

## ПРО АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З ВИПАДКОВИМИ ПОКАЗНИКАМИ ТА КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджується розподіл абсцис збіжності випадкових рядів Діріхле з попарно незалежними і неоднаково розподіленими випадковими показниками та випадковими коефіцієнтами.

*Ключові слова:* випадковий ряд Діріхле, абсциса збіжності, незалежні випадкові величини

Distribution of the abscissas of convergence for a random Dirichlet series with pairwise independent and non-identically distributed random exponents and random coefficients is considered.

*Key words:* random Dirichlet series, abscissa of convergence, independent random variables

**1. Вступ.** Нехай  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  — ймовірнісний простір, а  $\Lambda = (\lambda_k(\omega))_{k=0}^{+\infty}$  та  $\mathbf{f} = (f_k(\omega))_{k=0}^{+\infty}$ , відповідно, послідовності невід'ємних та комплекснозначних випадкових величин на ньому. Через  $\mathcal{D}(\Lambda)$  позначимо клас формальних випадкових рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z, \omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)}$$

( $z \in \mathbb{C}$ ,  $\omega \in \Omega$ ), що при фіксованому  $\omega = \omega_0$  є звичайним (детермінованим) рядом Діріхле;  $\mathcal{D} = \bigcup_{\Lambda} \mathcal{D}(\Lambda)$ . Через  $\sigma_{зб}(F, \omega)$  і  $\sigma(F, \omega)$  позначимо відповідно абсциси збіжності і абсолютної збіжності цього ряду при фіксованому  $\omega \in \Omega$ .

Нехай  $\Lambda_+ = (\lambda_k)$  позначає числову послідовність таку, що  $0 \leq \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \uparrow +\infty$  ( $1 \leq k \uparrow +\infty$ ), а  $\mathcal{D}(\Lambda_+)$  — підклас рядів з класу  $\mathcal{D}$  з фіксованою послідовністю показників  $\Lambda_+$ .

У статті [1] (також див. [2]) доведено таке елементарне твердження. У випадку рядів Діріхле з монотонно зростаючою до  $+\infty$  послідовністю показників  $\Lambda_+$  це твердження див. в [3, 4].

*Твердження 1.* Нехай  $F \in \mathcal{D}$ . Тоді

$$\sigma_{зб}(F, \omega) \leq \alpha_0(\omega) \stackrel{def}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}$$

для всіх  $\omega \in \Omega$ , а для довільних функцій  $\gamma, \delta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  і всіх  $\omega \in \Omega$  таких, що  $\gamma(\omega) \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{1-\gamma(\omega)} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty \quad (1)$$

виконуються нерівності

$$\begin{aligned} \sigma(F, \omega) &\geq \gamma(\omega)\alpha_0(\omega) - \delta(\omega) \geq \\ &\geq \gamma(\omega)\sigma_{зб}(F, \omega) - \delta(\omega). \end{aligned} \quad (2)$$

Зауважимо, що з умови (1) випливає, що для такого  $\omega$  виконується

$$(\gamma(\omega) - 1) \ln |f_k(\omega)| + \delta(\omega)\lambda_k(\omega) \rightarrow +\infty$$

( $k \rightarrow +\infty$ ), але при цьому, взагалі кажучи, нема жодних окремих умов на послідовності  $\mathbf{f}$  та  $\Lambda$ .

Вибираючи  $\delta = (\gamma - 1)\alpha_0$ , Твердження 1 переписуємо у такому вигляді

**Наслідок 3.** Нехай  $F \in \mathcal{D}$  і  $\omega \in \Omega$  таке, що для деякого  $\gamma(\omega) \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left( |f_k(\omega)| e^{\alpha_0(\omega)\lambda_k(\omega)} \right)^{1-\gamma(\omega)} < +\infty. \quad (3)$$

Тоді

$$\sigma_a(F, \omega) = \sigma_{зб}(F, \omega) = \alpha_0(\omega). \quad (4)$$

Вибираючи  $\delta = 0$ ,  $\gamma = 1 - \gamma_1$ , Твердження 1 переписуємо у такому вигляді

**Наслідок 4.** Нехай  $F \in \mathcal{D}$  і  $\omega \in \Omega$  таке, що для деякого  $\gamma_1(\omega) \leq 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(\omega)|^{\gamma_1(\omega)} < +\infty. \quad (5)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \sigma(F, \omega) &\geq (1 - \gamma_1(\omega))\alpha_0(\omega) \geq \\ &\geq (1 - \gamma_1(\omega))\sigma_{зб}(F, \omega). \end{aligned} \quad (6)$$

Вибираючи  $\gamma = 1$ , Твердження 1 переписуємо у такому вигляді

**Наслідок 5.** Нехай  $F \in \mathcal{D}$  і  $\omega \in \Omega$  таке, що для деякого  $\delta(\omega) > 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < +\infty. \quad (7)$$

Тоді

$$\sigma(F, \omega) \geq \alpha_0(\omega) - \delta(\omega) \geq \sigma_{зб}(F, \omega) - \delta(\omega). \quad (8)$$

З наслідку 5 елементарно отримуємо таке твердження.

**Наслідок 6.** Нехай  $F \in \mathcal{D}$  і  $\omega \in \Omega$  таке, що  $\tau(\Lambda, \omega) < +\infty$ . Тоді

$$\begin{aligned} \sigma(F, \omega) &\geq \alpha_0(\omega) - \tau(\Lambda, \omega) \geq \\ &\geq \sigma_{зб}(F, \omega) - \tau(\Lambda, \omega). \end{aligned} \quad (9)$$

*Справді,* Виберемо  $\delta(\omega) = \tau(\Lambda, \omega) + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . За означенням верхньої границі  $\ln k < (\tau(\Lambda, \omega) + \varepsilon/2)\lambda_k(\omega)$  ( $k \geq k_0(\omega)$ ), тому

$$\begin{aligned} &\sum_{k=k_0}^{+\infty} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} < \\ &< \sum_{k=k_0}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{\tau(\Lambda, \omega) + \varepsilon}{\tau(\Lambda, \omega) + \varepsilon/2} \ln k\right\} < +\infty. \end{aligned}$$

Отже, умова (7) виконується і з наслідку 5 маємо  $\sigma(F, \omega) \geq \alpha_0(\omega) - \delta(\omega) \geq \sigma_{зб}(F, \omega) - \delta(\omega)$  з  $\delta(\omega) = \tau(\Lambda, \omega) + \varepsilon$ . Залишається перейти до границі  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Позначимо тепер

$$\begin{aligned} h_2(\omega) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln k}{-\ln |f_k(\omega)|}, \\ h_0(\omega) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln k}{-\ln |f_k(\omega)|}. \end{aligned}$$

З наслідку 4 отримуємо таке твердження.

**Наслідок 7.** Нехай  $F \in \mathcal{D}$ . Якщо  $\omega \in \Omega$  таке, що  $h_2(\omega) > -\infty$ , то нерівності (6) виконуються з  $\gamma_1 = h_2$ , якщо  $h_0(\omega) < 1$ , то нерівності (6) виконуються з  $\gamma_1 = h_0$ .

З наслідків 6 і 7 негайно отримуємо таке твердження (у цьому зв'язку див. також [5]–[7]).

*Твердження 2.* Нехай  $F \in \mathcal{D}$ . Якщо  $\omega \in \Omega$  таке, що  $\tau(\Lambda, \omega) \stackrel{def}{=} \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln k}{\lambda_k(\omega)} = 0$  або

$$\ln k = o(\ln |f_k(\omega)|) \quad (k \rightarrow +\infty), \quad (10)$$

то виконуються рівності (4).

У випадку  $\tau(\Lambda, \omega) = 0$  – це, власне, так звана теорема Ж.Валірона.

**Зауваження 1.** Із закону нуля і одиниці А.Н. Колмогорова випливає, що якщо  $\left(\frac{-\ln |f_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)}\right)$  – послідовність незалежних випадкових величин, то випадкова величина  $\alpha_0(\omega)$  є майже напевне (м.н) сталою, тобто,  $\alpha_0(\omega) = \sigma \in [-\infty, +\infty]$  м.н. Звідси, за Твердженням 2, у випадку, коли  $\tau(\Lambda, \omega) = 0$  або  $\ln n = o(\ln |f_n(\omega)|)$  ( $n \rightarrow +\infty$ ), маємо, що випадкова величина  $\sigma(f, \omega)$  також є майже напевне (м.н) сталою і  $\sigma(f, \omega) = \sigma \in [-\infty, +\infty]$  м.н. Власне, звідси те ж саме твердження випливає у випадку детермінованої послідовності  $\Lambda$ , коли  $(|f_k(\omega)|)$  є послідовністю незалежних випадкових величин. У книзі [8] останнє написано у випадку монотонно зростаючої до нескінченності послідовності  $\Lambda_+$ , коли  $(f_k(\omega))$  є послідовністю незалежних випадкових величин.

У цілому ряді статей [9]–[15] розглядалось питання про абсиси збіжності випадкових рядів Діріхле з класу  $\mathcal{D}$  у випадку, коли послідовність  $\Lambda = (\lambda_k(\omega))$  є зростаючою детермінованою послідовністю додатних чисел  $\lambda_k(\omega) \equiv \lambda_k$  і  $\tau(\Lambda) \stackrel{def}{=} \tau(\omega, \Lambda) \equiv const < +\infty$ , а коефіцієнти ряду Діріхле мають вигляд  $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ . Так, у статті [9] наведено таке елементарне твердження.

*Твердження 3* ([9]). Нехай  $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$  і має коефіцієнти вигляду  $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ .

$1^0$ . Якщо виконуються умови  $\tau(\Lambda_+) = 0$  і

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |Z_k(\omega)|}{\lambda_k} = 0 \quad \text{м.н.}, \quad (11)$$

то м.н.

$$\sigma_{зб}(F, \omega) = \sigma(F, \omega) = \alpha_0 \stackrel{def}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k}.$$

2<sup>0</sup>. У випадку  $\alpha_0 = +\infty$  для рівності  $\sigma(F, \omega) = +\infty$  м.н. достатньо, щоб замість умови  $\tau(\Lambda) = 0$  виконувалось  $\tau(\Lambda) < +\infty$ , а замість умови (3), щоб

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |Z_k(\omega)|}{\lambda_k} > -\infty \text{ м.н.} \quad (12)$$

З Твердження 3, зокрема впливають теореми 1 (при  $\alpha_0 = +\infty$ ) і 3 (при  $\alpha_0 = 0$ ) з [11], які доведені за такої умови на математичні сподівання ( $\exists \beta > 0$ ):

$$\sup\{\mathbf{E}|Z_k|^\beta, \mathbf{E}|Z_k|^{-\beta} : k \geq 0\} < +\infty.$$

Умову (3) можна ([2, 9]) замінити такою достатньою умовою на послідовність функцій розподілу  $F_k^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\omega : |Z_k(\omega)| < x\}$  випадкових величин ( $|Z_k(\omega)|$ )

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (1 - F_k^*((1 + \varepsilon)^{\lambda_k}) + F_k^*((1 - \varepsilon)^{\lambda_k})) < +\infty$$

( $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ ). З останньої умови, зокрема впливає, що  $\lim_{k \rightarrow +\infty} F_k^*(+0) = 0$ .

Крім цього, в [9] доведено такі теореми.

**Теорема 1** ([9]). Нехай  $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ . Припустимо, що  $(|f_k(\omega)|)$  — послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу  $F_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\omega : |f_k(\omega)| < x\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k \geq 0$ . Виконуються наступні твердження:

**а)**  $\sigma(\omega) = \sigma(F, \omega) \geq \rho \in (-\infty, +\infty)$  м.н.  $\implies$  ( $\forall \varepsilon > 0$ ):  $\sum_{k=2}^{+\infty} (1 - F_k((e^{-\rho} + \varepsilon)^{\lambda_k})) < \infty$ ;

**б)** Якщо існує послідовність  $(\delta_k)$  така, що  $\delta_k > -\infty$  ( $k \geq 0$ ),  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = e^{-\rho}$ ,  $\rho \in$

$(-\infty, +\infty]$ , і  $\sum_{k=2}^{+\infty} (1 - F_k(\delta_k^{\lambda_k})) = +\infty$ , то  $\sigma(F, \omega) \leq \rho$  м.н.

**Теорема 2** ([9]). Нехай  $F \in \mathcal{D}(\Lambda_+)$ .

**а)** Якщо існують  $\rho \in (-\infty, +\infty)$  і послідовність  $(\varepsilon_k)$  такі, що  $\varepsilon_k \rightarrow +0$  ( $k \rightarrow +\infty$ ) і  $\sum_{k=2}^{+\infty} (1 - F_k((e^{-\rho} + \varepsilon_k)^{\lambda_k})) < \infty$ , то  $\sigma(F, \omega) \geq \rho$  м.н.

**б)**  $\sigma(F, \omega) = -\infty$  м.н.  $\implies$  ( $\forall E > 1$ ):  $\sum_{k=2}^{+\infty} (1 - F_k(E^{\lambda_k})) = +\infty$ .

Виявляється, що у випадку рядів з класу  $\mathcal{D}$  з випадковими показниками і випадковими коефіцієнтами можна довести подібні

твердження. Власне, це і є метою даної статті

Зазначимо, що дана стаття є продовженням виконаних недавно досліджень про радіуси збіжності випадкових лакунарних степеневих рядів ([16]) та абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими коефіцієнтами ([9]), а з отриманих там тверджень у вигляді простих наслідків впливають, наприклад, основні результати статей [17]– [19].

Варто відзначити також, що у статті [20] ймовірнісні методи застосовані для доведення ряду теорем про поведінку рядів Діріхле з незалежними показниками. Отримані результати застосовано у теорії  $\zeta$ -функції і при дослідженні поведінки розв'язків хвильового рівняння при  $t \rightarrow \infty$ . У статті [21] досліджуються степеневі ряди вигляду  $\sum_{k=0}^{+\infty} z^{X_k(\omega)}$ , де  $(X_k(\omega))$  — строго зростаючий цілочисельний стохастичний процес.

**2. Деякі приклади.** Розглянемо формальний випадковий ряд Діріхле

$$F_0(z, \omega) = \sum_{k=2}^{+\infty} g_k(\omega) e^{z\lambda_k(\omega)},$$

$$\lambda_k(\omega) = \ln(k + r_k(\omega)), \quad g_k(\omega) = (-1)^k e^{a\lambda_k(\omega)},$$

де  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \notin (-1; 0]$ ,  $(r_k(\omega))$  — послідовність Радемахера. Для цього ряду

$$\begin{aligned} \alpha_0(\omega) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln g_k(\omega)}{\lambda_k(\omega)} = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |(-1)^k e^{a\lambda_k(\omega)}|}{\lambda_k(\omega)} = -a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_0(z, \omega) &= \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k e^{a\lambda_k(\omega) + z\lambda_k(\omega)} = \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k (k + r_k(\omega))^{z+a}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{зб}(F_0, \omega) = -a, \quad \sigma_a(F_0, \omega) = -a - 1.$$

Виберемо  $\gamma_1(\omega) = -\frac{1}{a} - \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  — довільне

число таке, що  $\gamma_1(\omega) \leq 1$  і  $a\varepsilon > 0$ . Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} |g_k(\omega)|^{\gamma_1(\omega)} &= \sum_{k=2}^{+\infty} (k + r_k(\omega))^{a(-\frac{1}{a}-\varepsilon)} = \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} (k + r_k(\omega))^{-1-a\varepsilon} < +\infty, \\ \sigma_a(F_0, \omega) - (1 - \gamma_1(\omega))\alpha_0(\omega) &= \\ = \sigma_a(F_0, \omega) - (1 - \gamma_1(\omega))\sigma_{зб}(F_0, \omega) &= \\ = -a - 1 - \left(1 + \frac{1}{a} + \varepsilon\right)(-a) = \varepsilon a \geq 0. \end{aligned}$$

З довільності  $\varepsilon$ , а отже й  $a\varepsilon$ , отримуємо, що нерівність (6) є точною.

Вибравши  $\gamma_1(\omega) = -\frac{1}{a} + \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  — довільне число таке, що  $\gamma_1(\omega) \leq 1$  і  $a\varepsilon > 0$ , отримаємо, що, взагалі кажучи, умову (5) послабити не можна.

Тепер стосовно наслідку 5. Виберемо  $\delta(\omega) = 1 + \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ . Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-\delta(\omega)\lambda_k(\omega)} &= \sum_{k=2}^{+\infty} e^{-(1+\varepsilon_0)\ln(k+r_k(\omega))} = \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k + r_k(\omega))^{1+\varepsilon_0}} < +\infty, \\ \sigma_a(F_0, \omega) - \sigma_{зб}(F_0, \omega) + \delta(\omega) &= \\ = -a - 1 + a + 1 + \varepsilon_0 = \varepsilon_0. \end{aligned}$$

З довільності  $\varepsilon_0$  впливає точність нерівності (8). Вибираючи  $\delta(\omega) = 1 - \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0 \in (0; 1)$ , отримаємо, що, взагалі кажучи, умову (7) послабити не можна.

Нескладно переконатись, що у наслідку 5:  $\gamma_1(\omega) = h_0(\omega) = h_2(\omega) = -\frac{1}{a}$  і, отже,

$$\sigma(F_0, \omega) = (1 - \gamma_1(\omega))\sigma_{зб}(F_0, \omega),$$

тобто, нерівність (6) є точною.

**3. Ряди з випадковими показниками і коефіцієнтами.** У цьому пункті розглянемо ряди Діріхле з випадковими показниками і коефіцієнтами. Власне, розглянемо випадок

$$f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega) \quad (k \geq 0).$$

*Твердження 4.* Нехай  $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$  і має коефіцієнти вигляду  $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ . Якщо виконується умова (3) і

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln k}{\ln |a_k|} = 0, \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{\ln |Z_k(\omega)|}{\ln |a_k|} \right| \leq \delta(\omega) < 1$$

м.н., то м.н.

$$\begin{aligned} \sigma_{зб}(F, \omega) = \sigma(F, \omega) &= \\ = \alpha_0^*(\omega) := \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)}. \end{aligned} \quad (13)$$

*Доведення Твердження 4.* Зауважимо спочатку, що

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln k}{|\ln |f_k(\omega)||} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln k}{|\ln |a_k||} \times \\ &\times \left( \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \left| 1 + \frac{\ln |Z_k(\omega)|}{\ln |a_k|} \right| \right)^{-1} \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln k}{|\ln |a_k||} \times \\ &\times \left( 1 - \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{|\ln |Z_k(\omega)||}{|\ln |a_k||} \right)^{-1} \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln k}{|\ln |a_k||} \cdot (1 - \delta(\omega))^{-1} = 0, \end{aligned}$$

звідки  $\ln k = o(\ln |f_k(\omega)|)$  ( $k \rightarrow +\infty$ ) м.н. Далі, за умовою (3) м.н.

$$\begin{aligned} \alpha_0(\omega) &= \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_k Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = \\ &= \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} = \\ &= \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} = \alpha_0^*(\omega). \end{aligned}$$

Тому, за Твердженням 2 отримуємо, що  $\sigma_{зб}(F, \omega) = \sigma_a(F, \omega) = \alpha_0(\omega) = \alpha_0^*(\omega)$  м.н.

Нескладно доводимо також таке твердження.

*Твердження 5.* Нехай  $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ , має коефіцієнти вигляду  $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$ . Якщо виконуються умови  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln k / \ln |a_k| = 0$ ,  $\alpha_0^*(\omega) > 0$  м.н.,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln |Z_k(\omega)|}{\ln |a_k|} &= \delta_1(\omega) < +\infty \quad \text{м.н.}, \\ \underline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \left| 1 + \frac{\ln |Z_k(\omega)|}{\ln |a_k|} \right| &\neq 0 \quad \text{м.н.}, \end{aligned}$$

то м.н.

$$\sigma_{зб}(F, \omega) = \sigma(F, \omega) \leq (1 + \delta_1(\omega))\alpha_0^*(\omega).$$

Доведення Твердження 5. Зауважимо, що

$$\frac{\ln k}{|\ln |f_k(\omega)||} = \frac{\ln k}{|\ln |a_k||} \left| 1 + \frac{\ln |Z_k(\omega)|}{\ln |a_k|} \right|^{-1},$$

звідси  $\ln k = o(\ln |f_k(\omega)|)$  ( $k \rightarrow +\infty$ ) м.н. Далі, з умови  $\alpha_0^*(\omega) > 0$  м.н. випливає, що для всіх досить великих  $k \geq k_0(\omega)$  м.н.  $-\ln |a_k|/\lambda_k(\omega) > 0$ . Оскільки для всіх досить великих  $k \geq k_1(\omega)$  м.н.  $\frac{\ln |Z_k(\omega)|}{\ln |a_k|} < \delta_1 + \varepsilon_k(\omega)$ , де  $\varepsilon_k(\omega) \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow +\infty$ ), то м.н. для всіх досить великих  $k \geq k_2(\omega) := \max\{k_0(\omega), k_1(\omega)\}$

$$\begin{aligned} \frac{-\ln |a_k Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} &= \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} \left( 1 + \frac{\ln |Z_k(\omega)|}{\ln |a_k|} \right) < \\ &< (1 + \delta_1 + \varepsilon_k(\omega)) \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)}, \end{aligned}$$

де  $\delta_1 = \delta_1(\omega)$ . Тому,

$$\begin{aligned} \alpha_0(\omega) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_k Z_k(\omega)|}{\lambda_k(\omega)} \leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} (1 + \delta_1 + \varepsilon_k(\omega)) \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} = \\ &= (1 + \delta_1) \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} = (1 + \delta_1) \alpha_0^*(\omega). \end{aligned}$$

Звідси, знову за Твердженням 2, отримуємо, що м.н.

$$\sigma_{36}(F, \omega) = \sigma_a(F, \omega) = \alpha_0(\omega) \leq (1 + \delta_1) \alpha_0^*(\omega).$$

Твердження 4 дає змогу довести такі теореми 3 і 4.

**Теорема 3.** Нехай  $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ , її коефіцієнти мають вигляд  $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$  і виконуються умови Твердження 4. Припустимо, що  $(\lambda_k(\omega))$  — послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу  $F_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} P\{\omega : \lambda_k(\omega) < x\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k \geq 0$ . Виконуються наступні твердження:

**а) i)**  $\sigma(\omega) = \sigma(F, \omega) \geq \rho \in (0, +\infty)$  м.н.  $\implies (\forall \varepsilon \in (0, \rho)) : \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon})) < \infty$ ;

**ii)**  $0 \geq \sigma(\omega) = \sigma(F, \omega) \geq \rho \in (-\infty, 0]$  м.н.  $\implies (\forall \varepsilon > 0) : \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon}) < \infty$ ;

**б) i)** Якщо існує послідовність  $(\delta_k)$  така, що  $\delta_k \in (-\infty, 0)$  ( $k \geq 0$ ),  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = -\rho$ ,

$\rho \in (0, +\infty]$ , і  $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k(\frac{\ln |a_k|}{\delta_k})) = +\infty$ , то  $\sigma(F, \omega) \leq \rho$  м.н.

**ii)** Якщо існує послідовність  $(\delta_k)$  така, що  $\delta_k \in (0, +\infty)$  ( $k \geq 0$ ),  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = \rho$ ,

$\rho \in [0, +\infty]$ , і  $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln |a_k|}{\delta_k}) = +\infty$ , то  $\sigma(F, \omega) \leq -\rho$  м.н.

**Теорема 4.** Нехай  $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ , її коефіцієнти мають вигляд  $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$  і виконуються умови Твердження 4.

**а) i)** Якщо існують  $\rho \in (0, +\infty)$  і послідовність  $(\varepsilon_k)$  такі, що  $\varepsilon_k \rightarrow +0$  ( $k \rightarrow +\infty$ ) і  $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k})) < +\infty$ , то  $\sigma(F, \omega) \geq \rho$  м.н.

**ii)** Якщо існують  $\rho \in (-\infty, 0]$  і послідовність  $(\varepsilon_k)$  такі, що  $\varepsilon_k \rightarrow +0$  ( $k \rightarrow +\infty$ ) і  $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k}) < +\infty$ , то  $\sigma(F, \omega) \geq \rho$  м.н.

**б)**  $\sigma(F, \omega) = -\infty$  м.н.  $\implies (\forall E > 1) : \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{1}{E} \ln |a_k|) = +\infty$ .

**Доведення Теорема 3.** За Твердженням 4 маємо рівність (13).

**а) i)** Оскільки  $\sigma(F, \omega) \geq \rho \in (0, +\infty)$  м.н., то з (13) маємо, що  $(\exists B \in \mathcal{A}, P(B) = 1)(\forall \omega \in B) :$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq -\rho,$$

а за означенням верхньої границі  $(\forall \omega \in B)(\forall \varepsilon \in (0, \rho))(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*(\omega)) :$

$$\lambda_k(\omega) < \frac{1}{(-\rho + \varepsilon)} \ln |a_k|, \quad (14)$$

Позначимо  $A_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \omega : \lambda_k(\omega) \geq \frac{1}{(-\rho + \varepsilon)} \ln |a_k| \right\}$ . Зрозуміло, що  $B \subset \overline{C} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k$ , звідки  $P(\overline{C}) = 1$ , а подія  $\overline{C}$  полягає в тому, що “серед подій послідовності  $(A_k)$  відбувається скінченна їх кількість”. Оскільки з попарної незалежності випадкових величин  $(\lambda_k(\omega))$  випливає попарна незалежність подій  $(A_k)$ , то за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі ([22]–[24], [25, с.84])

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) < +\infty.$$

Залишається врахувати, що  $P(A_k) = 1 - F_k\left(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon}\right)$ .

**a) ii)** Якщо  $0 \geq \sigma(\omega, F) \geq \rho \in (-\infty, 0]$  м.н., то замість нерівності (14) отримаємо ( $\forall \omega \in B, P(B) = 1$ ) ( $\forall \varepsilon > 0$ ) ( $\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N}$ ) ( $\forall k \geq k^*(\omega)$ ) нерівність

$$\lambda_k(\omega) > \frac{1}{(-\rho + \varepsilon)} \ln |a_k|,$$

а, отже, ввівши позначення  $A_k \stackrel{def}{=} \left\{ \omega : \lambda_k(\omega) \leq \frac{1}{(-\rho + \varepsilon)} \ln |a_k| \right\}$  й міркуючи як і вище, за другою частиною леми Бореля-Кантелі отримаємо, що

$$\sum_{k=0}^{+\infty} F_k \left( \frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) < +\infty$$

Цим завершується доведення п.а).

**b) i)** Позначимо

$$A_k \stackrel{def}{=} \left\{ \omega : \lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln |a_k|}{\delta_k} \right\}.$$

Тоді

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( 1 - F_k \left( \frac{\ln |a_k|}{\delta_k} \right) \right) = +\infty$$

і за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі ([22]–[25])  $P(\overline{C}) = 0$ , тобто,  $P(C) = 1$ , де

$$C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k.$$

Звідси,

$$(\forall \omega \in C) (\forall N \in \mathbb{N}) (\exists k_N(\omega) \geq N) :$$

$$\lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln |a_k|}{\delta_k} \quad (k = k_N(\omega)),$$

тому,

$$\frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq -\delta_k \quad (k = k_N(\omega), N \geq 1),$$

звідки, остаточно  $\forall \omega \in C$ :

$$\begin{aligned} \sigma(F, \omega) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq \\ &\leq \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty, \\ k=k_N(\omega)}} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty, \\ k=k_N(\omega)}} (-\delta_k) \leq \\ &\leq -\overline{\lim}_{\substack{N \rightarrow +\infty, \\ k=k_N(\omega)}} \delta_k \leq -\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = \rho. \end{aligned}$$

**b) ii)** Позначимо тепер

$$A_k \stackrel{def}{=} \left\{ \omega : \lambda_k(\omega) < \frac{\ln |a_k|}{\delta_k} \right\}$$

і повторимо міркування з доведення п.б) i). Тоді

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} F_k \left( \frac{\ln |a_k|}{\delta_k} \right) = +\infty$$

і за уточненою другою частиною леми Бореля-Кантелі  $P(\overline{C}) = 0$ , тобто,  $P(C) = 1$ , де

$$C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k.$$

Звідси,

$$(\forall \omega \in C) (\forall N \in \mathbb{N}) (\exists k_N(\omega) \geq N) :$$

$$\lambda_k(\omega) < \frac{\ln |a_k|}{\delta_k} \quad (k = k_N(\omega)),$$

тому,

$$\frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} < -\delta_k \quad (k = k_N(\omega), N \geq 1),$$

звідки, остаточно  $\forall \omega \in C$ , тобто, м.н.

$$\begin{aligned} \sigma(F, \omega) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} \leq \\ &\leq \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty, \\ k=k_N(\omega)}} \frac{-\ln |a_k(\omega)|}{\lambda_k} \leq \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty, \\ k=k_N(\omega)}} (-\delta_k) \leq \\ &\leq -\overline{\lim}_{\substack{N \rightarrow +\infty, \\ k=k_N(\omega)}} \delta_k \leq -\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = -\rho. \end{aligned}$$

Теорему 3 повністю доведено.

**Доведення Теорема 4.** Знову, як і вище у доведенні Теорема 3, за Твердженням 4 маємо рівність (13).

i) Позначимо  $A_k = \left\{ \omega : \lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k} \right\}$ . Враховуючи, що  $1 - F_k \left( \frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k} \right) = P(A_k)$ , з умови отримаємо, що  $\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) < \infty$ , і за першою частиною леми Бореля-Кантелі (див., наприклад, [26, 27])  $P(\overline{C}) = 1$ ,  $C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ . Оскільки,  $\overline{C} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k$ , то для кожного  $\omega \in \overline{C}$  існує  $k = k^*(\omega)$  таке, що  $\omega \in \overline{A}_k$  і  $-\rho + \varepsilon_k < 0$  для

всіх  $k \geq k^*(\omega)$ , тобто,  $(\forall k \geq k^*(\omega)) : \lambda_k(\omega) < \frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k}$ . Звідки,  $\frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} > \rho - \varepsilon_k$  і, тому, м.н.

$$\sigma(F, \omega) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} (\rho - \varepsilon_k) = \rho. \quad (15)$$

**а) ii)** Введемо позначення  $A_k \stackrel{def}{=} \left\{ \omega : \lambda_k(\omega) < \frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k} \right\}$ . За умовою  $\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) < +\infty$ . Тому, за першою частиною леми Бореля-Кантелі  $P(\bar{C}) = 1$ ,  $C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ . Звідки, як і вище для кожного  $\omega \in \bar{C} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} \bar{A}_k$  існує  $k = k^*(\omega)$  таке, що  $\omega \in \bar{A}_k$  і  $-\rho + \varepsilon_k > 0$  для всіх  $k \geq k^*(\omega)$ , тобто,  $(\forall k \geq k^*(\omega)) : \lambda_k(\omega) \geq \frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k}$ . Звідки,  $\frac{-\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} > \rho - \varepsilon_k$  і, тому, знову маємо ланцюжок співвідношень (15).

Пункт **а)** Теорема 6 доведено повністю.

**б)** За умовою  $\sigma(F, \omega) = -\infty$  м.н. Тому, за означенням верхньої границі

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{\ln |a_k|}{\lambda_k(\omega)} = +\infty \text{ м.н.}$$

маємо, що  $(\exists B \in \mathcal{A}, P(B) = 1)(\forall \omega \in B)(\forall E > 1)(\forall N \in \mathbb{Z}_+)(\exists k_N(\omega) \geq N, k_N(\omega) \in \mathbb{N})$ :

$$\lambda_k(\omega) < \frac{1}{E} \ln |a_k| \quad (k = k_N(\omega)).$$

Звідси,  $B \subset C \stackrel{def}{=} \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ , де  $A_k = \left\{ \omega : \lambda_k(\omega) < \frac{1}{E} \ln |a_k| \right\}$ , а, тому,  $P(C) = 1$ , звідки  $P(\bar{C}) = 0$ . Отже, за першою частиною леми Бореля-Кантелі отримуємо, що  $\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = +\infty$ . Залишається пригадати знову, що  $P(A_k) = F_k(\frac{1}{E} \ln |a_k|)$ . Теорему 4 доведено повністю.

**3. Деякі наслідки.** Якщо в теоремах 3 і 4 вибрати  $Z_k(\omega) \equiv 1$ , то пункт **а)** Теорема 3 дає Теорему 7 з [1] (див. також [2, Theorem 3] та див. нижче п.а) Теорема 5), а п. **а)** теорема 4 дає Теорему 9 з [1] (див. також [2, Theorem 4] та див. нижче п.а) Теорема 6). Зрозуміло, що те ж саме отримаємо, якщо  $|Z_k(\omega)| = 1$  м.н., або  $0 < c_1 \leq$

$|Z_k(\omega)| < c_2 < +\infty$  м.н., або ще загальніше, коли  $\ln |Z_k(\omega)| = o(\ln |a_k|)$  ( $k \rightarrow +\infty$ ) м.н.

Отже, отримуємо у вигляді наслідків такі твердження.

**Теорема 5.** Нехай  $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ , її коефіцієнти мають вигляд  $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$  і виконується умова  $\ln |Z_k(\omega)| = o(\ln |a_k|)$  ( $k \rightarrow +\infty$ ) м.н. Припустимо, що  $(\lambda_k(\omega))$  — послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу  $F_k(x) \stackrel{def}{=} P\{\omega : \lambda_k(\omega) < x\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $k \geq 0$ . Виконуються наступні твердження:

**а) i)**  $\sigma(\omega) = \sigma(F, \omega) \geq \rho \in (0, +\infty)$  м.н.  $\implies (\forall \varepsilon \in (0, \rho)) : \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon})) < \infty$ ;

**ii)**  $0 \geq \sigma(\omega) = \sigma(F, \omega) \geq \rho \in (-\infty, 0]$  м.н.  $\implies (\forall \varepsilon > 0) : \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon}) < \infty$ ;

**б) i)** Якщо існує послідовність  $(\delta_k)$  така, що  $\delta_k \in (-\infty, 0)$  ( $k \geq 0$ ),  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = -\rho$ ,

$\rho \in (0, +\infty]$ , і  $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k(\frac{\ln |a_k|}{\delta_k})) = +\infty$ , то  $\sigma(F, \omega) \leq \rho$  м.н.

**ii)** Якщо існує послідовність  $(\delta_k)$  така, що  $\delta_k \in (0, +\infty)$  ( $k \geq 0$ ),  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \delta_k = \rho$ ,  $\rho \in$

$[0, +\infty]$ , і  $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln |a_k|}{\delta_k}) = +\infty$ , то  $\sigma(F, \omega) \leq -\rho$  м.н.

**Теорема 6.** Нехай  $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ , її коефіцієнти мають вигляд  $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$  і виконується умова  $\ln |Z_k(\omega)| = o(\ln |a_k|)$  ( $k \rightarrow +\infty$ ) м.н.

**а) i)** Якщо існують  $\rho \in (0, +\infty)$  і послідовність  $(\varepsilon_k)$  такі, що  $\varepsilon_k \rightarrow +0$  ( $k \rightarrow +\infty$ ) і  $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k})) < +\infty$ , то  $\sigma(F, \omega) \geq \rho$  м.н.

**ii)** Якщо існують  $\rho \in (-\infty, 0]$  і послідовність  $(\varepsilon_k)$  такі, що  $\varepsilon_k \rightarrow +0$  ( $k \rightarrow +\infty$ ) і  $\sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{\ln |a_k|}{-\rho + \varepsilon_k}) < +\infty$ , то  $\sigma(F, \omega) \geq \rho$  м.н.

**б)**  $\sigma(F, \omega) = -\infty$  м.н.  $\implies (\forall E > 1) : \sum_{k=0}^{+\infty} F_k(\frac{1}{E} \ln |a_k|) = +\infty$ .

Пункти **б)** цих Теорем 5 і 6 є новими навіть у випадку  $Z_k(\omega) = 1$ , тобто, рядів Діріхле з випадковими показниками і детермінованими коефіцієнтами, як у статтях [1, 2].

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv N.Yu. *Convergence of Dirichlet series with random exponents* // Int. J. Appl. Mathematics. – 2017. – V.30, № 3.
2. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv O.Yu. *On the abscissas of convergence of Dirichlet series with random pairwise independent exponents* // ArXiv:1703.03280v1[math.CV] 12 Mar 2017. – 12 p.
3. Задорожна О.Ю., Скасків О.Б. *Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілтьєса* // Буковинський матем. журн. - 2013. - Т.1, №3-4. С.45-50.
4. Скасків О.Б., Бандура А.І. Асимптотичні оцінки додатних інтегралів та цілі функції. – Львів-Івано-Франківськ: пп. Голіней, 2015. – 108 с.
5. Мандельброт С. *Ряды Дирихле, принципы и методы.* – М.: Мир, 1973.
6. Шеремета М.М. *Цілі ряди Діріхле.* – К.: ІСДО, 1993.
7. Мулява О. М. *Про абсцису збіжності ряду Діріхле* // Мат. Студ. – 1998. – **9**, №2. – С. 171-176.
8. Kahane J.-P. *Some random series of functions.* – 2nd. ed. – Cambridge stud. in adv. math. 5. – Cambridge Univ. Press, 1985. – 308 p.
9. Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. *Про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле* // Буковинський матем. журн. – 2015. – Т.3, № 1. – С.110-114.
10. Tian F., Sun Dao-chun, Yu jia-rong, *Sur les séries aléatoires de Dirichlet* // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1998. – V.326, Série 1. – P.427-431.
11. Tian F. *Growth of random Dirichlet series* // Acta Math. Sci. – 2000. V.20, №3. – P.390-396.
12. Ryll-Nardzewski C. *D.Blackwell's conjecture on power series with random coefficients* // Studia Math. – 1953. – V.13. – P.30-36.
13. Filevych P.V. *On the relations between the abscissa of convergence and the abscissa of absolute convergence of random Dirichlet series* // Mat. Stud. – 2003. – V.20, №1. – P.33-39.
14. Ding X., Xiao Y. *Natural boundary of random Dirichlet series* // Укр. матем. журн. – 2006. – Т.58, №7. – С.997-1005.
15. Hedenmalm H. *Topics in the theory of Dirichlet series* // Вісн. Харків. ун-ту. Сер. мат., прикл. мат. і мех. – 2000. – №475. – P.195-203.
16. Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. *On the radius of convergence of random gap power series* // Int. J. Math. Anal. – 2015. – V.9, no.38. – P.1889-1893.
17. Arnold L. *Über die Konvergenz einer zufälligen Potenzreihe* // J. Reine Angew. Math. – 1966. – V.222. – P.79-112.
18. Arnold L. *Konvergenzprobleme bei zufälligen Potenzreihen mit Lücken* // Math. Zeitschr. – 1966. – Bd.92. – S.356-365.
19. Roters K. *Convergence of random power series with pairwise independent Banach-space-valued coefficients* // Statistics and Probability Letters. – 1993. – V.18. – P.121-123.
20. Никишин Е.М. *Ряды Дирихле с независимыми показателями и их некоторые применения* // Матем. сб. – 1975. – V.96(138), №1. – С. 3-40.
21. Holgate Ph. *Some power series with random gaps* // Adv. Appl. Prob. – 1989. – V.21. – P. 708-710.
22. Erdős P., Rényi A. *On Cantor's series with convergent  $\sum 1/q_n$*  // Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös. Sect. Math. – 1959. – V.2. – P.93-109.
23. Petrov V.V. *Sums of independent random variables.* – New York: Springer, 1975.
24. Мартикайнен А.И., Петров В.В. *О лемме Бореля-Кантелли* // Записки научн. сем. Ленинград. отдел. мат. инст. Стеклова. – 1990. – Т.184. – С.200-207 (English transl. in: J. Math. Sci., 1994, **63**, 540-544).
25. Billingsley P. *Probability and measure.* – New York: Wiley, 1986.
26. Гихман И.И., Скороход Я.В., Ядренко М.И. *Теория вероятностей и математическая статистика.* – К.: Вища школа, 1988. – 439 с.
27. Скасків О.Б. *Теорія ймовірностей.* – Львів: Число, 2012. – 143 с.