УДК 517.9

©2017 р. О.В. Лопотко

Національний лісотехнічний університет України, м. Львів

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ПАРИ МІШАНИХ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Одержано інтегральне зображення пари мішаних функцій двох змінних, для яких ядро $\frac{1}{2}[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+k_2(x_1+y_1;x_2-y_2)]$, $x_i, y_i \in R^1$ $(i=1,2)$, додатно визначено.

The integral representation is obtained for mix even positively definite functions of two variables. Nuclear $\frac{1}{2}[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+k_2(x_1+y_1;x_2-y_2)]$, $x_i, y_i \in R^1$ $(i=1,2)$, is positively definite.

У роботі [3] М.Г. Крейн застосував метод спрямованих функціоналів для одержання інтегральних зображень додатно визначених ядер $K(x,y)$ $(x,y \in R^1)$. Ю.М. Березанський в [1] запропонував метод одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер $K(x,y)$ $(x,y \in R^1)$ за допомогою власних функцій диференціальних операторів. Цей метод полягає у введенні за ядром $K(x,y)$ $(x,y \in R^1)$ гільбертового простору і побудові розвинення за узагальненими власними векторами самоспряжених операторів, які розглядаються у цьому просторі; відповідна рівність Парсеваля дає потрібне зображення. У монографії [2], застосовуючи цю методику, доведено теорему про інтегральне зображення парних додатно визначених (п.д.в.) функцій скінченої кількості змінних. У роботах [4, 5] побудовані інтегральні зображення для пари парних додатно визначених (п.п.д.в.) функцій однієї та двох змінних. У даній роботі доведена теорема для пари парних мішаних додатно визначених у сукупності (п.п.м.д.в.с.) функцій двох змінних, пов'язаних з оператором $\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ $(j=1,2)$.

Означення 1. Пару парних, дійсних, неперервних функцій $k_1(x)$, $k_2(x)$, $(x \in R^2)$ будемо називати додатно визначеними у сукупності (п.м.п.д.в.с.), якщо для довільної фінітної функції виконується нерівність

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_{R^2} \frac{1}{2}[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+ \qquad (1)$$
$$+k_2(x_1-y_1;x_2-y_2)]\,u(y)\,\overline{u(x)}\,dxdy \geq 0.$$

Тобто, неперервне ядро $K(x,y) = \frac{1}{2}[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+k_2(x_1-y_1;x_2-y_2)]$ має бути додатно визначеним.

Теорема. Кожні п.м.п.д.в.с. функції $k_1(x)$, $k_2(x)$, $(x \in R^2)$, які задовольняють оцінку $|k_1(x)| \leq Ce^{N|x_1|^2}$; $|k_2(x)| \leq Ce^{N|x_1|^2}$ $(N>0,\ x \in \mathbb{R}^2)$ і умові $k_1(0;x_2) = k_2(0;x_2)$ допускають зображення

$$\frac{1}{2}[k_1(x_1;x_2)] = \int\limits_{R^1\times R^1_+} \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\times$$
$$\times\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_1(\lambda_1\lambda_2) -$$
$$-\int\limits_{R^1\times R^1_+} \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\times$$
$$\times\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_2(\lambda_1\lambda_2) +$$
$$+\int\limits_{R^1\times R^1_+} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\times$$
$$\times\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_3(\lambda_1\lambda_2) - \qquad (2)$$

$$-\int\limits_{R^1\times R^1_+}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\times$$

$$\times\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_4\left(\lambda_1\lambda_2\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{R^1\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda);$$

$$\frac{1}{2}[k_2(x_1;x_2)]=\int\limits_{R^1\times R^1_+}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\times$$

$$\times\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_1\left(\lambda_1\lambda_2\right)-$$

$$-\int\limits_{R^1\times R^1_+}\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\times$$

$$\times\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_2\left(\lambda_1\lambda_2\right)-$$

$$-\int\limits_{R^1\times R^1_+}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\times$$

$$\times\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_3\left(\lambda_1\lambda_2\right)+ \qquad (3)$$

$$+\int\limits_{R^1\times R^1_+}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\times$$

$$\times\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_4\left(\lambda_1\lambda_2\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{R^1\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda),$$

де $d\rho_1(\lambda_1\lambda_2)$, $d\rho_2(\lambda_1\lambda_2)$, $d\rho_3(\lambda_1\lambda_2)$, $d\rho_4(\lambda_1\lambda_2)$, $d\rho(\lambda)$ — борелівські невід'ємні міри, які визначаються однозначно.

Навпаки, функції виду (2), (3) є п.м.п.д.в.с. функціями.

Доведення. Розглянемо додатно визначене ядро $K(x,y)$. Для нього сконструюємо ланцюжок

$$H_-=H_-^{(1)}\otimes H_-^{(2)}\supseteq H_0^{(1)}\otimes H_0^{(2)}\supseteq H_+^{(1)}\otimes H_+^{(2)},$$

де

$$H_-^{(j)}{=}L_2\left(R^{(j)};\frac{1}{p(x_j)}dx_j\right)\supseteq H_0^{(j)}=$$

$$=L_2(R^{(j)};dx_j)\supseteq H_+^{(j)}{=}L_2(R^{(j)};p(x_j)dx_j),$$

$j=1,2$, і $p(x)=p(x_1)p(x_2)$ вибране так, щоб $\int\limits_{R^2}\frac{K(x,x)}{p(x)}dx<\infty$, тоді $K(x,y)\subseteq H_-\otimes H_-$ (див. (3.3) стор. 650 [2]).

Тепер позначимо A_j $(j=1,2)$ – мінімальний оператор у просторі $H_0=L_2(R^2;dx)$, який відповідає виразу $L_1^{(j)}=-\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ $(j=1,2)$, A_j^* $(j=1,2)$ – максимальний оператор в просторі $H_0=L_2(R^2;dx)$.

Кожний із операторів A_j $(j=1,2)$ допускає продовження оснащення з $D=C_0^\infty(R^2)$. Звуження A_j^* $(j=1,2)$ на D буде збігатися з відображенням $u\to L^{(j)+}u$ $(u\in C_0^\infty(R^2))$.

У просторі $H_+^{(j)}=L_2(R^{(j)}p(x_j)dx_j)$ введемо оператори B_j $(j=1,2)$, які відповідають виразу $u\to L^{(j)}u$ з областю визначення $D(B_j)=C_0^\infty(R^j)$.

У просторі H_+ введемо оператори $C_1=B_1\otimes E$; $C_2=E\otimes B_2$, які відповідають виразу $u=L^{(j)+}u$ з областю визначеності $D(C_1)=C_0^\infty(R^1)\otimes H_+^{(2)}$ $D(C_2)=H_+^{(1)}\otimes C_0^\infty(R^1)$.

За ядром $K(x,y)$ введемо квазіскалярний добуток

$$\langle u,v\rangle_{H_k}=\int\limits_{R^2}\int\limits_{R^2}K\left(x,y\right)u\left(y\right)\nu\left(x\right)dxdy, \qquad (4)$$

$$\left(u,v\in C_0^\infty\left(R^2\right)\right).$$

Після проведення факторизації й поповнення відносно (4), одержимо гільбертовий простір H_k.

Щоб одержати інтегральне зображення для д.в. ядра $K(x,y)$ потрібно, щоб $K(x,y)$ комутувала з оператором A_j $(j=1,2)$, тобто рівності

$$(K,(A_j^*v)\otimes u)_0=(K,v\otimes(A_j^*v))_0,$$

$$u,v\in C_0^\infty(R^2).$$

А це еквівалентно ермітовості операторів C_j в просторі H_k, тобто рівності

$$\left\langle L^{(j)+}u,v\right\rangle=\left\langle u,L^{(j)+}v\right\rangle \qquad (5)$$

$$\left(u,v\in C_0^\infty(R^2)\right),(j=1,2).$$

(див. [2, стр. 621]).

Для гладкого додатно визначеного ядра $K(x,y)$ рівність (5) виконується.

Перевіримо (5) для довільного додатно визначеного ядра $K(x,y)$. Цю перевірку достатньо здійснити на функціях виду $u(x_1),\ u(x_2)$, оскільки вони щільні у H_k.

Нехай $j=1$. Введемо допоміжні парні функції:

$$f_1(t)=\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} k_1(t,x_2-y_2)u(y_2)u(x_2)dx_2dy_2$$

і

$$f_2(t)=\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} k_2(t,x_2-y_2)u(y_2)u(x_2)dx_2dy_2,$$

тоді

$$\left\langle L^{(1)+}u,v\right\rangle=\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} f_1(x_1+y_1)\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\,u(y_1)\,v(x_1)\,dx_1\,dy_1+$$

$$+\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} f_2(x_1+y_1)\,\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\,u(y_1)\,v(x_1)\,dx_1\,dy_1=$$

$$=\int\limits_{R^1} f_1(y_1)\left(\int\limits_{R^1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}u(y_1+x_1)v(x_1)dx_1\right)dy_1+$$

$$+\int\limits_{R^1} f_2(y_1)\left(\int\limits_{R^1}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}u(y_1+x_1)v(x_1)dx_1\right)dy_1=$$

$$=\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} f_1\left(x_1+y_1\right)u(y_1)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}v\left(x_1\right)dx_1dy_1+$$

$$+\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} f_2\left(x_1-y_1\right)u(y_1)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}v\left(x_1\right)dx_1dy_1=$$

$$=\left\langle u,L^{(1)+}v\right\rangle.$$

Отже, оператори C_1,C_2 ермітові, причому $C_2\geq 0$.

Дійсно, якщо ввести допоміжну функцію

$$f(t)=\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1}[k_1(x_1+y_1,t)+k_2(x_1-y_1,t)]\times$$

$$\times u(y_1)\,u(x_1)\,dx_1\,dy_1,$$

то

$$\left\langle L^{(2)+}u,u\right\rangle=-\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} f(x_2-y_2)\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\,u(x_2)\,u(y_2)\,dx_2\,dy_2=$$

$$=(x_2-y_2=t_2\ \Rightarrow\ y_2=x_2-t_2)$$

$$=-\int\limits_{R^1}\left(\int\limits_{R^1} f(t_2)u''_{t_2}(x_2-t_2)dt_2\right)\overline{u(x_2)}dx_2=$$

$$=-\int\limits_{R^1}\left(\int\limits_{R^1} f(t_2)u''_{x_2}(x_2-t_2)dt_2\right)\overline{u}(x_2)dx_2=$$

$$=-\int\limits_{R^1} f(t_2)\left(\int\limits_{R^1} u''_{t_2}(x_2-t_2)\overline{u}(x_2)dx_2\right)dt_2=$$

$$=\left[\begin{array}{c}\int\limits_{R^1} u''_{x_2}(x_2-t_2)\overline{u}(x_2)dx_2=\\ =\left[\overline{u(x_2)}u'_{x_2}(x_2-t_2)\right]_{-\infty}^{\infty}-\\ -\int\limits_{R^1} u'_{x_2}(x_2-t_2)\overline{u'(x_2)}dx_2\\ u''_{x_2}(x_2-t_2)dx_2=dv\quad\Rightarrow\\ \Rightarrow v=-u'_{x_2}(x_2-t_2)\\ \overline{u(x_2)}=u\qquad\Rightarrow\qquad du=\overline{u'(x_2)}\end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_{R^1} f(t_2)\left(\int\limits_{R^1} u'_{x_2}(x_2-t_2)\overline{u'(x_2)}dx_2\right)dt_2=$$

$$=\int\limits_{R^1}\int\limits_{R^1} f(x_2-z_2)u'(z_2)\overline{u'(x_2)}dx_2dz_2\geq 0.$$

Оскільки $|K(x,y)|\leq Ce^{2N(x_1^2+y_1^2)}$, то можна довести самостряженість і комутативність ермітових операторів C_1,C_2 аналогічно теоремі 4.3 [2, стор. 708-709].

Тоді для ядра $K(x,y)$ можна застосувати теорему 4.1 [2; стор.704–705] і одержати таке зображення:

$$\frac{1}{2}[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+$$

$$+k_2(x_1-y_1;x_2-y_2)]=$$

$$=\int\limits_{R^2}\Omega_\lambda(x,y)d\rho(\lambda)=$$

$$= \int\limits_{R^1\times R^1_+} \sum_{\alpha,\beta\in A} X_\alpha(x,\lambda)\overline{X_\beta(y,\lambda)}d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda), \quad (6)$$

$$x, y \in R^2,$$

де $-\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Omega_\lambda = \lambda_j\Omega_\lambda; \quad -\dfrac{\partial^2}{\partial y_j^2}\Omega_\lambda = \lambda_j\Omega_\lambda;$

$$X_0^{(j)}(x_j,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda_j}x_j;$$

$$X_1^{(j)}(x_j,\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_j}x_j}{\lambda_j}, \quad (j=1,2),$$

A — паралелепіпед з цілочисельними вершинами $\alpha_1 = 0,1$; $\alpha_2 = 0,1$.

Якщо тепер зробимо у (6) заміну $x_1 = -x_1$, $y_1 = -y_1$ і додамо отриману рівність до (6), а потім в одержаній рівності зробимо заміну $x_2 = -x_2$, $y_2 = -y_2$ і додамо одержану рівність до попередньої рівності, то отримаємо таке зображення:

$$\frac{1}{2}\left[k_1(x_1+y_1;x_2-y_2)+k_2(x_1-y_1;x_2-y_2)\right] =$$
$$= \int\limits_{R^1\times R^1_+} \cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\times$$
$$\times\cos\sqrt{\lambda_2}y_2 d\sigma_{0000}(\lambda_1;\lambda_2)+$$
$$+\int\limits_{R^1\times R^1_+} \cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2}{\lambda_2}\cdot$$
$$\cdot\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\sigma_{0101}(\lambda_1;\lambda_2)+ \quad (7)$$
$$+\int\limits_{R^1\times R^1_+} \frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1}{\lambda_1}\cdot\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cdot$$
$$\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}y_1}{\lambda_1}\cdot\cos\sqrt{\lambda_2}y_2 d\sigma_{1010}(\lambda_1;\lambda_2)+$$
$$+\int\limits_{R^1\times R^1_+} \frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1}{\lambda_1}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2}{\lambda_2}\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_1}y_1}{\lambda_1}\cdot$$
$$\cdot\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\sigma_{1111}(\lambda_1;\lambda_2).$$

Інтегрування у зображеннях (7), буде здійснюватися по $R^1\times R^1_+$, оскільки оператор $C_2 \geq 0$.

Якщо тепер у (7) покладемо $y_1 = x_1$; $y_2 = -x_2$, то одержимо представлення

$$\frac{1}{2}[k_1(x_1;x_2)+k_2(0;x_2)] =$$
$$= \int\limits_{R^1\times R^1_+} \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\times$$
$$\times\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_1(\lambda_1\lambda_2)-$$
$$-\int\limits_{R^1\times R^1_+} \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\times$$
$$\times\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_2(\lambda_1\lambda_2)+ \quad (8)$$
$$+\int\limits_{R^1\times R^1_+} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\times$$
$$\times\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}\cdot d\rho_3(\lambda_1\lambda_2)-$$
$$-\int\limits_{R^1\times R^1_+} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\times$$
$$\times\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_4(\lambda_1\lambda_2).$$

Якщо у (7) покладемо $x_1 = -y_1$; $y_2 = -x_2$, то одержимо представлення

$$\frac{1}{2}[k_1(0;x_2)+k_2(x_1;x_2)] =$$
$$= \int\limits_{R^1\times R^1_+} \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\cdot$$
$$\cdot\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_1(\lambda_1\lambda_2)-$$
$$-\int\limits_{R^1\times R^1_+} \frac{1+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2}\cdot$$
$$\cdot\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2\lambda_2}d\rho_2(\lambda_1\lambda_2)- \quad (9)$$
$$-\int\limits_{R^1\times R^1_+} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\cdot$$
$$\cdot\frac{1+\cos\sqrt{\lambda_2}x_2}{2}d\rho_3(\lambda_1\lambda_2)+$$

$$+\int\limits_{R^1\times R^1_+}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_1}x_1}{2\lambda_1}\cdot$$
$$\cdot\frac{1-\cos\sqrt{\lambda_2}x_2)}{2\lambda_2}d\rho_4\left(\lambda_1\lambda_2\right).$$

Із (8) і (9) випливає, що

$$\frac{1}{2}[k_1(0;x_2)+k_2(0;x_2)]=$$
$$=\int\limits_{R^1\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_2}x_2d\rho(\lambda_1;\lambda_2).$$

Тому, враховуючи умову теореми $k_1(0,x_2)=k_2(0,x_2)$, одержимо що

$$k_1(0,x_2)=k_2(0,x_2)=$$
$$=\int\limits_{R^1\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_2}x_2d\rho(\lambda_1;\lambda_2).$$

Звідси випливає, що інтегральні представлення (8) і (9) запишуться у вигляді (2), (3).

Останнє твердження теореми будемо доводити наступним чином. Спочатку доведемо нерівність (1), якщо в (2) і (3) $\lambda_1,\lambda_2\geq 0$. У цьому випадку елементарне ядро буде мати вигляд

$$\Omega_\lambda(x,y)=\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\times$$
$$\times\cos\sqrt{\lambda_2}y_2+$$
$$+\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2+$$
$$+\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2+$$
$$+\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2$$

і

$$\Omega_\lambda(0,0)=1;\quad\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)=\lambda_1;$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)=\lambda_2;$$
$$\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)=\lambda_1\lambda_2,$$

а міри в (2) і (3) запишуться наступним чином

$$d\rho_1(\lambda_1,\lambda_2)=\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=d\rho(\lambda);$$
$$d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=\lambda_2d\rho(\lambda);$$
$$d\rho_3(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=\lambda_1d\rho(\lambda);$$
$$d\rho_4(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial x_2\partial y_1\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=$$
$$=\lambda_1\lambda_2d\rho(\lambda).$$

Тому інтегральні зображення (2) і (3) запишуться у такому вигляді

$$\frac{1}{2}k_1(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_2}x_2d\rho(\lambda);\quad(10)$$

$$\frac{1}{2}k_2(x_1,x_2)=\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\times\quad(11)$$
$$\times\cos\sqrt{\lambda_2}x_2d\rho(\lambda)-\frac{1}{2}\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_2}x_2d\rho(\lambda).$$

Із (10) і (11) знаходимо

$$\frac{1}{2}k_1(x_1+y_1,x_2-y_2)=$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)d\rho(\lambda);\quad(12)$$
$$\frac{1}{2}k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)=$$
$$=\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_1}(x_1-y_1)\times$$
$$\times\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)d\rho(\lambda)-$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)d\rho(\lambda).\quad(13)$$

Тому, якщо додати (12) до (13), одержимо

$$\frac{1}{2}\big[k_1(x_1+y_1,x_2-y_2)+$$
$$+k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)\big]=$$
$$=\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_1}(x_1-y_1)\times\quad(14)$$
$$\times\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)d\rho(\lambda).$$

Або, якщо перейти до мір

$d\rho_1(\lambda)$, $d\rho_2(\lambda)$, $d\rho_3(\lambda)$, $d\rho_4(\lambda)$ у (14) одержимо, що

$$\frac{1}{2}\big[k_1(x_1+y_1,x_2-y_2)+ +k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)\big]= = \int\limits_{R^1_+\times R^1_+} \cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\times \times\cos\sqrt{\lambda_2}y_2 d\rho_1(\lambda_1\lambda_2)+ + \int\limits_{R^1_+\times R^1_+} \cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_1}y_1\times \times\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\rho_2(\lambda_1\lambda_2)+ + \int\limits_{R^1_+\times R^1_+} \frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1}{\lambda_1}\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\times \times\cos\sqrt{\lambda_2}y_2 d\rho_3(\lambda_1\lambda_2)+ + \int\limits_{R^1_+\times R^1_+} \frac{\sin\sqrt{\lambda_1}x_1\sin\sqrt{\lambda_1}y_1}{\lambda_1}\times \times\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\rho_4(\lambda_1\lambda_2). \quad (15)$$

За допомогою (15) перевіряємо (1).

Тепер доведемо нерівність (1), якщо в (2) і (3) $\lambda_1<0$, $\lambda_2\geq 0$. У цьому випадку елементарне ядро буде мати такий вигляд:

$$\Omega_\lambda(x,y)=\mathtt{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1\mathtt{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\times \times\cos\sqrt{\lambda_2}y_2+\mathtt{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1\mathtt{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1\times \times\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2+ +\mathtt{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1\mathtt{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2+ +\mathtt{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1\mathtt{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2$$

і

$$\Omega_\lambda(0,0)=1;\quad \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)=|\lambda_1|; \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)=\lambda_2; \frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)=|\lambda_1|\lambda_2,$$

а міри в (2) і (3) запишуться наступним чином

$$d\rho_1(\lambda_1,\lambda_2)=\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)=d\rho(\lambda); d\rho_2(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)= =\lambda_2 d\rho(\lambda); d\rho_3(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y_1}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)= =|\lambda_1|d\rho(\lambda); d\rho_4(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial x_2\partial y_1\partial y_2}\Omega_\lambda(0,0)d\rho(\lambda)= =|\lambda_1|\lambda_2 d\rho(\lambda).$$

Тому інтегральні зображення (2) і (3) запишуться у такому вигляді

$$\frac{1}{2}k_1(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\int\limits_{R^1_-\times R^1_+} \mathtt{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1\times \times\cos\sqrt{\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda)- -\frac{1}{2}\int\limits_{R^1_-\times R^1_+} \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda); \quad (16)$$

$$\frac{1}{2}k_2(x_1,x_2)=\frac{1}{2}\int\limits_{R^1_-\times R^1_+} \cos\sqrt{\lambda_2}x_2 d\rho(\lambda). \quad (17)$$

Із (16) і (17) знаходимо

$$\frac{1}{2}k_1(x_1+y_1,x_2-y_2)= \int\limits_{R^1_-\times R^1_+} \mathtt{ch}\sqrt{-\lambda_1}(x_1+y_1)\times \times\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)d\rho(\lambda)- -\frac{1}{2}\int\limits_{R^1_+\times R^1_+} \cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)d\rho(\lambda); \quad (18)$$

$$\frac{1}{2}k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)= =\frac{1}{2}\int\limits_{R^1_-\times R^1_+} \cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)d\rho(\lambda). \quad (19)$$

Тому, якщо додати (18) до (19), одержимо

$$\frac{1}{2}\big[k_1(x_1+y_1,x_2-y_2)+ \\ +k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)\big]= \\ =\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\mathtt{ch}\sqrt{-\lambda_1}(x_1+y_1)\times \\ \times\cos\sqrt{\lambda_2}(x_2-y_2)d\rho(\lambda). \qquad (20)$$

Або, якщо перейти до мір $d\rho_1(\lambda)$, $d\rho_2(\lambda)$, $d\rho_3(\lambda)$, $d\rho_4(\lambda)$ у (20) одержимо, що

$$\frac{1}{2}\big[k_1(x_1+y_1,x_2-y_2)+ \\ +k_2(x_1-y_1,x_2-y_2)\big]= \\ =\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\mathtt{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1\mathtt{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1\times \\ \times\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2d\rho_1(\lambda)+ \\ +\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\mathtt{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1\mathtt{ch}\sqrt{-\lambda_1}y_1\times \\ \times\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\rho_2(\lambda)+ \\ +\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\frac{\mathtt{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1\mathtt{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1}{-\lambda_1}\times \\ \times\cos\sqrt{\lambda_2}x_2\cos\sqrt{\lambda_2}y_2d\rho_3(\lambda)+ \\ +\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\frac{\mathtt{sh}\sqrt{-\lambda_1}x_1\mathtt{sh}\sqrt{-\lambda_1}y_1}{-\lambda_1}\times \\ \times\frac{\sin\sqrt{\lambda_2}x_2\sin\sqrt{\lambda_2}y_2}{\lambda_2}d\rho_4(\lambda). \qquad (21)$$

За допомогою (21) перевіряємо (1).

Таким чином із (2) і (3) слідує (1). Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо $k_2(x)=0$, то оператори $C_1<0$, $C_2\geq 0$ із зображень (16) і (17) буде слідувати, що

$$\frac{1}{2}k_1(x_1,x_2)=\int\limits_{R^1_-\times R^1_+}\mathtt{ch}\sqrt{-\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2d\rho_2(\lambda).$$

Зауваження 2. Якщо $k_1(x)=0$, то оператори $C_1\geq 0$, $C_2\geq 0$ із зображень (10) і (11) буде слідувати, що

$$\frac{1}{2}k_2(x_1,x_2)= \\ =\int\limits_{R^1_+\times R^1_+}\cos\sqrt{\lambda_1}x_1\cos\sqrt{\lambda_2}x_2d\rho_2(\lambda),$$

тобто зображення [2, стор. 852].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Березанский Ю.М.* Обобщение теоремы Бохнера на разложения по собственным функциям дифференциальных операторов // Докл. АН СССР – 1956. – 108, №3. – С.893-896.
2. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 800 с.
3. *Крейн М.Г.* Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения // Докл. АН СССР – 1946. – 53, №1. – С.3-6.
4. *Лопотко О.В.* Інтегральне зображення парних додатно визначих функцій однієї змінної - УМЖ т. 62, № 2, 2010 р. С.281-284.
5. *Лопотко О.В.* Інтегральне зображення парних додатно визначених функцій двох змінних // Укр. мат. журн. – 2011. – 63, №6. – С. 844-853.