (u,v)\in\mathbb{R}^2\setminus K_{n,m},\end{cases}$$
де
$$K_{n,m}=$$
$$=\{(u,v):0\leq u\leq\varepsilon_{n,m},\ 0\leq v\leq\varepsilon_{n,m}\}.$$
Визначимо неперервне відображення $f:\Omega\to E$ рівністю
$$f(x,y)=\iint\limits_{\Omega}a_{[u],[v]}\gamma_{[x],[y]}(u-x,v-y)\ d\Omega.$$
Легко перевірити, що
$$f(x,y)=a_{[x],[y]} \tag{17}$$

для всіх $(x, y) \in \bigcup\limits_{n=1,\ m=1}^{\infty} (R_{n,m} \setminus Q_{n,m})$, де

$$Q_{n,m} = \{(u, v) : n \le u \le n + 1 - \varepsilon_{n,m},$$
$$m \le v \le m + 1 - \varepsilon_{n,m}\}.$$

Очевидно, що

$$\mu(R_{n,m} \setminus Q_{n,m}) < 2\varepsilon_{n,m},$$

де $\mu(R_{n,m} \setminus Q_{n,m})$ – міра Лебега множини $R_{n,m} \setminus Q_{n,m}$, і

$$\sup_{(x,y) \in R_{n,m} \setminus Q_{n,m}} \|f(x, y) - f([x], [y])\|_E <$$
$$< \frac{2\delta_{n,m}}{\mu(R_{n,m} \setminus Q_{n,m})}.$$

Тому завдяки (17)

$$\left\| \iint\limits_{\Omega} (f(x, y) - f([x], [y]))\, d\Omega \right\|_E \le$$
$$\le \iint\limits_{\Omega} \|f(x, y) - f([x], [y])\|_E\, d\Omega \le$$
$$\le \sum_{n=1,m=1}^{\infty} \sup_{(x,y) \in R_{n,m} \setminus Q_{n,m}} \|f(x, y)-$$
$$-f([x], [y])\|_E\, \mu(R_{n,m} \setminus Q_{n,m}) <$$
$$< 2 \sum_{n=1,m=1}^{\infty} \delta_{n,m}.$$

Отже, завдяки збіжності подвійного ряду (16) невласний подвійний інтеграл (12) збігається. Теорему 4 доведено.

Із теорем 3 і 4 випливає наступне твердження.

Теорема 5. *Для збіжності подвійного ряду* $\sum\limits_{n=1,\ m=1}^{\infty} a_{n,m}$ *необхідно і достатньо, щоб існувало неперервне відображення* $f : \Omega \to E$, *для якого* $f(n, m) = a_{n,m}$ *для всіх* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, *і невласні подвійні інтеграли* $\iint\limits_{\Omega} (f(x, y) - f([x], [y]))\, d\Omega$ *і* $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, d\Omega$ *збігалися.*

6. Приклади застосування теореми 3.

Приклад 3. Дослідимо на збіжність подвійний ряд

$$\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \sqrt[3]{n^2 + m^2}}{n^2 + m^2}. \tag{18}$$

Використаємо функцію

$$f(x, y) = \frac{\sin^2 \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$$

та відповідний невласний подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\sin^2 \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}\, d\Omega. \tag{19}$$

Теорема 1 не застосовна до ряду (18), оскільки $f \notin \mathfrak{F}_2$. Однак до цього ряду застосовна теорема 3 (ми розглядаємо випадок $E = \mathbb{R}$).

Очевидно, що перші дві умови теореми 3 виконуються. Покажемо, що виконується третя умова цієї теореми, тобто збігається невласний подвійний інтеграл (12).

Використаємо частинні похідні

$$f'_x(x, y) =$$
$$= \frac{2x \sin 2\sqrt[3]{x^2 + y^2}}{3(x^2 + y^2)^{\frac{5}{3}}} - \frac{2x \sin^2 \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^2}$$

і

$$f'_y(x, y) =$$
$$= \frac{2y \sin 2\sqrt[3]{x^2 + y^2}}{3(x^2 + y^2)^{\frac{5}{3}}} - \frac{2y \sin^2 \sqrt[3]{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Очевидно, що для всіх $x \ge 1$ і $y \ge 1$

$$\max\left\{\left|f'_x(x, y)\right|, \left|f'_y(x, y)\right|\right\} < \frac{4}{(x^2 + y^2)^{\frac{7}{6}}}.$$

Тому для всіх $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in (n,n+1),\ y \in (m,m+1)} \left(\left|f'_x(x, y)\right| + \left|f'_y(x, y)\right|\right) <$$
$$< \frac{8}{(n^2 + m^2)^{\frac{7}{6}}}.$$

Оскільки на підставі прикладу 2 подвійний ряд

$$\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+m^2)^{\frac{7}{6}}}$$

збігається, то збігається і ряд

$$\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty} \sup_{x\in(n,n+1),\ y\in(m,m+1)} (|f'_x(x,y)|+ + \left|f'_y(x,y)\right|) .$$

Отже, завдяки зауваженню 4 невласний подвійний інтеграл (12) збігається.

Оскільки у випадку ряду (18) виконуються всі умови теореми 3, то за цією теоремою збіжність ряду (18) зводиться до дослідження збіжності невласного подвійного інтеграла (19).

Покажемо, що інтеграл (19) розбігається.

Завдяки включенню $f \in \mathfrak{F}_3$ та зауваженню 2 для доведення розбіжності інтеграла (19) достатньо показати, що

$$\lim_{r\to+\infty} \iint\limits_{G_r} \frac{\sin^2 \sqrt[3]{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\, d\Omega = +\infty. \qquad (20)$$

Використавши полярні координати, аналогічно, як і в прикладі 2, отримуємо, що

$$\iint\limits_{G_r} \frac{\sin^2 \sqrt[3]{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\, d\Omega =$$

$$= \int\limits_{\sqrt{2}}^{r} \left(\int\limits_{\arcsin\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{r}} d\varphi \right) \frac{\sin^2 \sqrt[3]{r^2}}{r}\, dr =$$

$$= \frac{3}{2} \int\limits_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{r^2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{\tau^3}} \right) \frac{\sin^2 \tau}{\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{3\pi}{4} \int\limits_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{r^2}} \frac{\sin^2 \tau}{\tau}\, d\tau -$$

$$-3 \int\limits_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{r^2}} \arcsin\frac{1}{\sqrt{\tau^3}} \frac{\sin^2 \tau}{\tau}\, d\tau.$$

Оскільки

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{r^2}} \frac{\sin^2 \tau}{\tau}\, d\tau = +\infty$$

і границя

$$\lim_{r\to+\infty} \int\limits_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{r^2}} \arcsin\frac{1}{\sqrt{\tau^3}} \frac{\sin^2 \tau}{\tau}\, d\tau,$$

очевидно, є скінченною, то справджується рівність (20).

Отже, за теоремою 3 подвійний ряд (18) розбігається.

Приклад 4. Дослідимо на збіжність подвійний ряд

$$\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{n+m}}{(n+m)^2}. \qquad (21)$$

Використаємо функцію

$$f(x,y) = \frac{\sin\sqrt{x+y}}{(x+y)^2}$$

та невласний подвійний інтеграл

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\sin\sqrt{x+y}}{(x+y)^2}\, d\Omega. \qquad (22)$$

До ряду (21) застосовна теорема 3.

Очевидно, що перші дві умови теореми 3 виконуються. Покажемо, що виконується третя умова цієї теореми, тобто збігається невласний подвійний інтеграл (12).

Використаємо частині похідні $f'_x(x,y)$ і $f'_y(x,y)$. Легко перевірити, що

$$f'_x(x,y) = f'_y(x,y) =$$

$$= \frac{\cos\sqrt{x+y}}{2(x+y)^{\frac{5}{2}}} - \frac{2\sin\sqrt{x+y}}{(x+y)^3}$$

і

$$\max\left\{\left|f'_x(x,y)\right|, \left|f'_y(x,y)\right|\right\} <$$

$$< \frac{5}{2(x+y)^{\frac{5}{2}}} < \frac{5}{2(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}}},$$

якщо $x \geq 1$ і $y \geq 1$. Тому для всіх $n, m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in(n,n+1),\ y\in(m,m+1)} \left(|f'_x(x,y)| + \left|f'_y(x,y)\right|\right) <$$

$$< \frac{5}{2\left(n^2+m^2\right)^{\frac{5}{4}}}.$$

Оскільки на підставі прикладу 2 подвійний ряд

$$\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n^2+m^2\right)^{\frac{5}{4}}}$$

збігається, то збігається і ряд

$$\sum_{n=1,\ m=1}^{\infty} \sup_{x\in(n,n+1),\ y\in(m,m+1)} (|f'_x(x,y)| +$$

$$+\left|f'_y(x,y)\right|).$$

Отже, за зауваженням 4 невласний інтеграл (12) збігається.

Покажемо, що невласний інтеграл (22) збігається, тобто скінченною є границя

$$\lim_{a\to+\infty,\ b\to+\infty} \iint\limits_{\Omega_{a,b}} \frac{\sin\sqrt{x+y}}{(x+y)^2}\, d\Omega. \qquad (23)$$

Спочатку перейдемо в подвійному інтегралі $\iint\limits_{\Omega_{a,b}} \frac{\sin\sqrt{x+y}}{(x+y)^2}\, d\Omega$ від змінних x, y до нових змінних u, v:

$$x = u, \quad y = v - u.$$

Отримаємо

$$\iint\limits_{\Omega_{a,b}} \frac{\sin\sqrt{x+y}}{(x+y)^2}\, d\Omega = \iint\limits_{\Omega^*_{a,b}} \frac{\sin\sqrt{v}}{v^2}\, d\Omega^*,$$

де $\Omega^*_{a,b}$ – паралелограм з вершинами в точках $(1,2)$, $(1,1+b)$, $(a,a+b)$ і $(a,a+1)$. Очевидно, що

$$\iint\limits_{\Omega^*_{a,b}} \frac{\sin\sqrt{v}}{v^2}\, d\Omega^* =$$

$$= \int\limits_1^a \left(\int\limits_u^{u+b-1} \frac{\sin\sqrt{v}}{v^2}\, dv \right) du =$$

$$= 2\int\limits_1^a \left(\int\limits_{\sqrt{u}}^{\sqrt{u+b-1}} \frac{\sin t}{t^3}\, dt \right) du.$$

Оскільки за формулою інтегрування частинами та теоремою про середнє значення для деякого $t^* \in [\sqrt{u}, \sqrt{u+b-1}]$

$$\int\limits_{\sqrt{u}}^{\sqrt{u+b-1}} \frac{\sin t}{t^3}\, dt =$$

$$= -\int\limits_{\sqrt{u}}^{\sqrt{u+b-1}} \frac{1}{t^3}\, d\cos t =$$

$$= -\frac{\cos t}{t^3}\Bigg|_{\sqrt{u}}^{\sqrt{u+b-1}} + \int\limits_{\sqrt{u}}^{\sqrt{u+b-1}} \cos t\, d\frac{1}{t^3} =$$

$$= \frac{\cos\sqrt{u}}{\sqrt{u^3}} - \frac{\cos\sqrt{u+b-1}}{\sqrt{(u+b-1)^3}} + \cos t^* \int\limits_{\sqrt{u}}^{\sqrt{u+b-1}} d\frac{1}{t^3} =$$

$$= \frac{\cos\sqrt{u}}{\sqrt{u^3}} - \frac{\cos\sqrt{u+b-1}}{\sqrt{(u+b-1)^3}} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{(u+b-1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{u^3}} \right) \cos t^*,$$

то, очевидно, що існує скінченна границя

$$\lim_{a\to+\infty,\ b\to+\infty} \int\limits_1^a \left(\int\limits_{\sqrt{u}}^{\sqrt{u+b-1}} \frac{\sin t}{t^3}\, dt \right) du,$$

що збігається з (23).

Отже, невласний подвійний інтеграл (22) збігається. За теоремою 3 аналогічну властивість має подвійний ряд (21).

7. Заключні зауваження та літературні вказівки. Основні твердження статті – теореми 1, 3, 4 і 5 є новими. Теореми 3 і 4 є узагальненнями відповідних результатів автора для векторних рядів вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(див. [3]–[5]). Загальні твердження про збіжність числових рядів містяться в [6]–[11]. Дослідження збіжності операторних рядів наведено в [12]–[15].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Фихтенгольц Г.М.* Дифференциальное и интегральное исчисления, Т. 2. – М: Наука, 1966. – 800 с.

2. *Зорич В. Ф.* Математический анализ, Т. 2. – М.: Наука, 1984. – 640 с.

3. *Слюсарчук В. Ю.* Нові інтегральні ознаки збіжності рядів // IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (30 червня – 5 липня, 2014, м. Чернівці, Україна). Тези доповідей. – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2014. – С. 193-194.

4. *Слюсарчук В. Ю.* Нова інтегральна ознака збіжності рядів // Мат. Студії. – 2014. – **41**, № 2. – С. 198–200.

5. *Слюсарчук В. Ю.* Інтегральні ознаки збіжності рядів // Бук. мат. журн. – 2014. – **2**, № 2–3. – С. 208–213.

6. *Слюсарчук В. Е.* Некоторые признаки сходимости числовых рядов // Математика сегодня '90. – Киев: Вища школа, 1990. – С. 94–105.

7. *Слюсарчук В. Ю.* Деякі ознаки збіжності числових рядів // Математика сьогодні '93. – Київ: Вища школа, 1993. – С. 163-176.

8. *Слюсарчук В. Ю.* Нові ознаки збіжності невласних інтегралів і числових рядів // Математика сьогодні '94. – Київ: Вища школа, 1994. – С. 96-110.

9. *Слюсарчук В. Е.* Общая теорема о сходимости числовых рядов // Математика сьогодні '95. – Киев: Научное издательство "ТВіМС 1995. – С. 43-54.

10. *Слюсарчук В. Е.* Одно свойство абсолютно сходящихся числовых рядов // Математика сьогодні '97. – Киев: Научное издательство "ТВіМС 1997. – С. 28-42.

11. *Слюсарчук В. Ю.* Загальні теореми про збіжність числових рядів. – Рівне: Вид-во РДТУ, 2001. – 240 с.

12. *Слюсарчук В. Ю.* Умови збіжності операторного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-A}$ // Наук. вісник ЧНУ, Математика. – 2009. – Вип. 485. – С. 113–117.

13. *Слюсарчук В. Ю.* Операторний аналог ознаки д'Аламбера // Математика сьогодні '09. – Київ: Вид-во „Освіта України“, 2009. – №15. – С. 101–115.

14. *Слюсарчук В. Ю.* Операторний аналог ознаки Коші // Мат. Студії. – 2010. – **33**, №1. – С. 97–100.

15. *Слюсарчук В. Ю.* Операторний аналог ознаки Бертрана // Мат. Студії. – 2011. – **35**, №2. – С. 181–195.