УДК 517.51

©2017 р. В.К. Маслюченко, Н.І. Томащук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ТОЧКИ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ ЗА ФРЕШЕ

Для довільної зліченної підмножини E дійсного нормованого простору X побудована така неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, у якої множина точок диференційовності за Фреше збігається з доповненням $X \setminus E$.

For any countable subset E of real normed space X we construct a continuous function $f : X \to \mathbb{R}$ such that the set of all points of differentiability by Frechet concides with $X \setminus E$.

1. Вступ. Задача про опис множини $H(f)$ всіх точок диференційовності неперервної функції $f : I \to \mathbb{R}$, заданої на відрізку $I = [a, b]$ числової прямої $\mathbb{R}$, розв'язана повністю (див. [1] і [2, с. 154]). Зокрема, в [2, с. 154] А. Брукнер подає теорему (th. 3.1), з якої випливає, що для того щоб існувала така неперервна функція $f : I \to \mathbb{R}$, у якої $H(f) = D \subseteq I$, необхідно і досить, щоб існували F_σ-множина A і $F_{\sigma\delta}$- множина B, такі, що $D = A \cap B \subseteq A \cup B \subseteq I$ та $\lambda(B) = \lambda(I)$, де λ – лінійна міра Лебеґа. Множина $J(f)$ всіх точок з I, в яких неперервна функція $f : I \to \mathbb{R}$ не диференційовна, має вигляд $J(f) = (I \setminus A) \cup (I \setminus B)$, де $I \setminus A$ – G_δ-множина, а $I \setminus B$ – $G_{\delta\sigma}$-множина нульової міри. Оскільки кожна зліченна підмножина $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ відрізка I є $G_{\delta\sigma}$-множиною нульової міри, то з наведеної теореми негайно випливає, що існує така неперервна функція $f : I \to \mathbb{R}$, у якої $J(f) = E$. Таку функцію можна побудувати і безпосередньо, визначивши її, наприклад, формулою

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} arctg|x - x_n|$$

на всій числовій прямій.

Природно поставити питання про опис множини $H(f)$ точок диференційовності неперервних чи довільних функцій багатьох дійсних змінних чи, загальніше, функцій, диференційовних за Фреше. Тут ми встановлюємо, що для довільної зліченної підмножини E дійсного нормованого простору X існує така неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $J(f) = E$, де $J(X) = X \setminus H(f)$, а $H(f)$ – множина всіх точок в X, в яких функція $f : X \to \mathbb{R}$ диференційовна за Фреше.

2. Одна теорема про почленне диференціювання функціонального ряду. Нехай $(X, \|\cdot\|)$ – дійсний нормований простір і $y = f(x)$ – дійсна функція, у якої область визначення D_f міститься в X. Розглянемо точку x_0, яка є внутрішньою для D_f. Кажуть, що функція f *диференційовна за Фреше у точці* x_0, якщо існує такий лінійний неперервний функціонал $l : X \to \mathbb{R}$, що

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)}{\|h\|} = 0$$

Позначивши

$$\gamma = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - l(h)}{\|h\|},$$

ми одержимо зображення приросту $\Delta y = \Delta f(x_0; h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ функції f у точці x_0, що відповідає приросту h її аргумента, у вигляді $\Delta y = l(h) + \gamma\|h\|$, де $\gamma \to 0$ при $h \to 0$. Навпаки, з наявності такого зображення приросту Δy легко випливає диференційовність за Фреше функції f у точці x_0. Функціонал l з означення диференційовності за Фреше визначається однозначно і називається *похідною Фреше* функції f у точці x_0. Він позначається символом $f'(x_0)$, а його дія на елемент h – через $f'(x_0)h$.

Нам буде потрібна наступна теорема про почленне диференціювання функціонального ряду. Символом $U_\delta(x_0) = \{x \in X : \|x-$

$-x_0\| < \delta\}$ позначатимемо δ-окіл точки x_0 у нормованому просторі $(X, \|\cdot\|)$.

Теорема 1. *Нехай $(X, \|\cdot\|)$ – дійсний нормований простір, $x_0 \in X$, $U = U_\delta(x_0)$ – δ-окіл точки x_0, $u_n : U \to \mathbb{R}$ – диференційовні за Фреше у точці x_0 функції при $n = 1, 2, \ldots$, c_n – додатні числа, для яких ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається і $|u_n(x) - u_n(x_0)| \leq \leq c_n\|x - x_0\|$ при $x \in U$ для кожного n, причому ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x_0)|$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|u_n'(x_0)\|$ збігаються. Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно на U, функція $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ визначена на U і диференційовна за Фреше в точці x_0 і $f'(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)$.*

Доведення. Для довільного $x \in U$ і кожного номера n з рівності $u_n(x) = u_n(x_0) + u_n(x) - -u_n(x_0)$ випливає, що

$$|u_n(x)| \leq |u_n(x_0)| + |u_n(x) - u_n(x_0)| \leq$$

$$\leq |u_n(x_0)| + c_n\|x - x_0\| \leq |u_n(x_0)| + \delta c_n = \alpha_n.$$

Оскільки числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ збігається, то за ознакою Вейєрштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно на множині U і його сума $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ визначена на U.

Оскільки функції u_n диференційовні за Фреше в точці x_0, то

$$u_n(x) - u_n(x_0) = u_n'(x_0)(x - x_0) + \gamma_n(x)\|x - x_0\|$$

в околі U, де $\lim\limits_{x \to x_0} \gamma_n(x) = \gamma(x_0) = 0$. З цього співвідношення випливає, що

$$\gamma_n(x)\|x - x_0\| = u_n(x) - u_n(x_0) - u_n'(x_0)(x - x_0).$$

Звідси, покладаючи $\beta_n = c_n + \|u_n'(x_0)\|$, отримуємо, що для кожного $x \in U$

$$\gamma_n(x)\|x - x_0\| \leq \|u_n(x) - u_n(x_0)\| +$$

$$+ \|u_n'(x_0)\|\|x - x_0\| \leq \beta_n\|x - x_0\|.$$

Отже, $\|\gamma_n(x)\| \leq \beta_n$ на U. Оскільки числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n(x)$ збігається, то за ознакою Вейєрштрасса функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n(x)$ збігається рівномірно на околі U і його сума $\gamma(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n(x)$ є неперервною в точці x_0 функцією, адже всі γ_n є такими, при цьому

$$\gamma(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(x_0) = 0$$

В такому разі $f(x) - f(x_0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n(x) - -u_n(x_0)) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x)\|x - -x_0\|) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x)\|x - x_0\|$.

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|u_n'(x_0)\|$ збігається і спряжений простір X^* повний, то збігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)$ у банаховому просторі X^* і його сума l – це лінійний неперервний функціонал на X, причому

$$l(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)(x - x_0)$$

Тому $f(x) - f(x_0) = l(x - x_0) + \gamma(x)\|x - x_0\|$, де $l \in X^*$ і $\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x) = \gamma(x_0) = 0$, а це і означає, що функція f диференційовна за Фреше в точці x_0 і $f'(x_0) = l = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x_0)$

3. Похідна норми. Нехай $(X, \|\cdot\|)$ – дійсний нормований простір. Його норма $p(x) = \|x\|$ – це функція $p : X \to \mathbb{R}$, яка може виявитися диференційовною за Фреше або ні. Наприклад, коли X – евклідовий простір і норма $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ породжена скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на цьому просторі, то вона диференційовна при $x \neq 0$. Справді, розглянемо функцію $q(x) = \langle x, x\rangle$. Для довільних $x \in X$ і $h \in X$ маємо

$$g(x + h) - g(x) = \langle x + h, x + h\rangle - \langle x, x\rangle =$$

$$= \langle x, x\rangle + 2\langle x, h\rangle + \langle h, h\rangle - \langle x, x\rangle = 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2.$$

Функція $l(h) = 2\langle x, h\rangle$ – це лінійний неперервний функціонал на X, а для функції $\gamma(h) = \|h\|$ маємо, що $\lim\limits_{h\to 0}\gamma(h) = 0$. Оскільки

$$g(x+h) - g(x) = 2\langle x, h\rangle + \gamma(h)\|h\|,$$

де $\gamma(h) \to 0$ при $h \to 0$, то функція g диференційовна за Фреше в точці x і $g'(x)h = 2\langle x, h\rangle$. Функція $\varphi(t) = \sqrt{t}$ дійсної змінної t диференційовна при $t > 0$. Оскільки $p(x) = \varphi(g(x))$ і $g(x) > 0$ при $x \neq 0$, то за теоремою про диференційовність композиції і функція p диференційовна за Фреше при $x \neq 0$.

Нам потрібне буде одне твердження з [3]. Для повноти викладу ми дамо тут його повне доведення, оскільки в [3] дані лише вказівки.

Теорема 2. *Нехай $(X, \|\cdot\|)$ – дійсний нормований простір з диференційовною за Фреше при $x \neq 0$ нормою $p(x) = \|x\|$. Тоді $\|p'(x)\| = 1$ при $x \neq 0$.*

Доведення.

За умовою при $x \neq 0$ для довільного $h \in X$ маємо, що

$$p(x+h) - p(x) = p'(x)h + \gamma(h)\|h\|,$$

де $p'(x) \in X^*$ і $\gamma(h) \to 0$ при $h \to 0$. Взявши $t > 0$ і $h = tx$, отримаємо, що

$$p(x+tx) - p(x) = \|(1+t)x\| - \|x\| =$$
$$= (1+t)\|x\| - \|x\| = t\|x\|,$$

отже, $\frac{p(x+tx)-p(x)}{t} = \|x\|$ при $t > 0$.

Крім того, для довільного $h \in X$

$$\frac{p(x+th) - p(x)}{t} = p'(x)h + \gamma(th)\|h\| \to p'(x)h$$

при $t \to +0$, адже тоді $\gamma(th) \to 0$. В такому разі $p'(x)x = \|x\|$, звідки

$$\|x\| = \|p'(x)x\| \leq \|p'(x)\|\|x\|.$$

Отже, $\|p'(x)\| \geq 1$.

З другого боку,

$$p'(x)(th) = \|x+th\| - \|x\| - \gamma(th)\|th\|,$$

звідки

$$t|p'(x)h| \leq t\|h\| + |\gamma(th)|t\|h\|,$$

а значить,

$$|p'(x)h| \leq (1 + |\gamma(th)|)\|h\|$$

для кожного $h \in X$ і довільного $t > 0$, а тоді і

$$|p'(x)h| \leq 1 + |\gamma(th)|$$

при $\|h\| = 1$ і $t > 0$. Оскільки $\lim\limits_{u\to 0}\gamma(u) = 0$, то для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що $|\gamma(u)| \leq \varepsilon$, як тільки $\|u\| \leq \delta$. При $0 < t \leq \delta$ і $\|h\| = 1$ будемо мати, що $\|th\| = t\|h\| = t \leq \delta$, отже, $|\gamma(th)| \leq \varepsilon$. Таким чином

$$|p'(x)h| \leq 1 + \varepsilon$$

для кожного h з $\|h\| = 1$. Тоді і

$$\|p'(x)\| = \sup_{\|h\|=1} |p'(x)h| \leq 1 + \varepsilon.$$

Спрямувавши ε до нуля, отримаємо, що $\|p'(x)\| \leq 1$.

Таким чином, $\|p'(x)\| = 1$.

Зауважимо, що норма $p(x) = \|x\|$ на ненульовому дійсному нормованому просторі $(X, \|\cdot\|)$ ніколи не може бути диференційовною за Фреше у точці 0. Справді, якби p було диференційовною в точці 0, то за теоремою про похідну композиції і функція $q(t) = p(tx)$ була б диференційовною в точці 0 при кожному фіксованому x. Візьмемо $x \neq 0$. Тоді

$$q(t) = \|tx\| = |t|\|x\|.$$

Але ця функція, як добре відомо, не диференційовна в точці 0.

4. Основний результат. Для функції $y = f(x)$ дійсної змінної з дійсними значеннями її звичайну похідну в точці x (число!) ми позначатимемо через $\dot{f}(x)$. Похідна Фреше $f'(x)$ цієї функції – це її диференціал $f'(x)h = df(x;h) = \dot{f}(x)h$. Для композиції $f \circ g$, де g – функціонал на нормованому просторі X, а f – дійсна функція дійсної змінної з теореми про похідну композиції випливає, що функція $f \circ g$ буде диференційовною за Фреше в точці x, якщо g диференційовна за Фреше в точці x, а f диференційовна в точці $g(x)$, і при цьому

$$(f \circ g)'(x) = \dot{f}(g(x))g'(x).$$

Наступна теорема є основним результатом даної статті.

Теорема 3. *Нехай* $(X, \|\cdot\|)$ *- ненульовий дійсний нормований простір з диференційовною при* $x \neq 0$ *нормою* $p(x) = \|x\|$ *і* $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *- зліченна підмножина простору X, що складається з різних точок* x_n*. Тоді формулою*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} arctg\|x - x_n\|$$

визначається неперервна на просторі X функція $f : X \to \mathbb{R}$*, у якої множина точок недиференційовності за Фреше* $J(f) = E$*.*

Доведення.

Покладемо $u_n(x) = \frac{1}{2^n} arctg\|x - -x_n\|$. Для кожного n функція u_n неперервна, диференційовна за Фреше на X при $x \neq \neq x_n$ і не диференційовна в точці x_n. Це випливає теорем про неперервність і диференційовність композиції і того, що відображення $t \mapsto \frac{1}{2^n} arctgt : \mathbb{R} \mapsto (-\frac{\pi}{2^{n+1}}, \frac{\pi}{2^{n+1}})$ є дифеоморфізмом. При цьому, якщо $x \neq x_n$, то

$$u_n'(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 + \|x - x_n\|^2} \cdot p'(x - x_n)$$

Зокрема,

$$\|u_n'(x)\| = \frac{1}{2^n(1 + \|x - x_n\|^2)} \|p'(x - x_n)\| =$$

$$= \frac{1}{2^n(1 + \|x - x_n\|^2)} \leq \frac{1}{2^n},$$

отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|u_n'(x)\|$ збігається для кожного $x \in X \setminus E$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно і абсолютно збігається на X, адже

$$|u_n(x)| \leq \frac{\pi}{2^{n+1}} \text{ на } X.$$

Тому його сума $f(x)$ є неперервною функцією.

Нехай $x_0 \in X \setminus E$. Доведемо, що в точці x_0 функція f диференційовна за Фреше. За формулою Лаґранжа

$$|u_n(x) - u_n(x_0)| = \frac{1}{2^n}(arctg\|x - x_n\| -$$

$$- arctg\|x_0 - x_n\|) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{1 + \xi^2}(\|x - x_n\| -$$

$$- \|x_0 - x_n\|) \leq \frac{1}{2^n}\|x - x_0\|.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ збігається, то у будь-якому δ-околі U точки x_0 виконуються умови теореми 1, яка і дає нам диференційовність за Фреше функції $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ у точці x_0.

Тепер з'ясуємо, що f не диференційовна за Фреше у будь-якій точці x_n. Запишемо $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = u_n(x) + v_n(x),$$

де $v_n(x) = \sum\limits_{m \neq n} u_m(x)$. З теореми 1 легко вивести подібно до попереднього, що функція v_n диференційовна за Фреше у точці x_n, функція ж u_n не диференційовна в точці x_n. Тому їх сума $f = u_n + v_n$ не буде диференційовною в точці x_n. Таким чином $J(f) = E$, що і треба було довести.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bruckner A.,* Differentiation of Real Functions. – Amer. Math. Soc., Providens, Rhode Island. USA. – 196 p.

2. *Bruckner A. and Leonard I.,* Derivatives. – Amer. Math. Monthly. – 1966. – 73, Part II . – P. 24-56.

3. *Robert Deville, Gilles Godefroy, Vaclav Zizler,* Smoothness and Renormings in Banach Spaces. – Besancon and Bordeaux, Paris and Columbia, Edmonton. – Sammer 1992.