

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

**АЛГЕБРА ТИПУ ВІНЕРА ФУНКЦІЙ, ПОРОДЖЕНИХ
(p, q)-ПОЛІНОМАМИ НА БАНАХОВОМУ ПРОСТОРИ**

У роботі досліджено алгебру комплекснозначних функцій на банаховому просторі, які розкладаються у абсолютно збіжний на обмежених множинах ряд (p, q)-поліномів. Досліджено властивості спектра цієї алгебри.

We study the algebra of complex-valued functions on a Banach space which can be represented as an absolutely convergent on bounded sets series of (p, q)-polynomials. Some properties of the spectrum of this algebra are investigated.

1. Вступ

У роботах [1], [2], [3], [6], [7] досліджувались алгебри аналітичних функцій на банахових просторах та їх спектри. Нашим завданням є дослідження алгебри функцій, породжених (p, q)-поліномами на банаховому просторі. Ми розглядаємо алгебру функцій, які розкладаються у абсолютно збіжний на обмежених підмножинах банахового простору ряд (p, q)-поліномів. Таку алгебру можна розглядати як певне узагальнення відомої алгебри Вінера функцій з абсолютно збіжним рядом Фур'є. Для цієї алгебри вдається розвинути і застосувати техніку, розроблену для аналітичних функцій у роботах [2], [3], [7].

2. Основні означення та попередні відомості

Нехай X – банахів простір. Функцію $A : X^{p+q} \rightarrow \mathbb{C}$, де $p, q \in \mathbb{Z}$, $p, q \geq 0$, будемо називати (p, q)-лінійною симетричною формою, якщо A є лінійною за кожним із перших p аргументів, антилінійною за кожним із останніх q аргументів, симетричною за першими p аргументами і симетричною за останніми q аргументами. Простір (p, q)-лінійних симетричних форм будемо позначати $\mathcal{L}_a^{s(p, q)X}$. Простір неперервних (p, q)-лінійних симетричних форм будемо позначати $\mathcal{L}^s(p, q)X$. Простір $\mathcal{L}^s(p, q)X$ із нормою

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1, \dots, \|x_{p+q}\| \leq 1} |A(x_1, \dots, x_{p+q})|$$

є банаховим простором.

Якщо для функції $P : X \rightarrow \mathbb{C}$ існує (p, q)-лінійна симетрична форма A_P така, що P є звуженням на діагональ форми A_P , тобто $P(x) = A_P(\underbrace{x, \dots, x}_{p+q})$ для довільного $x \in X$,

то P будемо називати (p, q)-поліномом. Число p будемо називати степенем однорідності P і позначати $\deg_h P$, число q будемо називати степенем антиоднорідності P і позначати $\deg_a P$. Форму A_P будемо називати (p, q)-лінійною симетричною формою, асоційованою з (p, q)-поліномом P . Простір (p, q)-поліномів будемо позначати $\mathcal{P}_a^{(p, q)X}$. Простір неперервних (p, q)-поліномів із нормою

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |P(x)|$$

будемо позначати $\mathcal{P}^{(p, q)X}$.

У [5] побудовано так звану поляризаційну формулу, яка дозволяє знайти асоційовану форму для даного (p, q)-полінома:

$$\begin{aligned} A_P(x_1, \dots, x_{p+q}) &= \frac{1}{(2q+1)2^{p+q}p!q!} \times \\ &\times \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+q} = \pm 1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{p+q} \sum_{j=1}^{2q+1} \alpha_j^{2q+1-p} \times \\ &\times P\left(\alpha_j(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_p x_p) + \right. \\ &\left. + \varepsilon_{p+1} x_{p+1} + \dots + \varepsilon_{p+q} x_{p+q}\right), \quad (1) \end{aligned}$$

де $\alpha_j = \exp\left(\frac{2\pi(j-1)i}{2q+1}\right)$. Цим самим показано, що простори $\mathcal{L}_a^{s(p, q)X}$ і $\mathcal{P}_a^{(p, q)X}$ ізоморфні.

Також у [5] доведено так звану поляризаційну нерівність для норм неперервного (p, q) -полінома і асоційованої з ним (p, q) -лінійної симетричної форми:

$$\|P\| \leq \|A_P\| \leq c(p, q, X) \|P\|,$$

де $c(p, q, X)$ – поляризаційна константа, яка знаходиться в межах $1 \leq c(p, q, X) \leq \frac{(p+q)^{p+q}}{p!q!}$.

Із поляризаційної формули і поляризаційної нерівності випливає, що простори $\mathcal{L}^s(p, q, X)$ і $\mathcal{P}(p, q, X)$ топологічно ізоморфні.

3. Тензорні добутки

Побудуємо передспряжений простір до простору неперервних (p, q) -поліномів $\mathcal{P}(p, q, X)$.

Для банахового простору $X = (X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ визначимо простір $\bar{X} = (X, +, *, \|\cdot\|)$, у якому задамо операцію множення на скаляр “ $*$ ” наступним чином:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall x \in X \quad \lambda * x = \bar{\lambda} \cdot x.$$

Простір $\bar{X}$ називають комплексно-спряженим простором до простору X . Очевидно, $\bar{\bar{X}}$ буде банаховим простором, антиізоморфним до X .

Тензорний добуток $\underbrace{X \otimes \dots \otimes X}_p \otimes \underbrace{\bar{X} \otimes \dots \otimes \bar{X}}_q$ будемо на-

зивати тензорним (p, q) -степенем простору X і будемо позначати $\bigotimes_s^{p,q} X$.

Означення 1. Визначимо оператор (p, q) -симетризації $s_{p,q} : \bigotimes_s^{p,q} X \rightarrow \bigotimes_s^{p,q} X$. На елементарних тензорах покладемо

$$s_{p,q}(x_1 \otimes \dots \otimes x_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \times \\ \times \sum_{\sigma \in S(p)} \sum_{\tau \in S(q)} x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(p)} \otimes x_{p+\tau(1)} \otimes \dots \\ \otimes x_{p+\tau(q)},$$

де через $S(n)$ позначено групу всіх підстановок на множині $\{1, 2, \dots, n\}$.

На довільні тензори продовжуємо $s_{p,q}$ за лінійністю.

Образ оператора $s_{p,q}$ назовемо (p, q) -симетричним тензорним степенем простору X і будемо позначати $\bigotimes_s^{p,q} X$.

Елемент простору $\bigotimes_s^{p,q} X$ вигляду $x^{\otimes(p,q)} = \underbrace{x \otimes \dots \otimes x}_p \otimes \underbrace{x \otimes \dots \otimes x}_q$ будемо називати елементарним (p, q) -симетричним тензором.

Твердження 1. Кожен елемент простору $\bigotimes_s^{p,q} X$ можна зобразити у вигляді скінченної суми елементів вигляду $\lambda y^{\otimes(p,q)}$, де $|\lambda| = 1$.

Доведення. Доведемо спочатку, що (p, q) -симетризацію довільного елементарного тензора можна подати у вигляді такої суми.

Нехай $x_1 \otimes \dots \otimes x_{p+q} \in \bigotimes_s^{p,q} X$. Нехай $f : X^{p+q} \rightarrow \bigotimes_s^{p,q} X$, $f(x_1, \dots, x_{p+q}) = s(x_1 \otimes \dots \otimes x_{p+q})$. Очевидно, $f \in (p, q)$ -лінійним симетричним відображенням. Використаємо поляризаційну формулу.

$$f(x_1, \dots, x_{p+q}) = \frac{1}{2^{p+q} p! q!} \times \\ \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+q} = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{p+q} \times \sum_{l=1}^{2q+1} \frac{\alpha_l^{2q+1-p}}{2q+1} \times \\ \times f \left(\Delta_{p,q} \left(\alpha_l \sum_{k=1}^p \varepsilon_k x_k + \sum_{k=p+1}^{p+q} \varepsilon_k x_k \right) \right) = \\ = \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{p+q} = \pm 1} \sum_{l=1}^{2q+1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{p+q} \alpha_l^{2q+1-p} \times \\ \times \left(\left(\frac{1}{2^{p+q} p! q! (2q+1)} \right)^{1/p+q} \times \right. \\ \left. \times \left(\alpha_l \sum_{k=1}^p \varepsilon_k x_k + \sum_{k=p+1}^{p+q} \varepsilon_k x_k \right) \right)^{\otimes(p,q)},$$

де $\Delta_{p,q}(x) = \underbrace{(x, \dots, x)}_{p+q}$.

Оскільки $|\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{p+q} \alpha_l^{2q+1-p}| = 1$, то для (p, q) -симетризації елементарного тензора теорему доведено. Кожен тензор $\theta \in \bigotimes_s^{p,q} X$ є сумою (p, q) -симетризацій елементарних тензорів, тому

$$\theta = \sum_i \lambda_i y_i^{\otimes(p,q)}, \quad |\lambda_i| = 1.$$

Покажемо, що простір $\mathcal{P}_a(p,qX)$ ізоморфний простору лінійних функціоналів $(\bigotimes_s^{p,q} X)^*$.

Твердження 2. Для кожного $P \in \mathcal{P}_a(p,qX)$ існує лінійний функціонал $j_{p,q}^*(P)$ на $\bigotimes_s^{p,q} X$ такий, що наступна діаграма комутує:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{P} & \mathbb{C}, \\ & \searrow \delta_{p,q} & \nearrow j_{p,q}^*(P) \\ & \bigotimes_s^{p,q} X & \end{array}$$

де $\delta_{p,q}(x) = x^{\otimes(p,q)}$. Відображення $j_{p,q}^*$ є ізоморфізмом між просторами $\mathcal{P}_a(p,qX)$ і $(\bigotimes_s^{p,q} X)^*$.

Доведення. Нехай $P \in \mathcal{P}_a(p,qX)$. Визначимо $j_{p,q}^*(P)$ на елементарних симетричних тензорах:

$$j_{p,q}^*(P)(x^{\otimes(p,q)}) = P(x)$$

і продовжимо за лінійністю на всі тензори $\theta \in \bigotimes_s^{p,q} X$:

$$\begin{aligned} j_{p,q}^*(P)(\theta) &= j_{p,q}^*(P) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{\otimes(p,q)} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i j_{p,q}^*(P)(x_i^{\otimes(p,q)}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i). \end{aligned}$$

Тоді $j_{p,q}^*(P) \in (\bigotimes_s^{p,q} X)^*$ і діаграма комутує.

Доведемо ін'єктивність відображення $j_{p,q}^*$. Умова комутативності діаграми визначає значення лінійного функціонала $j_{p,q}^*(P)$ на елементарних (p,q) -симетричних тензорах, а саме $j_{p,q}^*(P)(x^{\otimes(p,q)}) = P(x)$. Тому $j_{p,q}^*(P)$ однозначно визначає значення (p,q) -полінома P , образом якого він є.

Доведемо сюр'єктивність відображення $j_{p,q}^*$. Нехай маємо деякий лінійний функціонал $f \in (\bigotimes_s^{p,q} X)^*$. Покажемо, що існує такий (p,q) -поліном $P \in \mathcal{P}_a(p,qX)$, що $j_{p,q}^*(P) = f$. Покладемо

$$A_{p,q}(x_1, \dots, x_{p+q}) = f(s_{p,q}(x_1 \otimes \dots \otimes x_{p+q})).$$

Легко перевірити, що $A_{p,q} \in \mathcal{L}_a(p,qX)$. Нехай P – це (p,q) -поліном, асоційований з $A_{p,q}$. Тоді $j_{p,q}^*(P) = f$.

Лінійність оператора $j_{p,q}^*$ також перевірити не складно. Отже, $j_{p,q}^*$ є ізоморфізмом між просторами $\mathcal{P}_a(p,qX)$ і $(\bigotimes_s^{p,q} X)^*$.

Введемо норму на просторі $\bigotimes_s^{p,q} X$. Для $\theta \in \bigotimes_s^{p,q} X$ покладемо

$$\|\theta\|_{\pi,s} = \inf \left\{ \sum_j \|y_j\|^{p+q} : \theta = \sum_j \lambda_j y_j^{\otimes(p,q)}, \right. \\ \left. |\lambda_j| = 1 \right\}.$$

Будемо називати $\|\cdot\|_{s,\pi}$ проективною симетричною тензорною нормою. Простір $\bigotimes_s^{p,q} X$ із нормою $\|\cdot\|_{s,\pi}$ будемо позначати $\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X$.

Твердження 3. Відкрита одинична куля простору $\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X$ збігається з опуклою оболонкою множини $M = \{\lambda x^{\otimes(p,q)} : \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, \|x\| < 1\}$.

Доведення. Нехай B_1 – відкрита одинична куля простору $\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X$, $\text{conv}(M)$ – опукла оболонка множини M .

Покажемо, що $\text{conv}(M) \subset B_1$. Нехай $\theta \in \text{conv}(M)$. Тоді існують скінченні послідовності $\{\mu_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$, $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$, такі, що $\mu_i > 0$, $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$, $|\lambda_i| = 1$, $\|x_i\| < 1$ і $\theta = \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i x_i^{\otimes(p,q)}$. Тоді

$$\|\theta\|_{s,\pi} \leq \sum_{i=1}^n |\mu_i \lambda_i| \cdot \|x_i^{\otimes(p,q)}\| <$$

$$< \sum_{i=1}^n |\mu_i \lambda_i| = \sum_{i=1}^n \mu_i = 1.$$

Отже, $\|\theta\|_{s,\pi} < 1$, тому $\theta \in B_1$.

Покажемо, що $B_1 \subset \text{conv}(M)$. Нехай $\theta \in B_1$. Якщо $\theta = 0$, то $\theta \in \text{conv}(M)$. Нехай $\theta \neq 0$. Тоді $0 < \|\theta\|_{s,\pi} < 1$. Оскільки $\|\theta\|_{s,\pi} < 1$, то існує зображення θ , $\theta = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^{\otimes(p,q)}$, таке, що $|\lambda_i| = 1$ і $\sum_{i=1}^n \|y_i\|^{p+q} < 1$.

Нехай ε – поки що довільне додатне число. Можемо зобразити θ у такому вигляді:

$$\theta = \sum_{i=1}^n (1+\varepsilon)^{p+q} \|y_i\|^{p+q} \lambda_i \left(\frac{y_i}{\|y_i\|(1+\varepsilon)} \right)^{\otimes(p,q)}.$$

Виберемо ε так, щоб виконувалась умова

$$\sum_{i=1}^n (1+\varepsilon)^{p+q} \|y_i\|^{p+q} < 1.$$

Для цього достатньо взяти

$$\varepsilon < \sqrt[p+q]{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \|y_i\|^{p+q}}} - 1.$$

Тепер позначимо $(1 + \varepsilon)^{p+q} \|y_i\|^{p+q}$ через μ_i .
Покладемо $\mu_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n \mu_i$. Тоді

$$\theta = \mu_{n+1} \cdot 0 + \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i \left(\frac{y_i}{\|y_i\|(1 + \varepsilon)} \right)^{\otimes(p,q)}.$$

Отже, $\theta \in \text{conv}(M)$.

Позначимо звуження відображення $j_{p,q}^*$ на простір неперервних (p, q) -поліномів $\mathcal{P}^{(p,q)}X$ через $j'_{p,q}$. Покажемо, що $j'_{p,q}$ є ізометрією між просторами $\mathcal{P}^{(p,q)}X$ і $(\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X)'$.

Твердження 4. *Простір неперервних (p, q) -поліномів $\mathcal{P}^{(p,q)}X$ є ізометричним до простору неперервних лінійних функціоналів $(\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X)'$.*

Доведення. Оцінимо норму (p, q) -полінома P .

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |P(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |j'_{p,q}(P)(x^{\otimes(p,q)})| \leq \\ &\leq \sup_{\|\theta\| \leq 1} |j'_{p,q}(P)(\theta)| = \|j'_{p,q}(P)\|. \end{aligned}$$

Отже, $\|P\| \leq \|j'_{p,q}(P)\|$. Оцінимо норму $j'_{p,q}(P)$.

$$\begin{aligned} \|j'_{p,q}(P)\| &= \sup_{\|\theta\|_{s,\pi} \leq 1} |j'_{p,q}(P)(\theta)| = \\ &= \sup_{\|\theta\|_{s,\pi} < 1} |j'_{p,q}(P)(\theta)| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sup \left\{ \left| j'_{p,q}(P) \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i x_i^{\otimes(p,q)} \right) \right| : \mu_i > 0, \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^n \mu_i \leq 1, |\lambda_i| = 1, \|x_i\| < 1 \right\}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &\left| j'_{p,q}(P) \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i x_i^{\otimes(p,q)} \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mu_i \left| j'_{p,q}(P) \left(x_i^{\otimes(p,q)} \right) \right| = \sum_{i=1}^n \mu_i |P(x_i)| \leq \\ &\leq \|P\| \sum_{i=1}^n \mu_i \|x_i\| \leq \|P\|, \end{aligned}$$

то $\|j'_{p,q}(P)\| \leq \|P\|$. Звідси робимо висновок, що $\|P\| = \|j'_{p,q}(P)\|$.

Простір $(\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X)'$ збігається з простором $(\widehat{\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X})'$, де $\widehat{\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X}$ – поповнення простору $\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X$. Тому ми отримали зображення простору $\mathcal{P}^{(p,q)}X$ у вигляді спряженого до банахового простору $\widehat{\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X}$.

4. k -однорідні поліноми на тензорному добутку

Визначимо відображення

$$j : \mathcal{P}^{(km,kl)}X \rightarrow \mathcal{P}^{(k\widehat{\bigotimes_{s,\pi}^{m,l}}X)}$$

наступним чином. Нехай $P \in \mathcal{P}^{(km,kl)}X$, A_P – (km, kl) -лінійна симетрична форма, асоційована з P . Покладемо

$$\begin{aligned} A_{P_{(m,l)}}(x_1^{\otimes(m,l)}, \dots, x_k^{\otimes(m,l)}) &= A_P(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_m, \dots, \\ &\dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_m; \underbrace{x_1, \dots, x_1}_l, \dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_l) \end{aligned}$$

і продовжимо за k -лінійністю на всі тензори із $\widehat{\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X}$. Тоді $A_{P_{(m,l)}}$ буде k -лінійною симетричною формою на просторі $\widehat{\bigotimes_{s,\pi}^{p,q} X}$. Покладемо $P_{(m,l)}(\theta) = A_{P_{(m,l)}}(\underbrace{\theta, \dots, \theta}_k)$. Тепер визначимо відображення j як $j(P) = P_{(m,l)}$.

Теорема 1. *Для неперервного (km, kl) -полінома P , k -однорідний поліном $P_{(m,l)}$ буде неперервним і для норми полінома $P_{(m,l)}$ маємо таку оцінку:*

$$\|P\| \leq \|P_{(m,l)}\| \leq c(km, kl, X) \|P\|,$$

де $c(km, kl, X)$ – поляризаційна константа.

Доведення. Оцінимо значення полінома $P_{(m,l)}$ на відкритій одиничній кулі простору $\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{p,q} X$. Якщо $\theta \in \widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{p,q} X$ і $\|\theta\| < 1$, то за твердженням 3 існують послідовності $\{\mu_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$, $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ такі, що $\mu_i > 0$, $\sum_{i=1}^n \mu_i \leq 1$, $|\lambda_i| = 1$, $\|x_i\| < 1$ і $\theta = \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i x_i^{\otimes(m,l)}$. Оцінимо значення $|P_{(m,l)}(\theta)|$.

$$\begin{aligned} |P_{(m,l)}(\theta)| &= |A_{P_{(m,l)}}(\underbrace{\theta, \dots, \theta}_k)| = \\ &= \left| A_{P_{(m,l)}} \left(\sum_{i_1=1}^n \mu_{i_1} \lambda_{i_1} x_{i_1}^{\otimes(m,l)}, \dots, \sum_{i_k=1}^n \mu_{i_k} \lambda_{i_k} x_{i_k}^{\otimes(m,l)} \right) \right| = \\ &= \left| \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \mu_{i_1} \lambda_{i_1} \dots \mu_{i_k} \lambda_{i_k} \times \right. \\ &\quad \left. \times A_{P_{(m,l)}} \left(x_{i_1}^{\otimes(m,l)}, \dots, x_{i_k}^{\otimes(m,l)} \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \mu_{i_1} \dots \mu_{i_k} \times \\ &\quad \times \left| A_{P_{(m,l)}} \left(x_{i_1}^{\otimes(m,l)}, \dots, x_{i_k}^{\otimes(m,l)} \right) \right| = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \mu_{i_1} \dots \mu_{i_k} \left| A_P \left(\underbrace{x_{i_1}, \dots, x_{i_1}}_m, \dots, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots, \underbrace{x_{i_k}, \dots, x_{i_k}}_m; \underbrace{x_{i_1}, \dots, x_{i_1}}_l, \dots, \underbrace{x_{i_k}, \dots, x_{i_k}}_l \right) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \mu_{i_1} \dots \mu_{i_k} \|x_{i_1}\|^{m+l} \dots \|x_{i_k}\|^{m+l} \|A_P\| \leq \\ &\leq \|A_P\| \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \mu_{i_1} \dots \mu_{i_k} = \|A_P\| \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right)^k \leq \\ &\leq \|A_P\| \leq c(km, kl, X) \|P\|. \end{aligned}$$

Отже, поліном $P_{(m,l)}$ – неперервний і $\|P_{(m,l)}\| \leq c(km, kl, X) \|P\|$.

Оскільки $P(x) = P_{(m,l)}(x^{\otimes(m,l)})$ і з того, що $\|x\| \leq 1$ випливає, що $\|x^{\otimes(m,l)}\|_{s,\pi} \leq 1$, то $\|P\| \leq \|P_{(m,l)}\|$.

5. Алгебра типу Вінера функцій, породжених (p, q) -поліномами

Нехай $\mathcal{W}_0(X)$ – алгебра, породжена скінченними лінійними комбінаціями і добутками всіх (p, q) -поліномів, де $p, q \in \mathbb{Z}$, $p, q \geq 0$. Кожен елемент f алгебри $\mathcal{W}_0(X)$ можна подати у вигляді

$$f = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m f_{k,m-k},$$

де $f_{k,m-k} \in \mathcal{P}^{(k,m-k)}(X)$.

Позначимо $\mathbb{Q}^+$ множину раціональних чисел, більших від нуля. Для кожного $r \in \mathbb{Q}^+$ введемо на алгебрі $\mathcal{W}_0(X)$ норму

$$\|f\|_r = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \sup_{\|x\| \leq r} |f_{k,m-k}(x)|.$$

Зауважимо, що оскільки $f_{k,m-k} \in \mathcal{P}^{(p,q)}(X)$, то

$$\sup_{\|x\| \leq r} |f_{k,m-k}(x)| = \sup_{\|y\| \leq 1} |f_{k,m-k}(ry)| = r^m \|f_{k,m-k}\|.$$

На $\mathcal{W}_0(X)$ отримали зліченну систему норм $\{\|\cdot\|_r : r \in \mathbb{Q}^+\}$. Ця система норм породжує на $\mathcal{W}_0(X)$ метризовну топологію. Нехай $\mathcal{W}(X)$ – поповнення алгебри $\mathcal{W}_0(X)$ в метриці, породженій системою норм. Елементами алгебри $\mathcal{W}(X)$ будуть функції

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m f_{k,m-k}$$

такі, що для кожного $r \in \mathbb{Q}^+$ буде збіжним ряд

$$\|f\|_r = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m r^m \|f_{k,m-k}\|.$$

Нехай $\mathcal{W}(X)'$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{W}(X)$. Не складно перевірити правильність такого твердження:

Твердження 5. Для кожного лінійного неперервного функціонала $\phi \in \mathcal{W}(X)'$ існує число $r \in \mathbb{Q}^+$ таке, що ϕ – неперервний відносно норми $\|\cdot\|_r$.

Зауважимо, що для $P \in \mathcal{P}^{(p,q)}(X)$ маємо $\|P\|_r = r^{p+q} \|P\|$. Звідси робимо висновок, що звуження норми $\|\cdot\|_r$ на простір $\mathcal{P}^{(p,q)}(X)$ є нормою, еквівалентною до норми рівномірної збіжності на одиничній кулі. Отже, топологія, успадкована простором

$\mathcal{P}^{(p,q)}X$ від алгебри $\mathcal{W}(X)$, збігається з топологією рівномірної збіжності на одиничній кулі. Для лінійного неперервного функціонала $\phi \in \mathcal{W}(X)'$ будемо позначати $\phi_{p,q}$ зображення ϕ на простір $\mathcal{P}^{(p,q)}X$. Оскільки ϕ – неперервний, то $\phi_{p,q}$ – також неперервний і існує

$$\|\phi_{p,q}\| = \sup\{|\phi_{p,q}(P)| : P \in \mathcal{P}^{(p,q)}X, \|P\| \leq 1\}.$$

Означення 2. Визначимо радіус-функцію R на $\mathcal{W}(X)'$, поклавши за $R(\phi)$ інфімум $r > 0$ таких, що ϕ є неперервним відносно норми $\|\cdot\|_r$.

Зауважимо, що згідно з твердженням 5, для кожного $\phi \in \mathcal{W}(X)'$

$$0 \leq R(\phi) < \infty.$$

Теорема 2. Радіус-функція R на $\mathcal{W}(X)'$ задається рівністю

$$R(\phi) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}.$$

Доведення. Доведемо, що $R(\phi) \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}$. Якщо

$\limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m} = 0$, то нерівність очевидна. Нехай

$$0 < t < \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}.$$

Тоді існує зростаюча послідовність $\{m_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ така, що $\max_{0 \leq k \leq m_j} \|\phi_{k,m_j-k}\|^{1/m_j} > t$ для достатньо великих j . Звідси, існує послідовність (p,q) -поліномів $\{P_j\}_{j=1}^\infty$, сума однорідного і антиоднорідного степенів яких дорівнює m_j , $\|P_j\| = 1$ і $|\phi(P_j)| > t^{m_j}$ для достатньо великих j . Нехай $0 < r < t$. Тоді $\|P_j\|_r = r^{m_j}$ і

$$|\phi(P_j)| > t^{m_j} = (t/r)^{m_j} \cdot r^{m_j} = (t/r)^{m_j} \|P_j\|_r.$$

Оскільки $(t/r)^{m_j} \rightarrow +\infty$ при $j \rightarrow +\infty$, то ϕ – розривний відносно норми $\|\cdot\|_r$. Отже, $R(\phi) \geq r$. Але, оскільки t і r обрані довільно, то

$$R(\phi) \geq \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}.$$

Тепер доведемо, що

$$R(\phi) \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}.$$

Нехай

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m} < s.$$

Тоді для великих m

$$\|\phi_{k,m-k}\| \leq s^m$$

Можна вибрати константу $c \geq 1$ таку, що

$$\|\phi_{k,m-k}\| \leq cs^m$$

для довільних $m > 0$ і $0 \leq k \leq m$.

Нехай $f \in \mathcal{W}(X)$, $f = \sum_{m=0}^\infty \sum_{k=0}^m f_{k,m-k}$. Нехай $r > s$. Оскільки $r^m \|f_{k,m-k}\| = \|f_{k,m-k}\|_r$ і $\|f\|_r = \sum_{j=0}^\infty \sum_{i=0}^j \|f_{i,j-i}\|_r \geq \|f_{k,m-k}\|_r$ для довільних $m \geq 0$ і $0 \leq k \leq m$, то

$$\|f_{k,m-k}\| = \frac{1}{r^m} \|f_{k,m-k}\|_r \leq \frac{1}{r^m} \|f\|_r.$$

Із неперервності $\phi_{k,m-k}$ отримуємо

$$|\phi_{k,m-k}(f_{k,m-k})| \leq \|\phi_{k,m-k}\| \|f_{k,m-k}\| \leq \frac{cs^m}{r^m} \|f\|_r.$$

Тепер

$$\begin{aligned} |\phi(f)| &= \left| \phi \left(\sum_{m=0}^\infty \sum_{k=0}^m f_{k,m-k} \right) \right| = \\ &= \left| \sum_{m=0}^\infty \sum_{k=0}^m \phi_{k,m-k}(f_{k,m-k}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^\infty \sum_{k=0}^m |\phi_{k,m-k}(f_{k,m-k})| \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^\infty \frac{mcs^m}{r^m} \|f\|_r = \\ &= c \left(\sum_{m=0}^\infty m \left(\frac{s}{r} \right)^m \right) \|f\|_r = \frac{cs/r}{(1-s/r)^2} \|f\|_r. \end{aligned}$$

Отже, ϕ – неперервний відносно норми $\|\cdot\|_r$. Звідси $R(\phi) \leq r$. Оскільки s і r вибрали довільно, то

$$R(\phi) \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}.$$

Отже, отримали

$$R(\phi) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq m} \|\phi_{k,m-k}\|^{1/m}.$$

Теорема 3. Нехай ϕ – лінійний функціонал на алгебрі $\mathcal{W}(X)$. Припустимо, що звуження ϕ на простори $\mathcal{P}^{(p,q)}(X)$, $p, q \geq 0$, неперервні і їх норми задовольняють оцінку $\|\phi_{p,q}\| \leq cs^{p+q}$ для деяких $c, s > 0$. Тоді ϕ – неперервний лінійний функціонал.

Доведення. Нехай $r > s$ і f – довільна функція із $\mathcal{W}(X)$. Тоді, згідно з доведеною в теоремі 2 оцінкою,

$$|\phi(f)| \leq \frac{cs/r}{(1-s/r)^2} \|f\|_r.$$

Отже, ϕ – неперервний відносно норми $\|\cdot\|_r$. Оскільки ϕ – неперервний відносно однієї з норм, які породжують топологію на $\mathcal{W}(X)$, то ϕ – неперервний відносно топології алгебри $\mathcal{W}(X)$.

6. Основний результат

Нехай m, l – деякі цілі невід’ємні числа. Нехай

$$\Lambda = \{(p, q) : p, q \in \mathbb{Z},$$

$$0 \leq p \leq m, 0 \leq q \leq l\} \setminus \{(m, l)\}.$$

Нехай $\mathcal{W}_\Lambda(X)$ – підалгебра алгебри $\mathcal{W}(X)$, породжена всіма (p, q) -поліномами, для яких $(p, q) \in \Lambda$.

Теорема 4. Нехай ϕ – лінійний неперервний функціонал на $\mathcal{W}(X)$ такий, що $\phi(P) = 0$ для кожного $P \in \mathcal{P}^{(m,l)}(X) \cap \mathcal{W}_\Lambda(X)$ і $\phi_{m,l} \neq 0$. Тоді існує неперервний комплекснозначний гомоморфізм ψ на $\mathcal{W}(X)$ такий, що $\psi_{p,q} = 0$, якщо $(p, q) \in \Lambda$, і $\psi_{m,l} = \phi_{m,l}$. Радіус-функція

$$R(\psi) \leq e \frac{m+l}{m^{m/(m+l)} l^{l/(m+l)}} \|\phi_{m,l}\|^{1/(m+l)}.$$

Доведення. Оскільки простір $\mathcal{P}^{(m,l)}(X)$ є ізометричним до простору $\left(\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{m,l} X\right)'$ (твердження 4) з ізометрією $j'_{m,l}$, то простір неперервних лінійних функціоналів $\mathcal{P}^{(m,l)}(X)'$ ізометричний до простору $\left(\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{m,l} X\right)''$. Нехай $j''_{m,l} : \mathcal{P}^{(m,l)}(X)' \rightarrow \left(\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{m,l} X\right)''$ – ізометрія між цими просторами. Нехай $w = j''_{m,l}(\phi_{m,l})$. Тоді $\|w\| = \|\phi_{m,l}\|$. Оскільки $\phi_{m,l} \neq 0$, то $w \neq 0$. Тепер для довільного $P \in \mathcal{P}^{(m,l)}(X)$

$$\phi_{m,l}(P) = j''_{m,l}(\phi_{m,l})(j'_{m,l}(P)) = w(j'_{m,l}(P)).$$

Нехай маємо (kt, kl) -поліном P , де k – ціле невід’ємне число. Згідно з теоремою 5.1, простір (kt, kl) -поліномів $\mathcal{P}^{(kt,kl)}(X)$ відображається в простір $\mathcal{P}^{(k)\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{m,l} X}$ відображенням $Q \mapsto Q_{(m,l)}$. При цьому маємо таку оцінку для норм:

$$\|Q\| \leq \|Q_{(m,l)}\| \leq c(kt, kl, X) \|Q\|.$$

Нехай $P_{(m,l)}$ – образ P при даному ізоморфізмі. Будемо позначати $\widetilde{P_{(m,l)}}$ продовження Арона-Бернера (див. [4]) полінома $P_{(m,l)}$ на простір $\left(\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{m,l} X\right)''$. Для довільного (p, q) -полінома Q покладемо

$$\psi(Q) =$$

$$= \begin{cases} \widetilde{Q_{(m,l)}}(w), & \text{якщо існує } k \text{ таке, що} \\ & \deg_h Q = kt, \deg_a Q = kl \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Перевіримо, що $\psi_{m,l} = \phi_{m,l}$. Для $Q \in \mathcal{P}^{(m,l)}(X)$ поліном $Q_{(m,l)}$ – це лінійний неперервний функціонал на просторі $\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{m,l} X$, тому

$$\begin{aligned} \psi(Q) &= \widetilde{Q_{(m,l)}}(w) = w(Q_{(m,l)}) = \\ &= w(j'_{m,l}(Q)) = \phi_{m,l}(Q). \end{aligned}$$

Отже, $\psi_{m,l} = \phi_{m,l}$.

Доведемо, що для довільних (p, q) -поліномів P і Q буде $\psi(PQ) = \psi(P)\psi(Q)$. Розглянемо три випадки.

a) Припустимо, що не існує такого цілого k , що $\deg_h PQ = kt$ і $\deg_a PQ = kl$. Тоді виконується принаймні одна з умов:

- 1) не існує такого цілого k_1 , що $\deg_h P = k_1 t$ і $\deg_a P = k_1 l$,
- 2) не існує такого цілого k_2 , що $\deg_h Q = k_2 t$ і $\deg_a Q = k_2 l$.

У першому випадку $\psi(P) = 0$ і $\psi(PQ) = 0$. У другому випадку $\psi(Q) = 0$ і $\psi(PQ) = 0$. Отже, $\psi(PQ) = \psi(P)\psi(Q)$.

b) Припустимо, що існує ціле k таке, що $\deg_h PQ = kt$ і $\deg_a PQ = kl$, і існує ціле k_1 таке, що $\deg_h P = k_1 t$ і $\deg_a P = k_1 l$. Позначимо $k_2 = k - k_1$. Тоді $\deg_h Q = k_2 t$,

$\deg_a Q = k_2 l$ і

$$\begin{aligned}\psi(PQ) &= (\widetilde{PQ})_{(m,l)}(w) = \\ &= \widetilde{P}_{(m,l)}(w) \widetilde{Q}_{(m,l)}(w) = \psi(P)\psi(Q).\end{aligned}$$

с) Припустимо, що існує ціле k таке, що $\deg_h PQ = km$ і $\deg_a PQ = kl$, і не існує цілого k_1 такого, що $\deg_h P = k_1 m$ і $\deg_a P = k_1 l$. Тоді не існує цілого k_2 такого, що $\deg_h Q = k_2 m$ і $\deg_a Q = k_2 l$. Звідси, $\psi(P) = 0$ і $\psi(Q) = 0$. Нехай (u_α) – напрямленість елементів $\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{m,l} X$, яка збігається до w у $*$ -слабкій топології простору $\left(\widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{m,l} X\right)''$, при цьому α належить індексній множині $\mathcal{U}$. Знайдемо значення $\psi(PQ)$.

$$\begin{aligned}\psi(PQ) &= (\widetilde{PQ})_{(m,l)}(w) = A_{(\widetilde{PQ})_{(m,l)}}(\underbrace{w, \dots, w}_k) = \\ &= \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} A_{(PQ)_{(m,l)}}(u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_k}).\end{aligned}$$

Оскільки $u_\alpha \in \widehat{\bigotimes}_{s,\pi}^{m,l} X$, то $u_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_{j,\alpha}^{\otimes(m,l)}$, де $|\lambda_j| = 1$ і $x_{j,\alpha} \in X$. Тепер

$$\begin{aligned}\psi(PQ) &= \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} A_{(PQ)_{(m,l)}} \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} \lambda_{j_1} x_{j_1, \alpha_1}^{\otimes(m,l)}, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, \sum_{j_k=1}^{\infty} \lambda_{j_k} x_{j_k, \alpha_k}^{\otimes(m,l)} \right) = \\ &= \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{\infty} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_k} \times \\ &\quad \times A_{(PQ)_{(m,l)}} \left(x_{j_1, \alpha_1}^{\otimes(m,l)}, \dots, x_{j_k, \alpha_k}^{\otimes(m,l)} \right).\end{aligned}$$

За означенням,

$$\begin{aligned}A_{(PQ)_{(m,l)}} \left(x_{j_1, \alpha_1}^{\otimes(m,l)}, \dots, x_{j_k, \alpha_k}^{\otimes(m,l)} \right) &= \\ &= A_{PQ} \left(\underbrace{x_{j_1, \alpha_1}, \dots, x_{j_1, \alpha_1}}_m, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, \underbrace{x_{j_k, \alpha_k}, \dots, x_{j_k, \alpha_k}}_m; \underbrace{x_{j_1, \alpha_1}, \dots, x_{j_1, \alpha_1}}_l, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, \underbrace{x_{j_k, \alpha_k}, \dots, x_{j_k, \alpha_k}}_l \right).\end{aligned}$$

Зробимо зауваження щодо позначень. Нехай маємо деяку (p, q) -лінійну форму $B : Y^{p+q} \rightarrow \mathbb{C}$. Нехай

$$y = (y_1, \dots, y_p) \in Y^p, \quad z = (z_1, \dots, z_q) \in Y^q.$$

Можемо розглянути y як відображення з множини $\{1, 2, \dots, p\}$ у простір Y , а z – як відображення з множини $\{1, 2, \dots, q\}$ у простір Y . Тоді B можна розглядати як функцію від цих відображень:

$$B(y; z) = B(y_1, \dots, y_p; z_1, \dots, z_q).$$

Нехай $x : \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow X$ діє за законом

$$x : i \mapsto x_{j_i, \alpha_i},$$

нехай $\tau_h : \{1, 2, \dots, km\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ діє за законом

$$\tau_h(i) = n, \text{ де } n - \text{таке, що } (n-1)m < i \leq nm$$

і нехай $\tau_a : \{1, 2, \dots, kl\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ діє за законом

$$\tau_a(i) = n, \text{ де } n - \text{таке, що } (n-1)l < i \leq nl.$$

Тоді $x \circ \tau_h \in X^{km}$, $x \circ \tau_a \in X^{kl}$ і, згідно з введеним вище позначенням, можемо записати

$$\begin{aligned}A_{(PQ)_{(m,l)}} \left(x_{j_1, \alpha_1}^{\otimes(m,l)}, \dots, x_{j_k, \alpha_k}^{\otimes(m,l)} \right) &= \\ &= A_{PQ}(x \circ \tau_h; x \circ \tau_a).\end{aligned}$$

Нехай θ_{hP} – тотожне відображення на множині $\{1, 2, \dots, \deg_h P\}$:

$$\theta_{hP} = \text{id}_{\{1, 2, \dots, \deg_h P\}},$$

θ_{aP} – тотожне відображення на множині $\{1, 2, \dots, \deg_a P\}$:

$$\theta_{aP} = \text{id}_{\{1, 2, \dots, \deg_a P\}},$$

θ_{hQ} – відображення з $\{1, 2, \dots, \deg_h Q\}$ в $\{\deg_h P + 1, \deg_h P + 2, \dots, \deg_h P + \deg_h Q\}$, яке діє за законом

$$\theta_{hQ}(i) = \deg_h P + i,$$

θ_{aQ} – відображення з $\{1, 2, \dots, \deg_a Q\}$ в $\{\deg_a P + 1, \deg_a P + 2, \dots, \deg_a P + \deg_a Q\}$, яке діє за законом

$$\theta_{aQ}(i) = \deg_a P + i.$$

Для $y \in X^{km}$, $z \in X^{kl}$ легко перевірити виконання рівності

$$A_{PQ}(y; z) = \frac{1}{(km)!(kl)!} \times \\ \times \sum_{\sigma_h \in S(km)} \sum_{\sigma_a \in S(kl)} A_P(y \circ \sigma_h \circ \theta_{hP}; z \circ \sigma_a \circ \theta_{aP}) \times \\ \times A_Q(y \circ \sigma_h \circ \theta_{hQ}; z \circ \sigma_a \circ \theta_{aQ}).$$

Дійсно, оскільки в правій і лівій частинах рівності знаходяться (km, kl) -лінійні симетричні форми, звуження на діагональ яких співпадають, то рівність правильна. Запишемо цю рівність при $y = x \circ \tau_h$, $z = x \circ \tau_a$.

$$A_{PQ}(x \circ \tau_h; x \circ \tau_a) = \frac{1}{(km)!(kl)!} \sum_{\sigma_h \in S(km)} \sum_{\sigma_a \in S(kl)} \deg_h P = |(\tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hP})^{-1}\{1, 2, \dots, k\}| = nm$$

$$A_P(x \circ \tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hP}; x \circ \tau_a \circ \sigma_a \circ \theta_{aP}) \times \\ \times A_Q(x \circ \tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hQ}; x \circ \tau_a \circ \sigma_a \circ \theta_{aQ}).$$

Отже,

$$\psi(PQ) = \frac{1}{(km)!(kl)!} \times \\ \times \sum_{\sigma_h \in S(km)} \sum_{\sigma_a \in S(kl)} \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{\infty} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_k} \times \\ \times A_P(x \circ \tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hP}; x \circ \tau_a \circ \sigma_a \circ \theta_{aP}) \times \\ \times A_Q(x \circ \tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hQ}; x \circ \tau_a \circ \sigma_a \circ \theta_{aQ}).$$

Лема. Для фіксованих підстановок σ_h , σ_a існує таке число $s_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$, що виконується принаймні одна з умов:

- 1) $1 \leq |(\tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hP})^{-1}(s_0)| < m$,
- 2) $1 \leq |(\tau_a \circ \sigma_a \circ \theta_{aP})^{-1}(s_0)| < l$,
- 3) i $|(\tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hP})^{-1}(s_0)| = 0$
 $|(\tau_a \circ \sigma_a \circ \theta_{aP})^{-1}(s_0)| \geq 1$,
- 4) i $|(\tau_a \circ \sigma_a \circ \theta_{aP})^{-1}(s_0)| = 0$
 $|(\tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hP})^{-1}(s_0)| \geq 1$.

Доведення. Припустимо, що для кожного $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ не виконується жодна з цих умов. Тоді для кожного $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ буде виконуватись

$$(I) \quad \begin{matrix} |(\tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hP})^{-1}(s)| = m \\ \text{і} \\ |(\tau_a \circ \sigma_a \circ \theta_{aP})^{-1}(s)| = l, \end{matrix}$$

або

$$(II) \quad \begin{matrix} |(\tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hP})^{-1}(s)| = 0 \\ \text{і} \\ |(\tau_a \circ \sigma_a \circ \theta_{aP})^{-1}(s)| = 0. \end{matrix}$$

Нехай кількість тих s , для яких виконується (I), дорівнює n . Тоді

$$\deg_h P = |(\tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hP})^{-1}\{1, 2, \dots, k\}| = nm$$

і

$$\deg_a P = |(\tau_a \circ \sigma_a \circ \theta_{aP})^{-1}\{1, 2, \dots, k\}| = nl.$$

Приходимо до суперечності з тим, що не існує такого числа k_1 , що $\deg_h P = k_1 m$ і $\deg_a P = k_1 l$.

Продовження доведення теореми.

Отже, існує число s_0 , для якого виконується одна з умов 1) – 4). Позначимо

$$d_1 = |(\tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hP})^{-1}(s_0)|,$$

$$d_2 = |(\tau_a \circ \sigma_a \circ \theta_{aP})^{-1}(s_0)|.$$

Зафіксуємо всі аргументи $x_{j_1, \alpha_1}, \dots, x_{j_k, \alpha_k}$, крім $x_{j_{s_0}, \alpha_{s_0}}$. Позначимо

$$P_\sigma(x_{j_{s_0}, \alpha_{s_0}}) = A_P(x \circ \tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hP}; x \circ \tau_a \circ \sigma_a \circ \theta_{aP}),$$

$$Q_\sigma(x_{j_{s_0}, \alpha_{s_0}}) = A_Q(x \circ \tau_h \circ \sigma_h \circ \theta_{hQ}; x \circ \tau_a \circ \sigma_a \circ \theta_{aQ}).$$

Тоді P_σ буде (d_1, d_2) -поліномом від $x_{j_{s_0}, \alpha_{s_0}}$, Q_σ буде $(m - d_1, l - d_2)$ -поліномом від $x_{j_{s_0}, \alpha_{s_0}}$.

Тоді

$$\begin{aligned}\psi(PQ) &= \frac{1}{(km)!(kl)!} \times \\ &\times \sum_{\sigma_h \in S(km)} \sum_{\sigma_a \in S(kl)} \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^{\infty} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_k} \times \\ &\times P_{\sigma}(x_{j_{s_0}, \alpha_{s_0}}) Q_{\sigma}(x_{j_{s_0}, \alpha_{s_0}}) = \\ &= \frac{1}{(km)!(kl)!} \sum_{\sigma_h \in S(km)} \sum_{\sigma_a \in S(kl)} \lim_{\alpha_1, \dots, \alpha_{s_0-1}, \alpha_{s_0+1}, \dots, \alpha_k} \\ &\sum_{j_1, \dots, j_{s_0-1}, j_{s_0+1}, \dots, j_k=1}^{\infty} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_{s_0-1}} \lambda_{j_{s_0+1}} \dots \lambda_{j_k} \times \\ &\times \lim_{\alpha_{s_0}} \sum_{j_{s_0}=1}^{\infty} \lambda_{j_{s_0}} (P_{\sigma} Q_{\sigma})(x_{j_{s_0}, \alpha_{s_0}}).\end{aligned}$$

Оскільки $P_{\sigma} Q_{\sigma} \in (m, l)$ -поліномом, то $(P_{\sigma} Q_{\sigma})_{(m, l)}$ буде лінійним функціоналом і

$$(P_{\sigma} Q_{\sigma})(x_{j_{s_0}, \alpha_{s_0}}) = (P_{\sigma} Q_{\sigma})_{(m, l)} \left(x_{j_{s_0}, \alpha_{s_0}}^{\otimes(m, l)} \right).$$

Тому

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha_{s_0}} \sum_{j_{s_0}=1}^{\infty} \lambda_{j_{s_0}} (P_{\sigma} Q_{\sigma})(x_{j_{s_0}, \alpha_{s_0}}) &= \\ &= \lim_{\alpha_{s_0}} \sum_{j_{s_0}=1}^{\infty} \lambda_{j_{s_0}} (P_{\sigma} Q_{\sigma})_{(m, l)} \left(x_{j_{s_0}, \alpha_{s_0}}^{\otimes(m, l)} \right) = \\ &= \lim_{\alpha_{s_0}} (P_{\sigma} Q_{\sigma})_{(m, l)} \left(\sum_{j_{s_0}=1}^{\infty} \lambda_{j_{s_0}} x_{j_{s_0}, \alpha_{s_0}}^{\otimes(m, l)} \right) = \\ &= \lim_{\alpha_{s_0}} (P_{\sigma} Q_{\sigma})_{(m, l)} (u_{\alpha_{s_0}}) = \widetilde{(P_{\sigma} Q_{\sigma})_{(m, l)}}(w) = \\ &= \psi(P_{\sigma} Q_{\sigma}) = \psi_{m, l}(P_{\sigma} Q_{\sigma}) = \phi_{m, l}(P_{\sigma} Q_{\sigma}).\end{aligned}$$

Оскільки $P_{\sigma} Q_{\sigma} \in \mathcal{P}^{(m, l)} X \cap A_{\Lambda}(X)$, то $\phi_{m, l}(P_{\sigma} Q_{\sigma}) = 0$. Тому $\psi(PQ) = 0$. Мультиплікативність для випадку c) доведено.

Отже, ми визначили мультиплікативну функцію ψ на (p, q) -поліномах. Продовжимо її за лінійністю на алгебру $\mathcal{W}(X)$. Тепер потрібно довести неперервність ψ . Для цього оцінимо норми звужень функціонала ψ на простори (p, q) -поліномів. Якщо не існує такого k , що $p = km$, $q = kl$, то для довільного $P \in \mathcal{P}^{(p, q)} X$ буде $\psi(P) = 0$, тому для

таких p і q буде $\|\psi_{p, q}\| = 0$. Оцінимо норму у випадку $p = km$, $q = kl$ для деякого k .

$$\begin{aligned}\|\psi_{km, kl}\| &= \\ &= \sup \{ |\psi(P)| : P \in \mathcal{P}^{(km, kl)} X, \|P\| \leq 1 \}.\end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}|\psi(P)| &= |\widetilde{P_{(m, l)}}(w)| \leq \|\widetilde{P_{(m, l)}}\| \|w\|^k = \\ &= \|P_{(m, l)}\| \|w\|^k \leq c(km, kl, X) \|P\| \|w\|^k \leq \\ &\leq \frac{(km + kl)^{km+kl}}{(km)!(kl)!} \|P\| \|w\|^k,\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}\|\psi_{km, kl}\| &\leq \sup_{\|P\| \leq 1} \frac{(km + kl)^{km+kl}}{(km)!(kl)!} \|P\| \|w\|^k = \\ &= \frac{(km + kl)^{km+kl}}{(km)!(kl)!} \|w\|^k.\end{aligned}$$

Використаємо оцінку $n! \geq e \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Маємо

$$\begin{aligned}\frac{(km + kl)^{km+kl}}{(km)!(kl)!} &\leq \frac{(km + kl)^{km+kl}}{e \left(\frac{km}{e}\right)^{km} e \left(\frac{kl}{e}\right)^{kl}} = \\ &= \left(\frac{e^{1-2/(km+kl)} (m+l)}{m^{m/(m+l)} l^{l/(m+l)}} \right)^{km+kl} \leq \\ &\leq \left(\frac{e(m+l)}{m^{m/(m+l)} l^{l/(m+l)}} \right)^{km+kl}.\end{aligned}$$

Отже,

$$\|\psi_{km, kl}\| \leq \left(\frac{e(m+l)}{m^{m/(m+l)} l^{l/(m+l)}} \right)^{km+kl} \|w\|^k.$$

Позначимо

$$s = \frac{e(m+l)}{m^{m/(m+l)} l^{l/(m+l)}} \|w\|^{1/(m+l)}.$$

Тоді для довільних $p, q \geq 0$ буде $\|\psi_{p, q}\| \leq s^{p+q}$. Отже, виконуються умови теореми 3, тому ψ – неперервний комплекснозначний гомоморфізм на $\mathcal{W}(X)$. Оцінимо радіус-функцію ψ .

$$\begin{aligned}R(\psi) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\psi_{km, kl}\|^{1/(km+kl)} \leq \\ &\leq \frac{e(m+l)}{m^{m/(m+l)} l^{l/(m+l)}} \|w\|^{1/(m+l)} = \\ &= \frac{e(m+l)}{m^{m/(m+l)} l^{l/(m+l)}} \|\phi_{m, l}\|^{1/(m+l)}.\end{aligned}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *R. Alencar, R. Aron, P. Galindo and A. Zagorodnyuk.* Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. London Math. Soc. **35** (2003), 55-64.
2. *R. M. Aron, B. J. Cole and T. W. Gamelin.* Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // J. Reine Angew. Math. **415** (1991), 51-93.
3. *R. M. Aron, B. J. Cole and T. W. Gamelin.* Weak-star continuous analytic functions // Can. J. Math. **47** (1995), 673-683.
4. *A. M. Davie and T. W. Gamelin.* A theorem on polynomial-star approximation // Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 351-356.
5. *Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V.* Polarization formula for (p, q) -polynomials on a complex normed space // Methods of Functional Analysis and Topology. **17** (2011), no. 1, 75-83.
6. *A. Zagorodnyuk.* Spectra of algebras of analytic functions and polynomials on Banach spaces // Contemporary Math. **435** (2007), 381-394.
7. *A. Zagorodnyuk.* Spectra of algebras of entire functions on Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 2559-2569.