

Буковинський державний фінансово-економічний університет
Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича

ПОШАРОВЕ НАБЛИЖЕННЯ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ МНОГОЧЛЕНІВ БЕРНШТЕЙНА ВІД БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Показано, що послідовність операторів Бернштейна B_n від багатьох змінних є *pu*-апроксимуючою послідовністю для підпростору P всіх поліномів на кубі $[0, 1]^s$, і з допомогою цих операторів отримано теорему про пошарове рівномірне наближення нарізно неперервних функцій на $X \times [0, 1]^s$.

We show that the sequence of Bernstein's operators B_n of several variables is a *pu*-approximating sequence for the subspace P of all polynomials on the cube $[0, 1]^s$. Using these operators, we obtain a theorem on the layer-wise uniform approximation of separately continuous functions on $X \times [0, 1]^s$.

1. **Вступ.** У праці [1] з допомогою класичних многочленів Бернштейна [2, с.100] для кожної нарізно неперервної функції $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ було вказано явні формули для послідовності сукупно неперервних функцій $f_n : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, які є поліноміальними відносно другої змінної і для яких вертикальні x -розрізи $f_n^x = f_n(x, \cdot)$ рівномірно на $[0, 1]$ збігаються до x -розрізу $f^x = f(x, \cdot)$ для кожного x з $[0, 1]$. Ця побудова дістала розвиток у серії наступних праць [3 - 5]. Виникає природна потреба узагальнити отримані результати на випадок функцій багатьох змінних. Тут ми робимо перший крок у цьому напрямку, розглянувши многочлени Бернштейна від багатьох змінних. Зауважимо, що многочлени Бернштейна від багатьох змінних вивчалися в дипломній роботі [6], яка була написана під керівництвом І.Ф.Григорчука. В даній замітці для кожної нарізно неперервної функції $f : X \times [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$ заданої на добутку довільного топологічного простору X і s -вимірного куба $[0, 1]^s$ ми наводимо явну конструкцію сукупно неперервних функцій $f_n : X \times [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$, які поліноміальні відносно другої сукупної змінної $y = (y_1, \dots, y_s) \in [0, 1]^s$ і такі, що для кожного x з X послідовність x -розрізів f_n^x рівномірно прямує до x -розрізу f^x на $[0, 1]^s$.

2. Многочлени Бернштейна від ба-

гатьох змінних. Нехай $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – множина натуральних чисел і $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для кожного $s \in \mathbb{N}$ розглянемо s -вимірний куб

$$[0, 1]^s = \{x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s : (\forall k = 1, \dots, s)(0 \leq x_k \leq 1)\}.$$

Многочленами Бернштейна для функції f від s змінних називаються поліноми виду

$$B_{n_1, \dots, n_s} f(x) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s} C_{n_1}^{k_1} \dots C_{n_s}^{k_s} \times \\ \times f\left(\frac{k_1}{n_1}, \dots, \frac{k_s}{n_s}\right) x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s} (1-x_1)^{n_1-k_1} \dots (1-x_s)^{n_s-k_s}$$

Введемо такі позначення: $x = (x_1, \dots, x_s)$ $k = (k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$, $n = (n_1, \dots, n_s) \in \mathbb{N}^s$, $\frac{k}{n} = (\frac{k_1}{n_1}, \dots, \frac{k_s}{n_s})$ і $\varphi_{n,k}(x) = C_{n_1}^{k_1} \dots C_{n_s}^{k_s} x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s} (1-x_1)^{n_1-k_1} \dots (1-x_s)^{n_s-k_s}$. Далі покладемо $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^s$. Для мультиіндексів $k' = (k'_1, \dots, k'_s)$ і $k'' = (k''_1, \dots, k''_s)$ будемо писати $k' \leq k''$, якщо $k'_i \leq k''_i$ для кожного $i = 1, \dots, s$. Введемо у розгляд множину $K_n^s = \prod_{i=1}^s \overline{0, n_i} = \{k \in \mathbb{N}_0^s : 0 \leq k \leq n\}$, де $\overline{0, n_i} = \{0, 1, \dots, n_i\}$ при $i = 1, \dots, s$. З допомогою цих скорочень многочлен Бернштейна $B_n f$ можна записати коротко так:

$$B_n f(x) = \sum_{k \in K_n^s} f\left(\frac{k}{n}\right) \varphi_{n,k}(x).$$

Лема 1. $\sum_{k \in K_n^s} \varphi_{n,k}(x) = 1$ для кожного $x \in \mathbb{R}^s$.

Доведення. Справді, використавши формулу бінома Ньютона $(a + b)^m = \sum_{j=0}^m C_m^j a^j b^{m-j}$ і зробивши заміну $a = x_i$, $b = 1 - x_i$, $j = k_i$, $m = n_i$, $i = 1, \dots, s$, отримаємо

$$1 = 1^{n_i} = (x_i + 1 - x_i)^{n_i} = \sum_{k_i=0}^{n_i} C_{n_i}^{k_i} x_i^{k_i} (1 - x_i)^{n_i - k_i}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K_n^s} \varphi_{n,k}(x) &= \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s} C_{n_1}^{k_1} \dots C_{n_s}^{k_s} \times \\ &\times x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s} (1 - x_1)^{n_1 - k_1} \dots (1 - x_s)^{n_s - k_s} = \\ &= \prod_{i=1}^s \sum_{k_i=0}^{n_i} C_{n_i}^{k_i} x_i^{k_i} (1 - x_i)^{n_i - k_i} = 1. \end{aligned}$$

Ми будемо використовувати відому нерівність [2, с.100].

Лема 2. $\sum_{j=0}^m C_m^j (j - mt)^2 t^j (1 - t)^{m-j} \leq \frac{m}{4}$ при $0 \leq t \leq 1$.

Позначимо символом $C(X)$ простір всіх неперервних функцій $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ на топологічному просторі X .

Теорема 1. Нехай $f \in C[0, 1]^s$. Тоді $B_n f \rightrightarrows f$ на $[0, 1]^s$, якщо $n_i \rightarrow \infty$ для кожного $i = 1, \dots, s$.

Доведення. Для точки $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$ покладемо $|x| = \max\{|x_1|, \dots, |x_s|\}$. Нехай ε — довільне додатне число.

Оскільки функція f є неперервною на $[0, 1]^s$, а $[0, 1]^s$ є компактом, то за теоремою Кантора f є рівномірно неперервною на $[0, 1]^s$. Тому існує таке $\delta > 0$, що для довільних x' і x'' з $[0, 1]^s$, таких, що $|x' - x''| < \delta$, виконується нерівність $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

З леми 1 випливає, що

$$f(x) = \sum_{k \in K_n^s} f(x) \varphi_{n,k}(x)$$

для кожного $x \in [0, 1]^s$. Тому

$$|f(x) - B_n f(x)| = \left| \sum_{k \in K_n^s} (f(x) - f(\frac{k}{n})) \varphi_{n,k}(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k \in K_n^s} |f(x) - f(\frac{k}{n})| \varphi_{n,k}(x) = S(x)$$

для кожного $x \in [0, 1]^s$, адже $\varphi_{n,k}(x) \geq 0$ на $[0, 1]^s$. Розглянемо дві суми

$$\Sigma_1 = \sum_{|\frac{k}{n} - x| < \delta} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| \varphi_{n,k}(x)$$

$$\Sigma_2 = \sum_{|\frac{k}{n} - x| \geq \delta} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| \varphi_{n,k}(x).$$

Зрозуміло, що $S(x) = \Sigma_1 + \Sigma_2$, отже,

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Для $|\frac{k}{n} - x| < \delta$ будемо мати, що $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| < \varepsilon$, отже

$$\Sigma_1 \leq \varepsilon \sum_{|\frac{k}{n} - x| < \delta} \varphi_{n,k}(x) \leq \varepsilon \sum_{k \in K_n^s} \varphi_{n,k}(x) = \varepsilon.$$

Для оцінки Σ_2 використаємо те, що кожна неперервна функція на кубі $[0, 1]^s$ є обмеженою, отже, існує таке число $M > 0$, що $|f(x)| \leq M$ на $[0, 1]^s$. Тоді

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{|\frac{k}{n} - x| \geq \delta} |f(\frac{k}{n}) - f(x)| \varphi_{n,k}(x) \leq \\ &\leq 2M \sum_{|\frac{k}{n} - x| \geq \delta} \varphi_{n,k}(x). \end{aligned}$$

Оскільки $|\cdot|$ — максимум-норма, то $|\frac{k}{n} - x| = \max_{i=1, \dots, s} |\frac{k_i}{n_i} - x_i|$. Тому нерівність $|\frac{k}{n} - x| \geq \delta$ рівносильна тому, що існує такий номер $i = 1, \dots, s$, для якого виконується нерівність $|\frac{k_i}{n_i} - x_i| \geq \delta$. В такому разі

$$\begin{aligned} \sum_{|\frac{k}{n} - x| \geq \delta} \varphi_{n,k}(x) &\leq \\ &\leq \sum_{|\frac{k_1}{n_1} - x_1| \geq \delta} \varphi_{n,k}(x) + \dots + \sum_{|\frac{k_s}{n_s} - x_s| \geq \delta} \varphi_{n,k}(x) \end{aligned}$$

для кожного $x \in [0, 1]^s$, адже $\varphi_{n,k}(x) \geq 0$ на $[0, 1]^s$.

Для подальшої оцінки Σ_2 використаємо лему 2 та той факт, що нерівність $|\frac{k_i}{n_i} -$

$|x_i| \geq \delta$ рівносильна нерівності $\frac{(k_i - n_i x_i)^2}{\delta^2 n_i^2} \geq 1$.
Тоді

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq \frac{2M}{\delta^2} \left(\frac{1}{n_1^2} \sum_{\substack{k_1 \\ |k_1/n_1 - x_1| \geq \delta}} (k_1 - n_1 x_1)^2 \varphi_{n,k}(x) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n_s^2} \sum_{\substack{k_s \\ |k_s/n_s - x_s| \geq \delta}} (k_s - n_s x_s)^2 \varphi_{n,k}(x) \right) \leq \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2} \left(\frac{1}{n_1^2} \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_s=1}^{n_s} (k_1 - n_1 x_1)^2 \varphi_{n,k}(x) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n_s^2} \sum_{k_1=1}^{n_1} \dots \sum_{k_s=1}^{n_s} (k_s - n_s x_s)^2 \varphi_{n,k}(x) \right). \end{aligned}$$

Але

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s} (k_1 - n_1 x_1)^2 \varphi_{n,k} = \\ &= \sum_{k_1=0}^{n_1} (k_1 - n_1 x_1)^2 C_{n_1}^{k_1} x_1^{k_1} (1 - x_1)^{n_1 - k_1} \times \\ &\quad \sum_{k_2=0}^{n_2} C_{n_2}^{k_2} x_2^{k_2} (1 - x_2)^{n_2 - k_2} \times \dots \times \\ &\quad \sum_{k_s=0}^{n_s} C_{n_s}^{k_s} x_s^{k_s} (1 - x_s)^{n_s - k_s} \leq \frac{n_1}{4} \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = \frac{n_1}{4}. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_s=0}^{n_s} (k_i - n_i x_i)^2 \varphi_{n,k}(x) \leq \frac{n_i}{4}$$

при $i = 2, \dots, s$.

Тому

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq \frac{2M}{4\delta^2} \left(\frac{n_1}{n_1^2} + \dots + \frac{n_s}{n_s^2} \right) = \\ &= \frac{M}{2\delta^2} \left(\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_s} \right) = A_{n_1, \dots, n_s}. \end{aligned}$$

Ясно, що $A_{n_1, \dots, n_s} \rightarrow 0$ при $n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty, \dots, n_s \rightarrow \infty$, тому існує такий номер N , що $A_{n_1, \dots, n_s} < \varepsilon$, як тільки $n_i \geq N$ при $i = 1, \dots, s$. Тому і $\Sigma_2 < \varepsilon$ при $n_i \geq N$ для $i = 1, \dots, s$.

Таким чином, для будь-якого $x \in [0, 1]^s$ виконується нерівність $|f(x) - B_n f(x)| <$

$\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ при $n_i \geq N$ для $i = 1, \dots, s$. Тому $B_n f \rightrightarrows f$ на $[0, 1]$ при $n_i \rightarrow \infty$ для $i = 1, \dots, s$.

3. Пошарове рівномірне наближення функцій $f : X \times [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$.

Для топологічного простору Y символом $C_p(Y)$ позначимо простір $C(Y)$ всіх неперервних функцій $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, наділений топологією поточної збіжності $\mathcal{T}_p$, що породжується сукупністю переднорм

$$q_y(g) = |g(y)|,$$

де y пробігає множину Y [7, с.30]. Для компактного простору Y символом $C_u(Y)$ ми позначаємо банахів простір $(C(Y), \|\cdot\|)$ з рівномірною нормою

$$\|g\| = \max_{y \in Y} |g(y)|,$$

що породжує на просторі $C(Y)$ топологію $\mathcal{T}_u$ рівномірної збіжності. Неперервне відображення $A : C_p(Y) \rightarrow C_u(Y)$ ми називаємо *ри-неперервним*. Послідовність операторів $A_n : C(Y) \rightarrow L$ називається *ри-апроксимуючою* для L , якщо ці оператори *ри-неперервні* і $A_n g \rightarrow g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g \in C(Y)$. Символом P позначимо підпростір усіх многочленів від s змінних на кубі $[0, 1]^s$, тобто функцій $h : [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$, які задаються формулою

$$h(y_1, \dots, y_s) = \sum_{k \in K_n^s} a_k y^k,$$

де $y^k = (y_1^{k_1}, \dots, y_n^{k_n})$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $k = (k_1, \dots, k_n)$.

Для встановлення наступного результату, нам буде потрібна така лема.

Лема 3. Нехай $y_j \in Y$ і $\varphi_j \in C(Y)$ при $j = 1, \dots, m$, Y – компактний простір і оператор $A : C(Y) \rightarrow C(Y)$ визначений формулою

$$(Ag)(y) = \sum_{j=1}^m g(y_j) \varphi_j(y).$$

Тоді A – лінійний *ри-неперервний* оператор.

Доведення. Для довільного $y \in Y$ маємо:

$$|(Ag)(y)| \leq \sum_{j=1}^m |g(y_j)| |\varphi_j(y)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^m q_{y_j}(g) \|\varphi_j\| \leq C \max_{j=1, \dots, n} q_{y_j}(g),$$

де $C = \sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|$. Тому

$$\|Ag\| \leq C \max_{j=1, \dots, n} q_{y_j}(g).$$

За критерієм неперервності лінійного оператора в поліномованих просторах [8, с.12] оператор $A : Cp(Y) \rightarrow Cu(Y)$ буде неперервним.

Теорема 2. Нехай $Y = [0, 1]^s$ і $B_n g = B_{n_1, \dots, n_s} g$ – многочлен Бернштейна для функції $g \in C[0, 1]^s$, який отримується при $n_1 = n_2 = \dots = n_s = n$, де n – довільне натуральне число. Тоді послідовність операторів B_n є ru -апроксимуючою для підпростору P всіх поліномів на $[0, 1]^s$.

Доведення. З теореми 1 негайно випливає, що $B_n g \rightarrow g$ в $C_u[0, 1]^s$ при $n \rightarrow \infty$. Крім того, $B_n g \in P$ для кожного n . Те, що оператори B_n є ru -неперервними отримується з леми 3.

З теореми 2 випливає теорема про пошарове рівномірне наближення нарізно неперервних функцій $f : X \times [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$. Для функції $f : X \times Y \rightarrow Z$ і точки $(x, y) \in X \times Y$ ми покладаємо

$$f^x(y) = f_y(x) = f(x, y).$$

Теорема 3. Нехай X – довільний топологічний простір, $f : X \times [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція, $f_n(x, y) = (B_n f^x)(y)$ для кожного номера n і точок $x \in X$ і $y \in [0, 1]^s$. Тоді $f_n : X \times [0, 1]^s \rightarrow \mathbb{R}$ – сукупно неперервні функції, $f_n^x \in P$ для кожного n і довільного $x \in X$ і $f_n^x \Rightarrow f^x$ на $[0, 1]^s$ для кожного $x \in X$.

Доведення. Це негайно випливає з теореми 2 і теореми 3б праці [4].

Висловлюю щиру вдячність Володимир Кириловичу Маслюченку за постійну допомогу та підтримку при написанні цієї статті.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Власюк Г.А., Маслюченко В.К. Многочлены Бернштейна і нарізно неперервні функції // Наук.

вісник Чернівецького ун-ту. Вип. 336-337. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 52-59.

2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.2. – С.-Петербург-Москва-Краснодар: Лань, 2005. – 464с.

3. Волошин Г.А., Маслюченко В.К. Про наближення нарізно неперервних функцій, 2π -періодичних відносно другої змінної// Карп. матем. публ. – 2010. – 2, №1 – С. 4-14.

4. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Маслюченко О.В. Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій // Карп. матем. публ. – 2010. – 2, №2 – С.11-21.

5. Волошин Г.А., Маслюченко В.К., Нестеренко О.Н. Про апроксимацію відображень зі значеннями у просторі неперервних функцій// Карп. матем. публ. – 2012. – 4, №1 – С.23-27.

6. Марчук Л.М. Про наближення функцій багатьох змінних поліномами Бернштейна. Дипломна робота. – Чернівці, 1986. – 36 с.

7. Маслюченко В.К. Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці: Рута, 2002. – 72с.

8. Маслюченко В.К. Лінійні неперервні оператори. – Чернівці: Рута, 2002. – 72с.