

НАБЛИЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ПОВТОРНИМИ СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень повторних сум Валле Пуссена на класах періодичних функцій, які дозволяють аналітичне подовження у фіксовану смугу комплексної площини. У певних випадках ці рівності забезпечують розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

For upper bounds of the deviations of repeated de la Vallée Poussin sums taken over classes of periodic functions that admit analytic extensions to a fixed strip of the complex plane, we obtain asymptotic equalities. In certain cases, these equalities give a solution of the corresponding Kolmogorov-Nikolsky problem.

Вступ. Роботу присвячено дослідженню питань наближення в рівномірній метриці періодичних аналітичних функцій дійсної змінної тригонометричними поліномами, що породжуються повторним застосуванням методу підсумовування Валле Пуссена.

Нехай L — множина сумовних 2π -періодичних функцій, $f \in L$ і

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx)$$

— ряд Фур'є функції f , $a_0(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$, $k \in \mathbb{N}$ — коефіцієнти Фур'є функції f .

Найпростішим і разом із тим найбільш природним прикладом лінійного процесу апроксимації неперервних періодичних функцій дійсної змінної може служити наближення цих функцій елементами послідовностей частинних сум ряду Фур'є $S_n(f; x)$. На класі інтегралів Пуассона суми Фур'є $S_n(f; x)$ забезпечують найкращий порядок наближення і певний інтерес викликають питання наближення поліномами, які є середніми арифметичними деяких множин сум Фур'є.

Суми Фейєра $\sigma_n(f; x)$ функції $f(x)$ задаються співвідношенням

$$\sigma_n(f; x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f; x),$$

тобто є середніми арифметичними перших n частинних сум Фур'є цієї функції. Як відомо, послідовність поліномів $\sigma_n(f; x)$ рівномірно збігається до своєї функції для будь-якої $f \in C$.

Суми Валле Пуссена

$$V_{n,p}(f; x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f; x)$$

є певним узагальненням сум $\sigma_n(f; x)$ і мають апроксимативні властивості істотно залежні від параметра p .

Тригонометричні поліноми $V_{n,\bar{p}}^{(2)}(f; x)$, що породжуються повторним застосуванням методу підсумовування Валле Пуссена

$$\begin{aligned} V_{n,\bar{p}}^{(2)}(f; x) &= \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} V_{k+1,p_2}(f; x) = \\ &= \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^k S_m(f; x), \end{aligned}$$

являють собою подальше узагальнення класичних методів Фур'є, Валле Пуссена та Фейєра. При певному виборі параметрів p_1 та p_2 ці поліноми збігаються з сумами $S_n(f; x)$, $V_{n,p}(f; x)$ і $\sigma_n(f; x)$. Дану роботу присвячено вивченню апроксимативних властивостей таких методів наближення.

Широкий спектр методів наближення можна подати у вигляді лінійних середніх ря-

дів Фур'є, які породжуються нескінченними трикутними матрицями наступним чином [1]. За допомогою нескінченної трикутної матриці чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\lambda_0^{(n)} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k^{(n)} = 0$ за умови $k \geq n$, кожній функції $f \in L$ можна поставити у відповідність послідовність тригонометричних поліномів

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{a_0(f)}{2} \lambda_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx).$$

Кажуть, що матриця $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$ породжує лінійний метод наближення $U_n(\Lambda)$.

У вигляді тригонометричних поліномів $U_n(f; x; \Lambda)$ суми Валле Пуссена $V_{n,p}(f; x)$ функції $f(x)$ можна задати за допомогою матриці $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, елементи якої задаються таким співвідношенням:

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \leq k \leq n - p - 1, \\ 1 - \frac{k-n+p}{p}, & n - p < k \leq n - 1. \end{cases}$$

У випадку, коли $p = n$, суми Валле Пуссена співпадають із сумами Фейєра $\sigma_n(f; x)$, а за $p = 1$ — із частинними сумами $S_n(f; x)$ ряду Фур'є функції $f(x)$.

Поліноми $V_{n,p}^{(2)}(f; x)$, які породжуються повторним застосуванням методу підсумування Валле Пуссена, можна також подати у вигляді поліномів $U_n(f; x; \Lambda)$ [2]. Якщо $p_1 = 1$ і $p_2 = 1$, то ці поліноми є частинними сумами ряду Фур'є $S_n(f; x)$, коли ж $p_1 = 1$ або $p_2 = 1$ — сумами Валле Пуссена $V_{n,p}(f; x)$. У випадку $p_1 = n$, $p_2 = 1$ повторні суми Валле Пуссена збігаються із сумами Фейєра $\sigma_n(f; x)$.

Наслідуючи [1] класи періодичних функцій запровадимо наступним чином. Нехай $\psi(k)$ — довільна функція натурального аргументу і β — фіксоване дійсне число. Множина неперервних функцій $f(x)$, для яких ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} \left(a_k \cos(kx + \frac{\beta\pi}{2}) + b_k \sin(kx + \frac{\beta\pi}{2}) \right)$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції $f_\beta^\psi(x)$, позначається C_β^ψ . Якщо $f \in C_\beta^\psi$ і, крім того, $f_\beta^\psi(x) \in S_M^0$, тобто виконано умови

$$\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t) dt = 0, \quad \text{ess sup} |f_\beta^\psi(t)| \leq 1,$$

то множина таких функцій позначається $C_{\beta,\infty}^\psi$. Вважається, що $f \in C_\beta^\psi H_\omega$ у випадку, якщо $f_\beta^\psi(x) \in H_\omega$, тобто виконується умова

$$|f_\beta^\psi(t') - f_\beta^\psi(t'')| \leq \omega(|t' - t''|), \quad \forall t', t'' \in \mathbb{R},$$

де $\omega(t)$ — довільний фіксований модуль неперервності.

Позначимо символом D_q множину послідовностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для яких має місце співвідношення

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad q \in (0; 1).$$

У цьому випадку множини $C_{\beta,\infty}^\psi$ і $C_\beta^\psi H_\omega$ складаються з 2π -періодичних функцій, що дозволяють продовження до функцій $F(z) = F(x+iy)$, аналітичних у смужці $|\Im z| < \ln \frac{1}{q}$ [3].

Важливим прикладом таких класів функцій є класи неперервних 2π -періодичних функцій $f(x)$, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t) P_\beta^q(t) dt,$$

у якій

$$P_\beta^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2})$$

— відоме ядро Пуассона, $q \in (0; 1)$, $\beta \in \mathbb{R}$. В цьому випадку класи $C_{\beta,\infty}^\psi$ і $C_\beta^\psi H_\omega$ позначаються $C_{\beta,\infty}^q$ і $C_\beta^q H_\omega$ відповідно і називаються класами інтегралів Пуассона (див., напр., [3]).

Дослідженням питань наближення таких класів присвячено ряд відомих робіт.

У 1946 році С.М. Нікольський [4] розглянув величину

$$\mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^q; S_n) := \sup_{f \in C_{\beta,\infty}^q} \|f(x) - S_n(f; x)\|_C,$$

де $S_n(f; x)$ — частинна сума порядку n ряду Фур'є функції $f(x)$, і показав, що виконується рівність

$$\mathcal{E}(C_{\beta, \infty}^q; S_n) = \frac{8q^n}{\pi^2} K(q) + O(1) \frac{q^n}{n},$$

у якій

$$K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 t}}, \quad q \in [0; 1),$$

— повний еліптичний інтеграл першого роду. У 1980 році С.Б. Стєчкін [5] цей результат передовів іншим методом, який дозволив уточнити залишковий член цієї рівності.

Аналогічну задачу для класів $C_{\beta}^q H_{\omega}$ розв'язав у 2001 році О.І. Степанець у роботі [3], де показав, що для величин

$$\mathcal{E}(C_{\beta}^q H_{\omega}; S_n) := \sup_{f \in C_{\beta}^q H_{\omega}} \|f(x) - S_n(f; x)\|_C$$

при $n \rightarrow \infty$ виконується рівність

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_{\beta}^q H_{\omega}; S_n) &= \frac{4q^n}{\pi^2} K(q) \theta_n(\omega) \times \\ &\times \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n} \omega(1/n), \end{aligned}$$

де $\theta_n(\omega) \in [1/2; 1]$, причому $\theta_n(\omega) = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n , q і β .

Питання наближення класів інтегралів Пуассона звичайними та повторними сумами Валле Пуссена вивчалися багатьма авторами [6–10]. У роботі [7], зокрема було показано, що має місце асимптотична при $n \rightarrow \infty$ формула

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_{\beta, \infty}^q; V_{n,p}) &:= \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^q} \|f(x) - V_{n,p}(f; x)\|_C = \\ &= \frac{q^{n-p+1}}{p} \left(\frac{4}{\pi^2} K_{p,q} + O(1) \frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s} \right), \end{aligned}$$

де

$$K_{p,q} = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1 - 2q^p \cos pt + q^{2p}}}{1 - 2q \cos pt + q^2} dt,$$

$$s = s(p) = \begin{cases} 1, & p = 1 \\ 3, & p = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

$O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n , q , p і β .

Для точних верхніх меж відхилень сум Фур'є на класах функцій $C_{\beta, \infty}^{\psi}$ та $C_{\beta}^{\psi} H_{\omega}$, $\psi(k) \in D_q$ у роботі [11] отримано при $n \rightarrow \infty$ асимптотичні формули

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_{\beta, \infty}^{\psi}; S_n) &:= \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^{\psi}} \|f(x) - S_n(f; x)\|_C = \\ &= \psi(n) \left(\frac{8}{\pi^2} K(q) + O(1) \left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) \right), \\ \mathcal{E}(C_{\beta}^{\psi} H_{\omega}; S_n) &:= \sup_{f \in C_{\beta}^{\psi} H_{\omega}} \|f(x) - S_n(f; x)\|_C = \\ &= \psi(n) \left(\frac{4\theta_n(\omega)}{\pi^2} K(q) \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t dt + \right. \\ &\quad \left. + O(1) \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right) (\varepsilon_n + \frac{1}{n})}{(1-q)^2} \right), \end{aligned}$$

де

$$\varepsilon_n = \sup_{k \geq n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|,$$

$\theta_n(\omega) \in [1/2; 1]$, причому $\theta_n(\omega) = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n , q , β і $\psi(k)$.

У роботі [12] отримано асимптотичні формули для точних верхніх меж відхилень сум Валле Пуссена на класах аналітичних функцій $C_{\beta, \infty}^{\psi}$ та $C_{\beta}^{\psi} H_{\omega}$, $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0; 1)$. Ці результати також було розповсюджено на двовимірні аналоги класів $C_{\beta, \infty}^{\psi}$, $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0; 1)$ у роботах [13, 14].

Результати. У цій роботі розглядається асимптотична поведінка при $n \rightarrow \infty$ величин

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_{\beta, \infty}^{\psi}; V_{n, \bar{p}}^{(2)}) &:= \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^{\psi}} \|f(x) - V_{n, \bar{p}}^{(2)}(f; x)\|_C, \\ \mathcal{E}(C_{\beta}^{\psi} H_{\omega}; V_{n, \bar{p}}^{(2)}) &:= \sup_{f \in C_{\beta}^{\psi} H_{\omega}} \|f(x) - V_{n, \bar{p}}^{(2)}(f; x)\|_C, \end{aligned}$$

що є точними верхніми межами відхилень повторних сум Валле Пуссена $V_{n, \bar{p}}^{(2)}(f; x)$ на

класах аналітичних періодичних функцій $C_{\beta,\infty}^\psi$ і $C_\beta^\psi H_\omega$, $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0; 1)$ відповідно.

Теорема. Нехай $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0; 1)$, $\psi(k) > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $\omega(t)$ — довільний модуль неперервності. Тоді при $n - \Sigma_{\bar{p}} \rightarrow \infty$, $\Sigma_{\bar{p}} = p_1 + p_2$ має місце

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_{\beta,\infty}^\psi; V_{n,\bar{p}}^{(2)}) = & \\ = \frac{8\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{\pi p_1 p_2 (1 + q)^3} \Pi\left(\frac{4q}{(1 + q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1 + q}\right) + & \\ + O(1)\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2) \left(\frac{1}{p_1 p_2 (n - \Sigma_{\bar{p}})(1 - q)^4} + \right. & \\ \left. \frac{q^{p_1 - 1} + q^{p_2 - 1}}{p_1 p_2 (1 - q)^3} + \frac{\varepsilon_{n - \Sigma_{\bar{p}}}}{(1 - q)^2}\right), & \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C_\beta^\psi H_\omega; V_{n,\bar{p}}^{(2)}) = & \\ = \frac{4\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{\pi^2 p_1 p_2 (1 + q)^3} \Pi\left(\frac{4q}{(1 + q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1 + q}\right) e_{n - \Sigma_{\bar{p}}}(\omega) + & \\ + O(1)\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2) \left(\frac{\omega((n - \Sigma_{\bar{p}})^{-1})}{p_1 p_2 (n - \Sigma_{\bar{p}})(1 - q)^5} + \right. & \\ + \frac{q^{p_2 - 1}\omega((n - p_1)^{-1}) + q^{p_1 - 1}\omega((n - p_2)^{-1})}{p_1 p_2 (1 - q)^3} + & \\ \left. + \frac{\varepsilon_{n - \Sigma_{\bar{p}}}\omega((n - \Sigma_{\bar{p}})^{-1})}{(1 - q)^2}\right), & \quad (2) \end{aligned}$$

де

$$\Pi(n; k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{(1 - n \sin^2 u) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}$$

— повний еліптичний інтеграл третього роду,

$$e_{n - \Sigma_{\bar{p}}}(\omega) = \theta_n(\omega) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2\tau(n - \Sigma_{\bar{p}})^{-1}) \sin \tau d\tau,$$

$$\varepsilon_{n - \Sigma_{\bar{p}}} = \sup_{k \geq n - \Sigma_{\bar{p}}} \left| \frac{\psi(k + 1)}{\psi(k)} - q \right|,$$

$\theta_n(\omega) \in [1/2; 1]$, причому $\theta_n(\omega) = 1$, якщо $\omega(t)$ — опуклий модуль неперервності, $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена щодо n , q , β , p_1 , p_2 і $\psi(k)$.

Доведення

$\forall f(x) \in C_\beta^\psi$, у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ має місце

$$\begin{aligned} \delta_{n,\bar{p}}^{(2)}(f; x) = f(x) - V_{n,\bar{p}}^{(2)}(f; x) = & \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x + t) \sum_{k=n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}^{\infty} (1 - \lambda_k^{(n)}) \times & \\ \times \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{\pi} \times & \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x + t) \sum_{k=n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}^{\infty} (1 - \lambda_k^{(n)}) \times & \\ \times \frac{\psi(k)}{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)} \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = & \\ = \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x + t) \times & \\ \times \sum_{k=n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}^{\infty} (1 - \lambda_k^{(n)}) \left[\frac{\psi(k)}{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)} - \right. & \\ \left. - \frac{q^k}{q^{n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}} \right] \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt + & \\ + \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x + t) \times & \\ \times \sum_{k=n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}^{\infty} \frac{(1 - \lambda_k^{(n)}) q^k}{q^{n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}} \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt = & \\ = \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{\pi q^{n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x + t) \times & \\ \times \sum_{k=n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}^{\infty} (1 - \lambda_k^{(n)}) q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt + & \\ + \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x + t) r_{n - \Sigma_{\bar{p}}}(t) dt, & \quad (3) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} r_{n - \Sigma_{\bar{p}}}(t) = r_{n - \Sigma_{\bar{p}}}(\psi; \beta; t) = & \\ = \sum_{k=n - \Sigma_{\bar{p}} + 3}^{\infty} (1 - \lambda_k^{(n)}) \left[\frac{\psi(k)}{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)} - \right. & \end{aligned}$$

$$-\frac{q^k}{q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+2}} \left] \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}).$$

Розглянемо величину $r_{n-\Sigma_{\bar{p}}}(t)$. Оскільки

$$\begin{aligned} & \prod_{l=1}^{i-1} \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + l + 2)}{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + l + 1)} = \\ & = \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 3) \psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 4)}{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2) \psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 3)} \dots \\ & \dots \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 1 + i)}{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + i)} = \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 1 + i)}{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} r_{n-\Sigma_{\bar{p}}}(t) &= \sum_{i=2}^{\infty} (1 - \lambda_{n-\Sigma_{\bar{p}}+1+i}^{(n)}) \times \\ & \times \left[\frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 1 + i)}{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)} - \frac{q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+1+i}}{q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+2}} \right] \times \\ & \times \cos((n - \Sigma_{\bar{p}} + 1 + i)t + \frac{\beta\pi}{2}) = \\ & = \left[\sum_{i=2}^{\infty} (1 - \lambda_{n-\Sigma_{\bar{p}}+1+i}^{(n)}) \times \right. \\ & \times \left(\prod_{l=1}^{i-1} \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + l + 2)}{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 1 + l)} - q^{i-1} \right) \times \\ & \left. \times \cos((n - \Sigma_{\bar{p}} + 1 + i)t + \frac{\beta\pi}{2}) \right]. \end{aligned}$$

Враховуючи оцінку із [11]

$$\begin{aligned} & \left| \prod_{l=1}^{i-1} \frac{\psi(m + l + 1)}{\psi(m + l)} - q^{i-1} \right| \leq \\ & \leq (q + \varepsilon_m)^{i-1} - q^{i-1}, \end{aligned}$$

де

$$\varepsilon_m = \sup_{k \geq m} \left| \frac{\psi(k + 1)}{\psi(k)} - q \right|,$$

та умову $0 \leq 1 - \lambda_k^{(n)} \leq 1$, маємо

$$\begin{aligned} & |r_{n-\Sigma_{\bar{p}}}(t)| \leq \\ & \leq \sum_{i=2}^{\infty} \left| \prod_{l=1}^{i-1} \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + l + 2)}{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 1 + l)} - q^{i-1} \right| \leq \\ & \leq \sum_{i=2}^{\infty} (q + \varepsilon_{n-\Sigma_{\bar{p}}+1})^{i-1} - q^{i-1} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{q + \varepsilon_{n-\Sigma_{\bar{p}}+1}}{1 - q - \varepsilon_{n-\Sigma_{\bar{p}}+1}} - \frac{q}{1 - q} \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon_{n-\Sigma_{\bar{p}}+1}}{(1 - q - \varepsilon_{n-\Sigma_{\bar{p}}+1})(1 - q)}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$R_{n-\Sigma_{\bar{p}}}(f_{\beta}^{\psi}; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(x + t) r_{n-\Sigma_{\bar{p}}}(t) dt.$$

Має місце оцінка [11]

$$\|R_{n-\Sigma_{\bar{p}}}(f_{\beta}^{\psi}; x)\|_C = O(1) \frac{\varepsilon_{n-\Sigma_{\bar{p}}} E_{n-\Sigma_{\bar{p}}}(f_{\beta}^{\psi})_C}{(1 - q)^2},$$

у якій

$$E_n(f)_C = \inf_{t_{n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C$$

— найкраще наближення функції f у метриці C тригонометричними поліномами порядку $n - 1$.

Нехай далі $J_{\beta}^{\psi}(\varphi)$ — функція, для якої $(J_{\beta}^{\psi}(\varphi))_{\beta}^{\psi} = \varphi$, $\varphi \in S_M^0$ або $\varphi \in H_{\omega}$. У випадку $\psi(k) = q^k$, $q \in (0; 1)$ позначимо $J_{\beta}^{\psi}(\varphi) = J_{\beta}^q(\varphi)$. Тоді $\forall f \in C_{\beta}^{\psi}$, $x \in \mathbb{R}$

$$\delta_{n,\bar{p}}^{(2)}(J_{\beta}^q(f_{\beta}^{\psi}); x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\beta}^{\psi}(x + t) \times$$

$$\times \sum_{k=n-\Sigma_{\bar{p}}+2}^{\infty} (1 - \lambda_k^{(n)}) q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}) dt.$$

Отже, на підставі (3), отримуємо

$$\begin{aligned} \delta_{n,\bar{p}}^{(2)}(f; x) &= \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+2}} \delta_{n,\bar{p}}^{(2)}(J_{\beta}^q(f_{\beta}^{\psi}); x) + \\ & + \psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2) R_{n-\Sigma_{\bar{p}}}(f; x). \end{aligned}$$

Використовуюючи міркування роботи [11] можна показати, що для $f \in C_{\beta,\infty}^{\psi}$ має місце

$$\|\delta_{n,\bar{p}}^{(2)}(f; x)\|_C = \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{q^{n-\Sigma_{\bar{p}}+2}} \times$$

$$\times \|\delta_{n,\bar{p}}^{(2)}(J_{\beta}^q(f_{\beta}^{\psi}); x)\|_C + O(1) \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2) \varepsilon_{n-\Sigma_{\bar{p}}}}{(1 - q)^2},$$

а для $f \in C_{\beta}^{\psi} H_{\omega}$

$$\|\delta_{n,\bar{p}}^{(2)}(f; x)\|_C =$$

$$= \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{q^{n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}} \|\delta_{n, \bar{p}}^{(2)}(J_{\beta}^q(f_{\beta}^{\psi}); x)\|_C + \frac{q^{n-p_1+1} + q^{n-p_2+1}}{p_1 p_2 (1-q)^3}, \quad (6)$$

$$+ O(1) \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2) \varepsilon_{n - \Sigma_{\bar{p}}} E_{n - \Sigma_{\bar{p}}}(f_{\beta}^{\psi})_C}{(1-q)^2}$$

і, крім того,

$$E_{n - \Sigma_{\bar{p}}}(f_{\beta}^{\psi})_C = O(1) \omega((n - \Sigma_{\bar{p}})^{-1}).$$

Враховуючи, що

$$\sup_{f \in C_{\beta, \infty}^{\psi}} \|\delta_{n, \bar{p}}^{(2)}(J_{\beta}^q(f_{\beta}^{\psi}), \cdot)\|_C =$$

$$= \sup_{\varphi \in S_M^0} \|\delta_{n, \bar{p}}^{(2)}(J_{\beta}^q(\varphi), \cdot)\|_C,$$

$$\sup_{f \in C_{\beta}^{\psi} H_{\omega}} \|\delta_{n, \bar{p}}^{(2)}(J_{\beta}^q(f_{\beta}^{\psi}), \cdot)\|_C =$$

$$= \sup_{\varphi \in H_{\omega}} \|\delta_{n, \bar{p}}^{(2)}(J_{\beta}^q(\varphi), \cdot)\|_C,$$

отримуємо

$$\mathcal{E}(C_{\beta, \infty}^{\psi}, V_{n, \bar{p}}^{(2)}) = \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{q^{n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}} \mathcal{E}(C_{\beta, \infty}^q, V_{n, \bar{p}}^{(2)}) + O(1) \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2) \varepsilon_{n - \Sigma_{\bar{p}}}}{(1-q)^2}, \quad (4)$$

$$\mathcal{E}(C_{\beta}^{\psi} H_{\omega}, V_{n, \bar{p}}^{(2)}) = \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{q^{n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}} \mathcal{E}(C_{\beta}^q H_{\omega}, V_{n, \bar{p}}^{(2)}) + O(1) \frac{\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2) \varepsilon_{n - \Sigma_{\bar{p}}} \omega((n - \Sigma_{\bar{p}})^{-1})}{(1-q)^2}, \quad (5)$$

де

$$\mathcal{E}(C_{\beta, \infty}^q, V_{n, \bar{p}}^{(2)}) = \sup_{f \in C_{\beta, \infty}^q} \|\delta_{n, \bar{p}}^{(2)}(f; x)\|_C,$$

$$\mathcal{E}(C_{\beta}^q H_{\omega}, V_{n, \bar{p}}^{(2)}) = \sup_{f \in C_{\beta}^q H_{\omega}} \|\delta_{n, \bar{p}}^{(2)}(f; x)\|_C.$$

Із результатів роботи [10] для випадку $r = 2$ у позначеннях теореми маємо

$$\mathcal{E}(C_{\beta, \infty}^q; V_{n, \bar{p}}^{(2)}) = \frac{8q^{n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}}{\pi p_1 p_2 (1+q)^3} \Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) + O(1) \left(\frac{q^{n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}}{p_1 p_2 (n - \Sigma_{\bar{p}}) (1-q)^4} + \right.$$

$$\mathcal{E}(C_{\beta}^q H_{\omega}; V_{n, \bar{p}}^{(2)}) = \frac{4q^{n - \Sigma_{\bar{p}} + 2}}{\pi^2 p_1 p_2 (1+q)^3} \Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) e_{n - \Sigma_{\bar{p}}}(\omega) + O(1) \left(\frac{q^{n - \Sigma_{\bar{p}} + 2} \omega((n - \Sigma_{\bar{p}})^{-1})}{p_1 p_2 (n - \Sigma_{\bar{p}}) (1-q)^5} + \frac{q^{n-p_1} \omega((n-p_1)^{-1}) + q^{n-p_2} \omega((n-p_2)^{-1})}{p_1 p_2 (1-q)^3}\right). \quad (7)$$

Поєднуючи (4)–(7) отримаємо твердження теореми.

Висновки. Якщо окрім умов, зазначених у теоремі, виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_1 = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_2 = \infty, \quad (8)$$

то співвідношення (1) набуває вигляду

$$\mathcal{E}(C_{\beta, \infty}^{\psi}; V_{n, \bar{p}}^{(2)}) =$$

$$= \frac{8\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{\pi p_1 p_2 (1+q)^3} \Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) + O(1) \psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2) \times \left(\frac{1}{p_1 p_2 (n - \Sigma_{\bar{p}}) (1-q)^4} + \frac{\varepsilon_{n - \Sigma_{\bar{p}}}}{(1-q)^2}\right),$$

і за умови

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_1 p_2 \varepsilon_{n - \Sigma_{\bar{p}}} = 0 \quad (9)$$

$\forall q \in (0; 1)$ забезпечує розв'язок відповідної задачі Колмогорова–Нікольського.

Ураховуючи, що

$$e_{n - \Sigma_{\bar{p}}}(\omega) = O(1) \omega((n - \Sigma_{\bar{p}})^{-1}),$$

неважко впевнитися, що асимптотична формула (2) для опуклого модуля неперервності якщо, окрім

$$n - \Sigma_{\bar{p}} \rightarrow \infty,$$

виконується (8), набуває вигляду

$$\mathcal{E}(C_{\beta}^{\psi} H_{\omega}; V_{n, \bar{p}}^{(2)}) = \frac{4\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2)}{\pi^2 p_1 p_2 (1+q)^3} \times \Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2}; \frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right) e_{n - \Sigma_{\bar{p}}}(\omega) +$$

$$+O(1)\psi(n - \Sigma_{\bar{p}} + 2) \left(\frac{\omega((n - \Sigma_{\bar{p}})^{-1})}{p_1 p_2 (n - \Sigma_{\bar{p}})(1 - q)^5} + \frac{\varepsilon_{n - \Sigma_{\bar{p}}} \omega((n - \Sigma_{\bar{p}})^{-1})}{(1 - q)^2} \right)$$

і за умови (9) $\forall q \in (0; 1)$ забезпечує розв'язок відповідної задачі Колмогорова-Нікольського.

Неважко навести приклади, коли поліноми $V_{n,\bar{p}}^{(2)}(f; x)$ мають певні переваги над поліномами $V_{n,p}(f; x)$. Якщо порівнювати звичайні й повторні суми Валле Пуссена, у яких змінюється однакова кількість гармонік, тобто, коли $p = p_1 + p_2$, то неважко помітити, що повторні суми Валле Пуссена на класі $C_{\beta}^{\psi} H_{\omega}$, $\psi(k) \in D_q$, $q \in (0; 1)$ можуть забезпечувати кращий (із точністю до сталого множника)

$$\begin{aligned} \frac{q^{n-p_1-p_2+2}}{p_1 p_2} \omega(1/(n - p_1 - p_2)) &= \\ &= \frac{q^{n-p+2}}{p_1 p_2} \omega(1/(n - p)) \end{aligned}$$

порядок наближення (при $n \rightarrow \infty$), ніж звичайні суми Валле Пуссена

$$\frac{q^{n-p+1}}{p} \omega(1/(n - p)).$$

Наприклад, якщо $p_1 = p_2 = p/2$, то порядок наближення повторних сум Валле Пуссена складає $\frac{q^{n-p+2}}{p^2} \omega(1/(n - p))$, тобто у p разів кращий, ніж у відповідних звичайних сум Валле Пуссена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций. — К. : Наук. думка, 1987. — 268 с.
2. Ровенська О.Г. Наближення періодичних функцій високої гладкості лінійними середніми рядів Фур'є. Дисерт. на здобуття наукового ступеня канд. фіз.-мат. наук. Слов'янськ, 2010.
3. Степанец А.И. Решение задачи Колмогорова-Нікольського для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — **192**, № 1. — С. 113–138.
4. Нікольський С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — **10**, № 3. — С. 207–256.

5. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1980. — **145**. — С. 126–151.

6. Рукасов В.И., Новиков О.А. Приближение аналитических функций суммами Валле-Пуссена // Труды института математики НАН Украины. — 1998. — **20**. — С. 228–241.

7. Сердюк А.С. Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 1. — С. 97–107.

8. Рукасов В.И., Чайченко С.О. Наближення інтегралів Пуассона сумами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 12. — С. 1653–1668.

9. Ровенская О.Г., Новиков О.А. Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 1. — С. 96–99.

10. Новиков О.А., Ровенская О.Г. Приближение классов интегралов Пуассона r -повторными суммами Валле Пуссена // Вісник Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. — 2014. — **19**, Вип. 3(23). — С. 14–26.

11. Степанец А.И., Сердюк А.С. Приближения суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 3. — С. 375–395.

12. Рукасов В.И. Приближение суммами Валле Пуссена классов аналитических функций // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 6. — С. 806–816.

13. Новіков О.О., Ровенська О.Г. Наближення періодичних функцій високої гладкості прямокутними суммами Фур'є // Карпатські математичні публікації. — 2013. — **5**, № 1. — С. 111–118.

14. Новиков О. А., Ровенская О.Г. Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными методами // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — **3**, № 3. — С. 255–264.