УДК 517.93

©2017 р. М.В. Заболоцький, М.Р. Мостова

Львівський національний університет імені Івана Франка

ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ КУТОВОЇ υ-ЩІЛЬНОСТІ НУЛІВ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ В ТЕРМІНАХ ХАРАКТЕРИСТИК ЇХ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ПОХІДНОЇ

Для цілих функцій повільного зростання знайдено достатні умови існування кутової υ-щільності їхніх нулів в термінах регулярного поводження в $L^p[0,2\pi]$-метриці логарифмічної похідної цих функцій та її коефіцієнтів Фур'є.

For entire functions of slowly regular growth we found the sufficient conditions for the existence of angular υ-density of its zeros in terms of regular behavior of its logarithmic derivative in $L^p[0,2\pi]$-metric and Fourier coefficients.

Надалі під функціями зростання розуміємо додатні неспадні необмежені неперервно диференційовні на $\mathbb{R}_+$ функції υ. Функції зростання υ_1 і υ_2 такі, що $\upsilon_1(r) \sim \upsilon_2(r)$, $r \to +\infty$, вважатимемо еквівалентними і будемо ототожнювати.

Позначимо L – клас функцій зростання υ, для яких $r\upsilon'(r)/\upsilon(r) \to 0$ при $r \to +\infty$. Цей клас з точністю до еквівалентних функцій співпадає з класом повільно зростаючих до $+\infty$ функцій (див., наприклад, [1, с. 15]).

Нехай f – ціла трансциндентна функція нульового порядку, $n(r,\alpha,\beta)$ – лічильна функція її нулів, розташованих в секторі $\{z\colon |z| \le r, \alpha \le \arg z < \beta\}$, $0 \le \alpha < \beta < 2\pi$, $n(r) = n(r,0,2\pi)$. Не зменшуючи загальності вважаємо, що $f(0) = 1$.

Позначимо через $H_0(\upsilon)$, $\upsilon \in L$, – клас цілих функцій f нульового порядку, для яких

$$0 < \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n(r)}{\upsilon(r)} < +\infty.$$

Нагадаємо, що вимірна множина $D \subset \mathbb{R}_+$ називається E_0-множиною, якщо

$$\mathrm{mes}(D \cap [0,r]) = o(r), \ r \to +\infty.$$

Множина $G \subset \mathbb{R}_+$ є $\mathcal{E}_\delta$-множиною, $0 < \delta \le 1$, якщо

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\mathrm{mes}(G \cap [0,r])}{r} \le \delta.$$

Означення. *Нулі функції $f \in H_0(\upsilon)$ мають кутову υ-щільність, якщо для всіх α і β, що не належать деякій не більш ніж зліченній множині з $[0,2\pi]$, існує границя*

$$\Delta(\alpha,\beta)\colon = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r,\alpha,\beta)}{\upsilon(r)}.$$

В [2] знайдено необхідні умови існування кутової υ-щільності нулів функції $f \in H_0(\upsilon)$ в термінах регулярного поводження таких характеристик її логарифмічної похідної

$$F(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)},$$

як асимптотика F, коефіцієнти Фур'є

$$c_k(r,F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(re^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi, \ k \in \mathbb{Z},$$

та збіжність F за нормою простору $L^p[0,2\pi]$. Зокрема, доведено наступні твердження

Теорема A. [2] *Нехай $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ і нулі функції f мають кутову υ-щільність. Тоді існує E_0-множина D така, що для $k \in \mathbb{Z}$ існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)} = \Delta,$$

$$\lim_{r\to+\infty, r\notin D} \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} = 0, \ k \ne 0. \qquad (1)$$

Теорема B. [2] *За умов теореми A існує множина $G \in \mathcal{E}_\delta$, $0 < \delta < 1$ така, що для* *довільного* $p \in [1, +\infty)$

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - n(r)}{\upsilon(r)} \right\|_p \to 0, \ r \to +\infty, \ r \notin G. \quad (2)$$

Зауваження 1. *В [3] побудовано приклад функції* $f \in H_0(\upsilon)$, *який показує, що співвідношення (1), (2) не є достатніми умовами для існування кутової* υ-*щільності нулів* f.

В цій статті вказано деякі уточнені співвідношення для k-их коефіцієнтів Фур'є $c_k(r, F)$ та збіжності F в $L^p[0, 2\pi]$-метриці, за умови виконання яких нулі f мають кутову υ-щільність.

Для функцій $\widetilde{\upsilon} \in L$ приймемо

$$\upsilon(r) = \int_0^r \frac{\widetilde{\upsilon}(t)}{t} dt,$$

$\upsilon(0) = 0$. Легко бачити, що $\upsilon \in L$ і $\widetilde{\upsilon}(r) = o(\upsilon(r))$, $r \to +\infty$. Нехай $\Omega = \{|a_j| : j \in \mathbb{N}\}$, (a_j) – послідовність нулів цілої функції f, розташованих в порядку неспадання їх модулів. Покладемо

$$n_k(r) = \sum_{|a_j| \le r} e^{-ik\alpha_j},$$

$k \in \mathbb{Z}$, де $a_j = |a_j| e^{i\alpha_j}$ – нулі цілої функції f. Зауважимо, що $n(r) = n_0(r)$.

З теореми Каратеодорі-Леві (див., наприклад, [4, с. 98]) випливає таке твердження.

Лема. *Нехай* $\upsilon \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$. *Для того, щоб нулі* f *мали кутову* υ-*щільність необхідно і досить, щоб існували границі*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{n_k(r)}{\upsilon(r)} = \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$ *та існують границі*

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{c_0(r, F)}{\upsilon(r)} = \Delta, \quad (3)$$

$$\lim_{r \to +\infty, r \notin \Omega} \frac{c_k(r, F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = c_k, \quad k \neq 0. \quad (4)$$

Тоді нулі f *мають кутову* υ-*щільність.*

Доведення. Нехай $c_k(r, \ln f)$ коефіцієнти Фур'є функції $\ln f$. Оскільки, (див., наприклад, [5, с. 43])

$$c_k(r, \ln f) = \int_0^r \frac{c_k(t, F)}{t} dt,$$

$\widetilde{\upsilon}(r) = r\upsilon'(r)$, то завдяки (4)

$$c_k(r, \ln f) = c_k \int_0^r \upsilon'(t) dt + \int_0^r \varepsilon(t) \upsilon'(t) dt =$$

$$= c_k \upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty, \ r \notin \Omega,$$

де $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to +\infty$.

Далі, враховуючи співвідношення

$$\frac{c_k(r, F)}{\upsilon(r)} \to 0 \text{ при } r \to +\infty, \ k \neq 0$$

і співвідношення (див., наприклад, [5])

$$c_k(r, F) = n_k(r) + k c_k(r, \ln f)$$

отримуємо

$$\frac{n_k(r)}{\upsilon(r)} = \frac{c_k(r, F)}{\upsilon(r)} - k \frac{c_k(r, \ln f)}{\upsilon(r)} \to -k c_k,$$

$r \to +\infty$, $k \neq 0$. Оскільки $c_0(r, F) = n_0(r)$, то

$$\frac{n_0(r)}{\upsilon(r)} \to \Delta$$

при $r \to +\infty$.

Звідси за вищенаведеною лемою отримуємо твердження теореми 1.

Теорема 2. *Нехай* $\widetilde{\upsilon} \in L$, $f \in H_0(\upsilon)$, $p \ge 1$, $\Delta > 0$ *та існує функція* $G \in L^1[0, 2\pi]$ *така, що*

$$\lim_{r \to +\infty} \left\| \frac{F(re^{i\theta}) - \Delta \upsilon(r)}{\tilde{\upsilon}(r)} - G(\theta) \right\|_p = 0.$$

Тоді нулі f *мають кутову* υ-*щільність.*

Доведення. Доведемо спершу, що за умов теореми існують границі (4).

Нехай g_k коефіцієнти Фур'є функції G. Тоді отримуємо

$$\left| \frac{c_k(r, F - \Delta \upsilon(r))}{\widetilde{\upsilon}(r)} - g_k \right| \le$$

$$\leq \left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - G(\theta) \right\|_1 \leq$$

$$\leq \left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - G(\theta) \right\|_p .$$

Для $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ маємо

$$c_k(r, F - \Delta\upsilon(r)) = c_k(r, F)$$

і тому за умов теореми з останньої нерівності отримуємо

$$\left| \frac{c_k(r,F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - g_k \right| \leq$$

$$\leq \left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - G(\theta) \right\|_p \to 0,\ r \to +\infty,$$

що рівносильне існуванню границь

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r,F)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = g_k,\ k \neq 0.$$

Для $k = 0$ маємо

$$c_0(r, F - \Delta\upsilon(r)) = c_0(r, F) - \Delta\upsilon(r)$$

і тому отримуємо

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_0(r,F) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} = g_0.$$

Враховуючи, що $\widetilde{\upsilon}(r) = o(\upsilon(r))$, $r \to +\infty$, з останнього співвідношення отримуємо

$$c_0(r,F) = \Delta\upsilon(r) + g_0\widetilde{\upsilon}(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)) =$$

$$= \Delta\upsilon(r) + o(\upsilon(r)), \quad r \to +\infty.$$

Отже, за теоремою 1 нулі f мають кутову υ-щільність.

Зауваження 2. *Нехай* $\Gamma_m = \bigcup_{j=1}^{m} l_{\psi_j}$, $-\pi \leq \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < \pi$, *скінченна система променів,* $l_{\psi_j} = \{z\colon \arg z = \psi_j\}$, $n(r,\psi_j;f) = n(r,\psi_j)$ *– лічильна функція нулів* $f \in H_0(\upsilon)$, *що лежать на промені* l_{ψ_j}, *модулі яких не перевищують* r, $\widetilde{\upsilon} \in L$. *В [6-7] доведено, що за умов розташування нулів* f *на* Γ_m *і*

$$n(r,\psi_j) = \Delta_j\upsilon(r) + o(\widetilde{\upsilon}(r)),\ r \to +\infty,\ j = \overline{1,m},$$

коефіцієнти Фур'є $c_k(r,F)$ *задовольняють співвідношення (3)-(4) і для довільного* $p \in [1,+\infty)$

$$\left\| \frac{F(re^{i\theta}) - \Delta\upsilon(r)}{\widetilde{\upsilon}(r)} - H(\theta) \right\|_p \to 0,\ r \to +\infty,$$

де $H(\theta) = i\sum_{j=1}^{m} \Delta_j \widehat{h}_j(\theta,\psi_j)$, $\widehat{h}(\theta,\psi_j)$ *–* 2π-*періодичне продовження* $h(\theta,\psi_j) = (\theta - \pi - \psi_j)$, $\psi_j < \theta < \psi_j + 2\pi$, *з* $(\psi_j, \psi_j + 2\pi)$ *на* $\mathbb{R}$, $\Delta = \sum_{j=1}^{m} \Delta_j$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 142 с.

2. *Заболоцький М.В., Мостова М.Р.* Логарифмічна похідна і кутова щільність нулів цілої функції нульового порядку // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, N4. – С. 473-481.

3. *Мостова М.* Зв'язок між асимптотикою логарифмічної похідної і кутовою щільністю нулів цілих функцій повільного зростання // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2015. – **80**. – С. 112-116.

4. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции. — Львов: Выща школа, 1988. — 196 с.

5. *Васильків Я.В.* Асимптотична поведінка логарифмічної похідної та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0,2\pi]$-метриці. Ч. 1 // Матем. студії. – 1999. – **12**, N1. – С. 37-58.

6. *Mostova M.R., Zabolotskyj M.V.* Convergence in $L^p[0,2\pi]$-metric of logarithmic derivative and angular υ-density for zeros of entire function of slowly growth // Carpathian Math. Publ. – 2015. – **7**, N2. – P. 209-214.

7. *Заболоцький М.В., Мостова М.Р.* Достатні умови існування кутової υ-щільності нулів цілої функції нульового порядку // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, N4. – С. 506-516.