УДК 510.22 + 51-71 + 517.982

©2017 р. **Я.І. Грушка**

Інститут математики НАН України, м. Київ
(Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv)

ОДНОСТАЙНО-ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ СИСТЕМ ВІДЛІКУ В УНІВЕРСАЛЬНИХ КІНЕМАТИКАХ

Універсальні кінематики як математичні об'єкти є цікавими для астрофізики, оскільки існує припущення, що у великих масштабах Всесвіту закони фізики (зокрема, закони кінематики) можуть бути відмінними від тих, які діють в околі нашої сонячної системи. В даній роботі досліджуються різні типи одностайно-поступального руху систем відліку в абстрактних універсальних кінематиках. У випадку одностайно-поступального руху можна дати чітке і однозначне означення переміщення, а отже і середньої та миттєвої швидкості системи відліку. Тому частинним випадком одностайно-поступального руху є рівномірний прямолінійний рух. Отже, дослідження одностайно-поступального руху систем відліку є технічно необхідним для виділення класів інерційно споріднених систем відліку (тобто тих, які знаходяться в стані рівномірного прямолінійного взаємного руху) в універсальних кінематиках

Universal kinematics as mathematical objects may be interesting for astrophysics, because there exists the hypothesis, that in the large scale of the Universe, physical laws (in particular, the laws of kinematics) may be different from the laws, acting in the neighborhood of our solar System. In the present paper we investigate different types of unanimously-translational motion of reference frames in abstract universal kinematics. In the case of unanimously-translational motion we can give the clear and unambiguous definition of displacement as well average and instantaneous speed of the reference frame. Hence the uniform rectilinear motion is the particular case of unanimously-translational motion. So, the investigation of unanimously-translational motion is technically necessary for the selection of classes of inertially-related reference frames (being in a state of uniform rectilinear mutual motion) in universal kinematics.

Вступ

Поняття інерційної системи відліку відіграє ключову роль в класичній механіці та спеціальній теорії відносності, оскільки в інерційних системах відліку основні фундаментальні закони фізики мають найпростіше формулювання. При цьому вважається, що інерційні системи відліку належать до одного класу еквівалентності систем відліку, що рухаються рівномірно прямолінійно (тобто зі сталою швидкістю) одна відносно іншої.

В роботах [1–5], використовуючи теорію мінливих множин, було побудовано новий клас математичних об'єктів — універсальні кінематики, які призначені для математичного моделювання еволюції фізичних систем в рамках різних законів кінематики, а також показано, що теорія універсальних кінематик може бути застосована для математично строгого обґрунтування кінематики спеціальної теорії відносності та її тахіонних розширень. Універсальні кінематики являють собою математичні об'єкти, в яких мінливі множини оснащені різноманітними геометричними та топологічними структурами, а саме, метричними, топологічними, лінійними, банаховими та іншими просторами, і в яких діє задане (універсальне) перетворенням координат. Дослідження універсальних кінематик може виявитись цікавим для астрофізики, оскільки існує припущення, що у великих масштабах Всесвіту закони фізики (зокрема, закони кінематики) можуть бути відмінними від тих, які діють в околі нашої сонячної системи (тобто відмінними від тих, які базуються на перетвореннях координат Лоренца-Пуанкаре або Галілея для інерційних систем відліку). Саме тому, у зв'язку із сказаним в першому абзаці, природним чином постає задача дослідити рівномірний прямолінійний рух систем відліку на рівні абстрактних універсальних кінематик. Але, оскільки, як було сказано вище, рівномірний прямолінійний рух систем відліку є рухом зі сталою швидкістю, то спершу доцільно дослідити на абстрактному рівні більш загальний випадок, коли системи відліку рухаються таким чином, що можна однозначно ввести поняття переміщення, а отже середньої або миттєвої швидкості руху однієї системи відліку відносно іншої. Саме такий вид руху систем відліку надалі буде називатись одностайно-поступальним.

В даній роботі буде дано кілька варіантів математично строгих означень одностайно-поступальних систем відліку (тобто систем відліку, що знаходяться в стані одностайно-поступального руху відносно заданої системи відліку), а також будуть встановлені основні співвідношення між різними варіантами одностайної поступальності систем відліку в універсальних кінематиках.

1. Векторні універсальні кінематики та їх властивості

В даній роботі ми будемо використовувати математичний апарат, систему понять і позначень теорії універсальних кінематик, розвинутої в роботах [1–5]. Теорія універсальних кінематик в свою чергу базується на теоріях мінливих та кінематичних мінливих множин, розвинених в [2, 6–14]. Для зручності читачів результати всіх зазначених робіт [1–14] зібрані і викладені з єдиної точки зору в препринті [5]. Для подальшого розуміння змісту цієї статті необхідно володіти основними положеннями теорій мінливих і кінематичних мінливих множин та універсальних кінематик. Саме тому читачам, котрі не знайомі з цими теоріями, радимо звернутися до препринта [5] або відповідних журнальних статей, результати яких зібрані в [5].

Означення 1. **(а)** *Кінематична множина* $\mathfrak{C}$ *називається* ***векторною****, якщо:*

$$\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)\ \mathbb{L}s(\mathfrak{l}) \neq \emptyset.$$

(б) *Універсальна кінематика* $\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right)$ *називається* ***векторною****, якщо* $\mathfrak{C}$ *є векторною кінематичною множиною.*

Використовуючи систему позначень, прийняту в [1, 3–5], отримуємо наступний наслідок означення 1.

Наслідок 1. *Універсальна кінематика* $\mathcal{F}$ *є векторною тоді і тільки тоді, коли:*

$$\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)\ \mathbb{L}s(\mathfrak{l}) \neq \emptyset.$$

Наслідок 1 можна розглядати як альтернативний варіант означення векторної універсальної кінематики.

Нехай, $\mathfrak{C}$ — довільна векторна кінематична множина або універсальна кінематика. Тоді, згідно з означенням 1 та наслідком 1, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ виконується співвідношення $\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\mathfrak{C}) \neq \emptyset$. Звідси, враховуючи систему позначень, прийняту в [1, 3–5], випливає, що:

$$\forall \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right) \quad \mathfrak{Ps}\left(\mathfrak{l};\mathfrak{C}\right) \neq \emptyset,$$

причому, для будь-якої системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ і для довільних елементів $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l},\mathfrak{C}\right)$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathfrak{Ps}\left(\mathfrak{l};\mathfrak{C}\right)$ визначений елемент:

$$\left(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Керуючись скороченими варіантами позначень, введеними в [1, 3–5], надалі у випадку, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину або універсальну кінематику $\mathfrak{C}$ йде мова, замість позначень $\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$, $\mathfrak{Ps}\left(\mathfrak{l};\mathfrak{C}\right)$, $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l},\mathfrak{C}\right)$, $\left(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$ будемо використовувати позначення $\mathbb{L}s(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{Ps}\left(\mathfrak{l}\right)$, $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{l}\right)$, $\left(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n\right)_{\mathfrak{l}}$ відповідно. Крім того, коли зі змісту тексту можна визначити, про яку систему відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ йде мова, замість позначення $\left(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n\right)_{\mathfrak{l}}$ будемо використовувати позначення $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$.

2. Перетворення координат в універсальних кінематиках та оператори перетворення координат

Означення 2. *Нехай, $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ — координатні простори*[1], *а* $\mathbb{T}_1 = (\mathbf{T}_1, \leq_1)$ *і* $\mathbb{T}_2 = (\mathbf{T}_1, \leq_2)$ *($\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \neq \emptyset$) — довільні лінійно упорядковані множини. Довільну бієкцію $\mathscr{U}$ між $\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$ і $\mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$ ($\mathscr{U} : \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1) \longleftrightarrow \mathbf{T}_2 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2)$) будемо називати оператором перетворення координат з $(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1)$ в $(\mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$. Множину всіх операторів перетворення координат з $(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1)$ в $(\mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ будемо позначати через:*

$$\mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2).$$

Безпосередньо з означення 2, а також з означення універсальної кінематики та системи позначень для універсальних кінематик (див. [1, 5]) випливає наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ — довільні системи відліку $\mathcal{F}$. Тоді:*

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}] \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}), \mathsf{BG}(\mathfrak{l}); \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}), \mathsf{BG}(\mathfrak{m})).$$

Отже, довільне перетворення координат між системами відліку в довільній універсальній кінематиці є оператором перетворення координат.

Навпаки, нехай $\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$, де $\mathbb{T}_i = (\mathbf{T}_i, \leq_i)$ $(i \in \overline{1,2})$. Розглянемо довільну базову мінливу множину $\mathcal{B}$ таку, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}_1$. Покладемо:

$$\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)} := \left(\mathcal{B}, \left(\mathfrak{Q}_1, \mathbb{I}_{\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})}\right)\right),$$

де $\mathbb{I}_{\mathcal{M}}$ — тотожне відображення на множині $\mathcal{M}$. Згідно з [2, означення 4, пункт 1], [5, Definition 2.14.3, item 1], $\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}$ є базовою кінематичною множиною. Використовуючи систему позначень теорії базових кінематичних множин (див. [2, 5]) та означення множини Мінковського над базовою кінематичною множиною (див. [2, стор. 66, розділ 6], [5, формула (2.2)]), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}\right) &= \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = \mathbb{T}_1; \\
\mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}\right) &= \mathbf{T}_1; \\
\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}\right) &= \mathcal{B}; \\
\mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}\right) &= \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1); \\
\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}\right) &= \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1); \\
\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}\right) &= \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1); \\
\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}\right) &= \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}\right) = \\
&= \mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1); \\
\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}} &= \mathbb{I}_{\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Звідси для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}\right)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)} \right\rangle}(\omega) &= \left(\mathsf{tm}(\omega), \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}}(\mathsf{bs}(\omega))\right) = \\
&= (\mathsf{tm}(\omega), \mathsf{bs}(\omega)) = \omega.
\end{aligned}$$

Отже:

$$\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)} \right\rangle} = \mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}.$$

Використовуючи отримані вище рівності та [1, означення 13] (!) [2] або [5, Definition 3.23.1], одержуємо, що індексована сім'я:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_0 &= \Big(\left(\mathbb{T}_1, \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1), \mathbb{I}_{\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)}, \mathfrak{Q}_1, \mathbb{I}_{\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)}\right), \\
&\qquad \left(\mathbb{T}_2, \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_2), \mathscr{U}, \mathfrak{Q}_2, \mathscr{U}\right) \Big) = \\
&= \Big(\left(\mathbb{T}_\alpha, \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_\alpha), U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, U_\alpha\right) \mid \alpha \in \overline{1,2} \Big),
\end{aligned}$$

$$\text{де} \quad U_\alpha = \begin{cases} \mathbb{I}_{\mathbf{T}_1 \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)}, & \alpha = 1 \\ \mathscr{U}, & \alpha = 2 \end{cases}$$

є універсальним кінематичним мультипроектором для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}$.

Отже, беручи до уваги [1, теорема 4 та означення 14] або [5, Theorem 3.23.1 and Definition 3.23.2], можна покласти:

$$\mathcal{F}_0 := \mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}_0, \mathfrak{C}^{(\mathcal{B}, \mathfrak{Q}_1)}\right].$$

[1] Означення координатного простору можна знайти в [2, означення 3], [5, Definition 2.14.2].

[2] В пункті 1.1) [1, означення 13] було допущено описку. Цей пункт слід читати наступним чином:

1.1) $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ є біективним еволюційним проектором для $\mathsf{BE}(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}})$.

Підкреслене слово в [1, означення 13] було пропущене. Зазначимо, що в пізніших роботах (зокрема в [5]) замість терміну "біективний еволюційний проектор" використовується термін "ін'єктивний еволюційний проектор".

Використовуючи [5, Properties 3.23.1(1,7,3)][3], рівність (1), [5, Remark 1.11.3.][4] та [5, Theorem 3.23.1, item 2][5] для систем відліку:

$$\begin{aligned}\mathfrak{l} &= (1, U_1[\mathcal{B}, \mathbb{T}_1]) = \left(1, \mathbb{I}_{\mathbf{T}_1\times\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_1)}[\mathcal{B}]\right) = \\ &= (1, \mathcal{B}) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}_0); \\ \mathfrak{m} &= (2, U_2[\mathcal{B}, \mathbb{T}_2]) = (2, \mathscr{U}[\mathcal{B}, \mathbb{T}_2]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}_0)\end{aligned}$$

отримуємо:

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}] = \mathscr{U}; \\ &\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}_1; \quad \mathsf{BG}(\mathfrak{l}, \mathcal{F}_0) = \mathfrak{Q}_1; \\ &\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}) = \mathbb{T}_2; \quad \mathsf{BG}(\mathfrak{m}, \mathcal{F}_0) = \mathfrak{Q}_2.\end{aligned}$$

При цьому, згідно з [1, властивість 8(1)] або [5, Property 3.23.1(1)], $\mathcal{L}k(\mathcal{F}_0) = \{\mathfrak{l}, \mathfrak{m}\}$. Отже, якщо $\mathfrak{Q}_1$ і $\mathfrak{Q}_2$ — ***векторні*** координатні простори (тобто $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}_1) \neq \emptyset$ і $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}_2) \neq \emptyset$), то, згідно з наслідком 1, $\mathcal{F}_0$ є векторною універсальною кінематикою. Таким чином, ми довели справедливість наступного твердження:

Твердження 2. *Для довільного оператора перетворення координат* $\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}(\mathbb{T}_1, \mathfrak{Q}_1; \mathbb{T}_2, \mathfrak{Q}_2)$ *існують універсальна кінематика* $\mathcal{F}$ *і системи відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ *такі, що:*

$$\begin{aligned}&\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}_1; \quad \mathsf{BG}(\mathfrak{l}, \mathcal{F}) = \mathfrak{Q}_1; \\ &\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}) = \mathbb{T}_2; \quad \mathsf{BG}(\mathfrak{m}, \mathcal{F}) = \mathfrak{Q}_2; \\ &[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}] = \mathscr{U}.\end{aligned}$$

При цьому якщо $\mathfrak{Q}_1$ *і* $\mathfrak{Q}_2$ *є векторними координатними просторами, то універсальна кінематика* $\mathcal{F}$ *також є векторною.*

З тверджень 1 і 2 випливає, що вивчення властивостей перетворень координат між системами відліку в універсальних кінематиках можна звести до вивчення властивостей операторів перетворення координат.

3. Траєкторії для систем відліку в універсальних кінематиках

3.1. Траєкторії, породжені рухом системи відліку

Означення 3. *Нехай,* $\mathcal{F}$ *— довільна універсальна кінематика і* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ *— довільні системи відліку* $\mathcal{F}$*. Траєкторією точки* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ *(при русі системи відліку* $\mathfrak{m}$ *відносно системи відліку* $\mathfrak{l}$*) в кінематиці* $\mathcal{F}$ *будемо називати множину:*

$$\begin{aligned}&\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}, \mathcal{F}]}(\mathrm{x}) = \\ &\quad = \{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})\} \subseteq \\ &\quad\quad \subseteq \mathbb{M}k(\mathfrak{l}).\end{aligned}$$ [6]

Фізичний зміст траєкторії $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}, \mathcal{F}]}(\mathrm{x})$. Якщо в точці з координатою x у системі відліку $\mathfrak{m}$ знаходиться нерухома відносно $\mathfrak{m}$ матеріальна точка, то $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}, \mathcal{F}]}(\mathrm{x})$ буде відображати траєкторію руху цієї матеріальної точки відносно системи відліку $\mathfrak{l}$.

Зауваження 1. У випадку, коли наперед відомо, про яку універсальну кінематику $\mathcal{F}$ йде мова, замість позначення $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}, \mathcal{F}]}(\mathrm{x})$ будемо використовувати скорочене позначення:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}).$$

3.2. Властивості траєкторій

У твердженнях 3 і 4 $\mathcal{F}$ є довільною універсальною кінематикою і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ — довільні системи відліку $\mathcal{F}$.

Твердження 3. *Для довільних* $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ *з умов* $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$ *випливає співвідношення:*

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) \cap \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{y}) = \emptyset.$$

Доведення.

Нехай, $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ і $\mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) \cap \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{y})$. Тоді, за означенням 3, існують моменти часу $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ такі, що:

$$\mathrm{w} = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_1, \mathrm{x}) = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_2, \mathrm{y}).$$

Звідси, використовуючи [1, рівності (6), (7)]

[3] Див., також [1, властивості 8(1,7,3)], де посилання на властивості 8(1,7,3) означає посилання на властивості 1,7 та 3 з групи властивостей "властивості 8". *Уточнення*: У властивостях 8 з роботи [1] під символом $\mathcal{B}$ слід розуміти базову мінливу множину $\mathsf{BE}(\mathfrak{C}^b)$.

[4] Див., також [1, зауваження 9].

[5] Див., також [1, теорема 4, пункт 2].

[6] Нагадаємо, що, згідно з [1, формула (2)], [5, формула (2.3)], враховуючи систему позначень теорії універсальних кінематик (див. [1, підрозділ 5.2.1], [5, Subsection 22.2.2]), для (довільної) системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ має місце рівність:

$$\mathbb{M}k(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}). \qquad (2)$$

або [5, рівності (3.3), (3.4)], отримуємо:

$$\begin{gathered}[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t_1, \mathrm{x}) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t_2, \mathrm{y})\,;\\ [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t_1, \mathrm{x}) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t_2, \mathrm{y})\,;\\ (t_1, \mathrm{x}) = (t_2, \mathrm{y})\,.\end{gathered}$$

Отже, $(t_1, \mathrm{x}) = (t_2, \mathrm{y})$, тобто $\mathrm{x} = \mathrm{y}$.

Твердження 4. *Для довільного елемента* $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ *існує, причому єдиний елемент* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m})$ *такий, що:*

$$\mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x})\,.$$

Доведення.

Розглянемо довільний елемент $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$. Покладемо:

$$\begin{gathered}\mathrm{x} := \mathsf{bs}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w})\,;\\ t_0 := \mathsf{tm}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w})\,.\end{gathered}$$

Тоді, використовуючи [1, співвідношення (6), (7)] або [5, рівності (3.3), (3.4)], отримуємо:

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t_0, \mathrm{x}) =\\ &\qquad = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(\mathsf{tm}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w})\,, \mathsf{bs}\,([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w})) =\\ &\qquad = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w} = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}]\,\mathrm{w} = \mathrm{w}.\end{aligned}$$

Отже, за означенням 3, маємо:

$$\mathrm{w} \in \{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\,(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{Tm}\,(\mathfrak{m})\} = \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x})\,.$$

Доведемо, що елемент $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$, що задовольняє умову $\mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x})$ — єдиний. Припустимо, що $\mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_1)$, де $\mathrm{x}_1 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$. Тоді, $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}) \cap \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_1) \neq \emptyset$. Отже, за твердженням 3, $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1$.

4. Означення одностайно-поступальних систем відліку в універсальних кінематиках

В якості фізичної мотивації для того означення одностайно-поступальних систем відліку, яке буде сформульовано в цьому розділі, може служити наступне означення поступального руху тіл, взяте з [15, стор. 11]:

Означення A. *Поступальним рухом тіла називається такий його рух, при якому всі точки тіла рухаються по однакових (тобто паралельних) траєкторіях, проходячи за однакові проміжки часу однакові ділянки своїх траєкторій.*

Виходячи з означення A можна дати наступне (нестроге, фізичне) означення для одностайно-поступального руху систем відліку.

Означення A′. *Будемо говорити, що система відліку* $\mathfrak{m}$ *рухається одностайно-поступально відносно системи відліку* $\mathfrak{l}$, *якщо всі точки, нерухомі відносно системи відліку* $\mathfrak{m}$ *рухаються відносно системи відліку* $\mathfrak{l}$ *по однакових (тобто паралельних) траєкторіях, проходячи за однакові проміжки часу однакові ділянки своїх траєкторій.*

Наступні зусилля спрямовані на те, щоб дати математично строгий аналог означення A′ для систем відліку в абстрактних універсальних кінематиках. Спершу буде сформульовано необхідні технічні означення і доведено необхідні технічні твердження, для того, щоб це зробити.

Означення 4. *Нехай,* $\mathcal{F}$ *— довільна векторна універсальна кінематика і* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *довільна система відліку* $\mathcal{F}$.

1. ***Паралельним зсувом*** *множини* $A \subseteq \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ *на вектор* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l})$ *(в системі відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$*) будемо називати множину:*

   $$A^{\langle +\mathrm{x};\,\mathfrak{l}\rangle} := \{(\mathsf{tm}\,(\mathrm{w})\,, \mathrm{x} + \mathsf{bs}\,(\mathrm{w})) \mid \mathrm{w} \in A\}\,.$$

   У випадках, коли не виникає непорозумінь, замість позначення $A^{\langle +\mathrm{x};\,\mathfrak{l}\rangle}$ *будемо використовувати позначення:*

   $$A^{\langle +\mathrm{x}\rangle}.$$

2. *Будемо говорити, що множина* $A \subseteq \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ ***паралельна*** *множині* $B \subseteq \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ ***відносно*** *системи відліку* $\mathfrak{l}$ *(позначення:* $A \parallel_{\mathfrak{l}}^{\mathcal{F}} B$*), якщо існує елемент* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l})$ *такий, що* $B = A^{\langle +\mathrm{x}\rangle}$, *тобто такий, що:*

   $$B = \{(\mathsf{tm}\,(\mathrm{w})\,, \mathrm{x} + \mathsf{bs}\,(\mathrm{w})) \mid \mathrm{w} \in A\}\,.$$

У випадку, коли відомо, про яку універсальну кінематику $\mathcal{F}$ йде мова, замість позначення $A \parallel_{\mathfrak{l}}^{\mathcal{F}} B$ будемо використовувати позначення:

$$A \parallel_{\mathfrak{l}} B$$

Твердження 5. *Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна векторна універсальна кінематика і $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ довільна система відліку $\mathcal{F}$. Тоді:*

1. *$A^{\langle +\mathbf{0}\rangle} = A$ (для довільної множини $A \subseteq \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$), де $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{\mathfrak{l}} = \mathbf{0}_{\mathfrak{l},\mathcal{F}}$ — нульовий вектор лінійного простору, породженого лінійною структурою $\mathbb{L}s(\mathfrak{l})$;*
2. *$\left(A^{\langle +\mathrm{x}\rangle}\right)^{\langle +\mathrm{y}\rangle} = A^{\langle +(\mathrm{x}+\mathrm{y})\rangle}$ (для довільних $A \subseteq \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ та $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$), зокрема $\left(A^{\langle +\mathrm{x}\rangle}\right)^{\langle +(-\mathrm{x})\rangle} = A^{\langle +\mathbf{0}\rangle} = A$;*
3. *Бінарне відношення $\parallel_{\mathfrak{l}}$ є відношенням еквівалентності (тобто рефлексивним, симетричним і транзитивним відношенням) на множині $2^{\mathbb{M}k(\mathfrak{l})} = \{A \mid A \subseteq \mathbb{M}k(\mathfrak{l})\}$.*

Доведення.
Пункти 1 і 2 отримуються з означення 4 за допомогою тривіальної перевірки. Пункт 3 випливає з пунктів 1 і 2.

Відповідно до означення 4 (пункт 2), ми вже можемо говорити про паралельні траєкторії в системах відліку довільних універсальних кінематик. Проте виявляється, що у випадку абстрактної векторної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ необхідно бути впевненим, що для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ траєкторія $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ є коректною траєкторією руху якоїсь точки в системі відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, оскільки далі буде наведено приклад, котрий показує, що в загальному випадку це не так. Саме тому в пункті 1 наступного означення водиться поняття траєкторної регулярності однієї системи відліку відносно іншої.

Означення 5. *Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна універсальна кінематика.*

1. *Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **траєкторно-регулярною** відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (у кінематиці $\mathcal{F}$), якщо виконується наступна умова:*

   (a) *для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ траєкторія $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ (тобто $\forall \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ з умови $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$ випливає рівність $\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)$, а отже і рівність $\mathrm{w}_1 = \mathrm{w}_2$).*

   У наступних двох пунктах, $\mathcal{F}$ — довільна <u>векторна</u> універсальна кінематика.

2. *Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **одностайно-квазіпоступальною** (скорочено — **квазіодностайною**) відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (у кінематиці $\mathcal{F}$), якщо:*

   (б) *для довільних $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ виконується співвідношення $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) \parallel_{\mathfrak{l}} \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{y})$.*

3. *Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є **одностайно-поступальною** (скорочено — **одностайною**) відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (у кінематиці $\mathcal{F}$), якщо $\mathfrak{m}$ є квазіодностайною і траєкторно регулярною відносно $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$, тобто, якщо виконуються умови* (a) *і* (б) *даного означення.*

Підкреслимо, що надалі всюди в цій статті замість термінів "одностайно-квазіпоступальна" та "одностайно-поступальна" (система відліку) ми будемо користуватись їхніми скороченими варіантами "***квазіодностайна***" та "***одностайна***" відповідно.

Позначення 1. *Нехай, $d \in \mathbb{N}$. Надалі через $\widehat{\mathbb{R}^d}$ будемо позначати (векторний) координатний простір, породжений $\mathbb{R}^d$, тобто координатний простір, у якому:*

1) $\mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathbb{R}^d}\right) = \mathbb{R}^d$;

2) $\mathfrak{Ps}\left(\widehat{\mathbb{R}^d}\right) = \mathbb{R}$;

3) $(\mathrm{x}+\mathrm{y})_{\widehat{\mathbb{R}^d}} = (\mathrm{x}_1+\mathrm{y}_1,\cdots,\mathrm{x}_d+\mathrm{y}_d)$, *де* $\mathrm{x}=(\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_d)\in\mathbb{R}^d$, $\mathrm{y}=(\mathrm{y}_1,\cdots,\mathrm{y}_d)\in\mathbb{R}^d$*;*

4) $(\lambda\mathrm{x})_{\widehat{\mathbb{R}^d}} = (\lambda\mathrm{x}_1,\cdots,\lambda\mathrm{x}_d)$, $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_d)\in\mathbb{R}^d$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

5) $\langle x,y\rangle_{\widehat{\mathbb{R}^d}} = \mathrm{x}_1\mathrm{y}_1+\cdots+\mathrm{x}_d\mathrm{y}_d$, $\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1,\cdots,\mathrm{x}_d) \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1,\cdots,\mathrm{y}_d) \in \mathbb{R}^d$, *зокрема* $\|\mathrm{x}\|_{\widehat{\mathbb{R}^d}} = \sqrt{\langle\mathrm{x},\mathrm{x}\rangle_{\widehat{\mathbb{R}^d}}} = \sqrt{\mathrm{x}_1^2+\cdots+\mathrm{x}_d^2}$ *(тут* $\langle x,y\rangle_{\widehat{\mathbb{R}^d}}$ *та* $\|\mathrm{x}\|_{\widehat{\mathbb{R}^d}}$ *— скалярний добуток та норма в координатному просторі* $\widehat{\mathbb{R}^d}$ *відповідно).*

Зокрема, при $d=1$ *будемо позначати:*

$$\widehat{\mathbb{R}} := \widehat{\mathbb{R}^1}.$$

Умови квазіодностайності і траєкторної регулярності в пункті 3 означення 5 є логічно незалежними. Для того, щоб переконатись у цьому, нижче розглянемо наступні два приклади.

Приклад 1. Нехай, функція $\boldsymbol{f}:[0,\infty)\mapsto\mathbb{R}$ є бієкцією з $[0,\infty)$ на $\mathbb{R}$, а функція $\boldsymbol{g}:(0,\infty)\mapsto\mathbb{R}$ — бієкція з $(0,\infty)$ на $\mathbb{R}$. Зокрема, за $\boldsymbol{f}$ і $\boldsymbol{g}$ можна взяти наступні функції:

$$\boldsymbol{f}(x)=\begin{cases}\ln(x), & x\notin\left\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\};\\ \ln\left(\frac{1}{n+1}\right), & x=\frac{1}{n}\quad(n\in\mathbb{N});\\ 0, & x=0;\end{cases}$$
$$\boldsymbol{g}(x)=\ln(x).$$

Визначимо відображення $\mathscr{U}:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}^2$ формулою:

$$\mathscr{U}(t,\mathrm{x}) := \begin{cases}\left(\boldsymbol{f}^{[-1]}(t),\boldsymbol{f}(\mathrm{x})\right), & \mathrm{x}\geq 0;\\ \left(-\boldsymbol{g}^{[-1]}(t),\boldsymbol{g}(-\mathrm{x})\right), & \mathrm{x}<0,\end{cases}\qquad (t,\mathrm{x})\in\mathbb{R}^2,$$

де $\boldsymbol{f}^{[-1]}$ і $\boldsymbol{g}^{[-1]}$ — функції, обернені до функцій $\boldsymbol{f}$ і $\boldsymbol{g}$ відповідно. Легко переконатись, що визначене таким чином відображення $\mathscr{U}$ є бієкцією з $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, а отже, оператором перетворення координат з $\left(\mathbb{R}_{ord},\widehat{\mathbb{R}}\right)$ в $\left(\mathbb{R}_{ord},\widehat{\mathbb{R}}\right)$, де $\mathbb{R}_{ord}=(\mathbb{R},\leq)$ і $\leq$ — стандартне відношення порядку поля дійсних чисел, тобто:

$$\mathscr{U}\in\mathbf{Pk}\left(\mathbb{R}_{ord},\widehat{\mathbb{R}};\mathbb{R}_{ord},\widehat{\mathbb{R}}\right).$$

Тому, згідно з твердженням 2, існують векторна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ і системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ такі, що:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})=\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m})=\mathbb{R}_{ord};\tag{3}$$
$$\mathsf{BG}(\mathfrak{l},\mathcal{F})=\mathsf{BG}(\mathfrak{m},\mathcal{F})=\widehat{\mathbb{R}};\tag{4}$$
$$[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m},\mathcal{F}]=\mathscr{U}.\tag{5}$$

З формули (4), враховуючи систему позначень теорії універсальних кінематик (див. [1, 5]) випливає, що $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l},\mathcal{F})=\mathbf{Zk}(\mathfrak{m},\mathcal{F})=\mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathbb{R}}\right)=\mathbb{R}$. Таким чином, враховуючи (3), маємо:

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})=\mathbf{Zk}(\mathfrak{m})=\mathbb{R};\tag{6}$$
$$\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})=\mathbf{Tm}(\mathfrak{m})=\mathbb{R}.\tag{7}$$

Доведемо, що система відліку $\mathfrak{m}$ є траєкторно регулярною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$. Справді, згідно з (6), $\mathbf{Zk}(\mathfrak{m})=\mathbb{R}$. Тому, використовуючи (7) і (5), для довільного $\mathrm{x}\in\mathbb{R}=\mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$, за означенням 3, отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) &= \{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}](t,\mathrm{x})\mid t\in\mathbf{Tm}(\mathfrak{m})\}=\\ &=\{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}](t,\mathrm{x})\mid t\in\mathbb{R}\}=\{\mathscr{U}(t,\mathrm{x})\mid t\in\mathbb{R}\}=\\ &=\begin{cases}\left\{\left(\boldsymbol{f}^{[-1]}(t),\boldsymbol{f}(\mathrm{x})\right)\mid t\in\mathbb{R}\right\}, & \mathrm{x}\geq 0\\ \left\{\left(-\boldsymbol{g}^{[-1]}(t),\boldsymbol{g}(-\mathrm{x})\right)\mid t\in\mathbb{R}\right\}, & \mathrm{x}<0\end{cases}=\\ &=\begin{cases}\{(\tau,\boldsymbol{f}(\mathrm{x}))\mid\tau\in[0,\infty)\}, & \mathrm{x}\geq 0\\ \{(\tau,\boldsymbol{g}(-\mathrm{x}))\mid\tau\in(-\infty,0)\}, & \mathrm{x}<0.\end{cases}\end{aligned}\tag{8}$$

З останньої рівності видно, що $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Тобто, згідно (6), (7), $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ є абстрактною траєкторією з $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ (для довільного $\mathrm{x}\in\mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$). Тому, за означенням 5 (пункт 1), система відліку $\mathfrak{m}$ є траєкторно регулярною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$.

З іншої сторони, для довільних $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathbf{Zk}(\mathfrak{m})=\mathbb{R}$ таких, що $\mathrm{x}\geq 0$, $y<0$, згідно (8), будемо мати:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x})=\{(\tau,\boldsymbol{f}(\mathrm{x}))\mid\tau\in[0,\infty)\};$$
$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{y})=\{(\tau,\boldsymbol{g}(-\mathrm{y}))\mid\tau\in(-\infty,0)\}.$$

Отже, траєкторії $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ і $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{y})$ не можуть бути паралельними, оскільки $\mathfrak{D}\left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right)=[0,\infty)\neq(-\infty,0)=\mathfrak{D}\left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{y})\right)$, а, згідно з означенням 4, області визначення паралельних траєкторій мусять бути однаковими. Отже, за означенням 5 (пункт 2), система відліку $\mathfrak{m}$ не є квазіодностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$ (будучи при цьому траєкторно регулярною відносно $\mathfrak{l}$).

Приклад 2. Нехай, $\Phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ — довільна бієкція (взаємно однозначна відповідність) між $\mathbb{R}$ і $\mathbb{R}^2$. Таке відображення Φ можна подати у вигляді:

$$\Phi(t) = (\phi_0(t), \phi_1(t)), \qquad t \in \mathbb{R},$$

де $\phi_0, \phi_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ — деякі відображення з $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Визначимо відображення $\mathscr{U} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ за формулою:

$$\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) := (\phi_0(t), (\phi_1(t), \mathrm{x})), \ (\forall t, \mathrm{x} \in \mathbb{R}).$$

Неважко перевірити, що відображення $\mathscr{U}$ є бієкцією між $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ і $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, тобто оператором перетворення координат з $\left(\mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}\right)$ в $\left(\mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}^2}\right)$. Іншими словами:

$$\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}\left(\mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}; \mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}^2}\right).$$

Тому, згідно з твердженням 2, існують векторна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ і системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ такі, що:

$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}_{ord}; \tag{9}$$

$$\mathsf{BG}(\mathfrak{l}, \mathcal{F}) = \widehat{\mathbb{R}^2}; \quad \mathsf{BG}(\mathfrak{m}, \mathcal{F}) = \widehat{\mathbb{R}}; \tag{10}$$

$$[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}, \mathcal{F}] = \mathscr{U}. \tag{11}$$

Враховуючи (9), (10) і систему позначень теорії універсальних кінематик (див. [1,5]), маємо:

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathbb{R}^2}\right) = \mathbb{R}^2; \tag{12}$$

$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{m}) = \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathbb{R}}\right) = \mathbb{R}; \tag{13}$$

$$\mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}. \tag{14}$$

Доведемо, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є квазіодностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ в кінематиці $\mathcal{F}$. Справді, для довільного $\mathrm{x} \in \mathbb{R} = \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$, за означенням 3 і формулами (11) і (14), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) &= \{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t, x) \mid t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})\} = \\ &= \{\mathscr{U}(t, x) \mid t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})\} = \\ &= \{(\phi_0(t), (\phi_1(t), \mathrm{x})) \mid t \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Оскільки $\Phi = (\phi_0(t), \phi_1(t))$ — бієкція між $\mathbb{R}$ і $\mathbb{R}^2$, то, з останньої рівності для довільного $\mathrm{x} \in \mathbb{R} = \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ отримуємо:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) = \{(\tau, (\mathrm{y}, \mathrm{x})) \mid \tau, \mathrm{y} \in \mathbb{R}\}. \tag{15}$$

Для довільного $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ покладемо: $\widehat{\mathrm{x}} := (0, \mathrm{x}) \in \mathbb{R}^2$. Тоді з формули (15) для довільних $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbb{R} = \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2) &= \{(\tau, (\mathrm{y}, \mathrm{x}_2)) \mid \tau, \mathrm{y} \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(\tau, (\mathrm{y}, \mathrm{x}_1 + (\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1))) \mid \tau, \mathrm{y} \in \mathbb{R}\} = \\ &= \left\{\left(\tau, (\mathrm{y}, \mathrm{x}_1) + \widehat{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1}\right) \,\middle|\, \tau, \mathrm{y} \in \mathbb{R}\right\} = \\ &= \left\{\left(\mathsf{tm}(\mathrm{w}), \mathsf{bs}(\mathrm{w}) + \widehat{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1}\right) \,\middle|\, \right. \\ &\qquad \left. \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)\right\} = \\ &= \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)\right)^{\left\langle + \widehat{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1}\right\rangle}.\end{aligned}$$

Отже, за означенням 4, отримуємо:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1) \parallel_{\mathfrak{l}} \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2).$$

Оскільки останнє співвідношення справедливе для довільних $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$, то, за означенням 5 (пункт 2), система відліку $\mathfrak{m}$ є квазіодностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ в кінематиці $\mathcal{F}$.

Доведемо, що система відліку $\mathfrak{m}$ не є траєкторно регулярною відносно $\mathfrak{l}$ в кінематиці $\mathcal{F}$. Справді, зафіксуємо довільний елемент $\mathrm{x} \in \mathbb{R} = \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$. Тоді, для довільних $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2 \in \mathbb{R}$ таких, що $\mathrm{y}_1 \neq \mathrm{y}_2$, згідно з формулою (15), отримаємо:

$$(\tau, (\mathrm{y}_1, \mathrm{x})), (\tau, (\mathrm{y}_2, \mathrm{x})) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}),$$

де $(\mathrm{y}_1, \mathrm{x}) \neq (\mathrm{y}_2, \mathrm{x})$. Тобто, згідно з означенням 5 (пункт 1), система відліку $\mathfrak{m}$ не є траєкторно регулярною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$ (будучи квазіодностайною відносно $\mathfrak{l}$).

5. Трансляційно-одностайні системи відліку в універсальних кінематиках. Співвідношення між одностайністю і трансляційною одностайністю

В багатьох навчальних курсах з теоретичної механіки зустрічається інший, відмінний від означення А, варіант означення поступального руху тіл (див., напр. [16, стор. 63], [17, стор. 89]):

Означення Б. *Тверде тіло рухається поступально, якщо всі відрізки, що з'єднують попарно будь-які дві точки тіла залишаються паралельними собі в процесі руху.*

Виходячи з означення Б можна дати наступне (нестроге, фізичне) означення для одностайно-поступального руху систем відліку.

Означення Б$'$. *Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m}$ рухається одностайно-поступально відносно системи відліку $\mathfrak{l}$, якщо всі відрізки, що з'єднують попарно будь-які дві точки, нерухомі відносно системи відліку $\mathfrak{m}$, залишаються конгруентними і паралельними собі в системі відліку $\mathfrak{l}$ в процесі руху.*

Означення Б$'$ служить мотивацією для наступного математично строгого означення.

Означення 6. *Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна векторна універсальна кінематика. Будемо говорити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є* ***трансляційно-одностайною*** *(скорочено —* ***т-одностайною****) відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ (у кінематиці $\mathcal{F}$), якщо для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_1', \mathrm{w}_2' \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ з умов*

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_1) & = & \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_1') \\ \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_2) & = & \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_2') \\ \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) & = & \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2); \\ \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1') & = & \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2') \end{array}\right\} \qquad (16)$$

випливає рівність:

$$\mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2') - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1'). \qquad (17)$$

На фізичному рівні прийнято вважати, що означення поступального руху А і Б — еквівалентні. Проте, виявляється, що на рівні абстрактних універсальних кінематик, породжені означеннями А і Б поняття одностайності і т-одностайності однієї системи відліку відносно іншої — не еквівалентні. Нижче буде доведено, що з одностайності випливає т-одностайність і наведено контрприклад, який показує, що обернена імплікація, взагалі кажучи, не має місця. Далі буде показано, що при певних додаткових умовах з т-одностайності, все ж таки, випливає одностайність.

Твердження 6. *Якщо система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у векторній універсальній кінематиці $\mathcal{F}$, то $\mathfrak{m}$ є т-одностайною відносно $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$.*

Доведення.

Нехай система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ векторної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$.

Розглянемо довільні елементи $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_1', \mathrm{w}_2' \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ задовольняють умови (16). Покладемо:

$$\begin{aligned} \mathrm{x}_1 &:= \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_1); \\ \mathrm{x}_2 &:= \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_2). \end{aligned}$$

Тоді, $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$. Використовуючи умови (16), при $i \in \overline{1,2}$ маємо:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i' &= (\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i'), \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i')) = \\ &= (\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i'), \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i)) = \\ &= (\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i'), \mathrm{x}_i); \\ [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i &= (\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i), \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i)) = \\ &= (\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i), \mathrm{x}_i). \end{aligned}$$

Звідси, використовуючи [1, рівності (6), (7)] або [5, рівності (3.3), (3.4)], а також означення 3, при $i \in \overline{1,2}$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \mathrm{w}_i' &= [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\, [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i' = \\ &= [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\, (\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i'), \mathrm{x}_i) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_i); \\ \mathrm{w}_i &= [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\, [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i = \\ &= [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]\, (\mathsf{tm}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_i), \mathrm{x}_i) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_i). \end{aligned}$$

Отже:

$$\mathrm{w}_i, \mathrm{w}_i' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_i) \qquad \left(i \in \overline{1,2}\right). \qquad (18)$$

Згідно з означенням 5, $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1) \parallel_{\mathfrak{l}} \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)$. Отже, із співвідношення (18), за означенням 4, випливає, що існує елемент $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ і елементи

$$\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1) \qquad (19)$$

такі, що:

$$\begin{aligned} \mathrm{w}_2 &= (\mathsf{tm}(\mathrm{v}_1), \mathrm{x} + \mathsf{bs}(\mathrm{v}_1)); \\ \mathrm{w}_2' &= (\mathsf{tm}(\mathrm{v}_1'), \mathrm{x} + \mathsf{bs}(\mathrm{v}_1')). \end{aligned}$$

Звідси отримуємо:

$$\left.\begin{array}{ll}\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{v}_1)\,; & \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2) = \mathrm{x} + \mathsf{bs}\,(\mathrm{v}_1)\,; \\ \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2') = \mathsf{tm}\,(\mathrm{v}_1')\,; & \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2') = \mathrm{x} + \mathsf{bs}\,(\mathrm{v}_1')\,.\end{array}\right\} \tag{20}$$

За умовою твердження, $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2)$, $\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1') = \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_2')$. Отже, із співвідношень (20) отримуємо рівності:

$$\mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}\,(\mathrm{v}_1)\,; \quad \mathsf{tm}\,(\mathrm{w}_1') = \mathsf{tm}\,(\mathrm{v}_1')\,. \tag{21}$$

За означенням 5, $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_1)$ є абстрактною траєкторією з $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$ в $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{l})$. Крім того, згідно (18) і (19), $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_1', \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_1' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_1)$. Отже, з рівностей (21) випливають рівності:

$$\mathrm{w}_1 = \mathrm{v}_1; \quad \mathrm{w}_1' = \mathrm{v}_1'.$$

Тому, із співвідношень (20) отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2) &= \mathrm{x} + \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1)\,;\\ \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2') &= \mathrm{x} + \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1')\,.\end{aligned}$$

Звідси і випливає бажана рівність (17).

Нижче буде доведено очевидний з точки зору фізичної інтуїції факт, що будь-яка система відліку, нерухома відносно даної є т-одностайною відносно неї. Нагадаємо [18, означення 13], що *система відліку* $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *називається* ***нерухомою*** *відносно системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *в універсальній кінематиці* $\mathcal{F}$*, якщо для довільних* $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ *з умови* $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2)$ *випливає рівність* $\mathsf{bs}\,([\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]\,\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,([\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]\,\mathrm{w}_2)$. Використовуючи поняття траєкторій, породжених рухом однієї системи відліку відносно іншої в універсальних кінематиках, отримуємо наступне твердження 7:

Твердження 7. *Система відліку* $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *є нерухомою відносно системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *в універсальній кінематиці* $\mathcal{F}$ *тоді і тільки тоді, коли для довільного* $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{m})$ *і довільних* $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x})$ *виконується рівність* $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2)$.

Твердження 8. *Якщо система відліку* $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *є нерухомою відносно системи відліку* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ *у векторній універсальній кінематиці* $\mathcal{F}$*, то* $\mathfrak{m}$ *є т-одностайною відносно* $\mathfrak{l}$ *в* $\mathcal{F}$.

Доведення.

Нехай, система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ є нерухомою відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ у векторній універсальній кінематиці $\mathcal{F}$. Розглянемо довільні $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \mathrm{w}_1', \mathrm{w}_2' \in \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l})$ такі, що

$$\begin{aligned}\mathsf{bs}\,([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) &= \mathsf{bs}\,([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1')\,;\\ \mathsf{bs}\,([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2) &= \mathsf{bs}\,([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2')\,.\end{aligned}$$

Покладемо:

$$\mathrm{x}_1 := \mathsf{bs}\,([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1')\,;$$
$$t_1 := \mathsf{tm}\,([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1)\,; \qquad t_1' := \mathsf{tm}\,([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1')\,;$$
$$\mathrm{x}_2 := \mathsf{bs}\,([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}\,([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2')\,;$$
$$t_2 := \mathsf{tm}\,([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2)\,; \qquad t_2' := \mathsf{tm}\,([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2')\,.$$

Тоді:

$$(t_1, \mathrm{x}_1) = [\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1; \quad (t_1', \mathrm{x}_1) = [\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1';$$
$$(t_2, \mathrm{x}_2) = [\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2; \quad (t_2', \mathrm{x}_2) = [\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2'.$$

Звідси, використовуючи [1, рівності (6), (7)] або [5, рівності (3.3), (3.4)], отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathrm{w}_1 &= [\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]\,[\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]\,(t_1, \mathrm{x}_1)\,;\\ \mathrm{w}_1' &= [\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]\,(t_1', \mathrm{x}_1)\,;\\ \mathrm{w}_2 &= [\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]\,(t_2, \mathrm{x}_2)\,;\\ \mathrm{w}_2' &= [\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]\,(t_2', \mathrm{x}_2)\,.\end{aligned}$$

Отже, за означенням 3:

$$\begin{aligned}&\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_1' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_1)\,;\\ &\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_2' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}\,(\mathrm{x}_2)\,.\end{aligned}$$

Отже, оскільки система відліку $\mathfrak{m}$ є нерухомою відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$, то, згідно з твердженням 7, отримуємо:

$$\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1')\,; \qquad \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2')\,.$$

Тому, $\mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2) - \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_2') - \mathsf{bs}\,(\mathrm{w}_1')$. Тобто, за означенням 6, система відліку $\mathfrak{m}$ є т-одностайною відносно $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$.

Приклад 3. Нехай, $\phi\,(\cdot)$ і $\xi\,(\cdot)$ — взаємно-однозначні відображення з $\mathbb{R}$ в $(0, +\infty)$ і з $\mathbb{R}$ в $(-\infty, 0]$ відповідно ($\phi : \mathbb{R} \leftrightarrow (0, +\infty)$, $\xi : \mathbb{R} \leftrightarrow (-\infty, 0]$). Наприклад в якості ϕ і ξ можна взяти:

$$\phi\,(t) = e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\xi\,(t) = \begin{cases} -e^t, & t \notin \mathbb{N} \\ -e^{-(t-1)}, & t \in \mathbb{N},\ t \geq 2 \\ 0, & t = 1. \end{cases}$$

Нехай, $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність всіх раціональних чисел, занумерована таким чином, що $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$. Тоді відображення $\mathscr{U} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, що діє за формулою:

$$\mathscr{U}(t, \mathrm{x}) := \begin{cases} (t, \mathrm{x}), & \mathrm{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ (\phi(t), q_n), & \mathrm{x} = q_{2n-1}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \\ (\xi(t), q_n), & x = q_{2n}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \end{cases}. \quad (22)$$

є бієкцією з $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$, причому оберненим до $\mathscr{U}$ є відображення виду:

$$\mathscr{U}^{[-1]}(\tau, \mathrm{y}) = \begin{cases} (\tau, \mathrm{y}), & \mathrm{y} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \left(\phi^{[-1]}(\tau), q_{2n-1}\right), & y = q_n, \ \tau > 0 \\ \left(\xi^{[-1]}(\tau), q_{2n}\right), & y = q_n, \ \tau \leq 0 \end{cases},$$

де $\phi^{[-1]}$ і $\xi^{[-1]}$ — функції, обернені до ϕ і ξ відповідно.

Отже, $\mathscr{U}$ є оператором перетворення координат з $\left(\mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}\right)$ в $\left(\mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}\right)$, тобто:

$$\mathscr{U} \in \mathbf{Pk}\left(\mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}; \mathbb{R}_{ord}, \widehat{\mathbb{R}}\right).$$

Тому, згідно з твердженням 2, існують векторна універсальна кінематика $\mathcal{F}$ і системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ такі, що:

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}_{ord}; \\ &\mathsf{BG}(\mathfrak{l}, \mathcal{F}) = \mathsf{BG}(\mathfrak{m}, \mathcal{F}) = \widehat{\mathbb{R}}; \\ &[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}, \mathcal{F}] = \mathscr{U}. \end{aligned} \quad (23)$$

Доведемо, що система відліку $\mathfrak{m}$ є нерухомою відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$. Нехай, $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m}) = \mathbb{R}$ і $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$. Використовуючи означення 3 і формули (23) та (22), отримуємо:

$$\begin{aligned} &\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) = \{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})\} = \\ &= \begin{cases} \{(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbb{R}\}, & \mathrm{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \{(\phi(t), q_n) \mid t \in \mathbb{R}\}, & \mathrm{x} = q_{2n-1}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \\ \{(\xi(t), q_n) \mid t \in \mathbb{R}\}, & \mathrm{x} = q_{2n}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \{(t, \mathrm{x}) \mid t \in \mathbb{R}\}, & \mathrm{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \{(t, q_n) \mid t \in (0, \infty)\}, & \mathrm{x} = q_{2n-1}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \\ \{(t, q_n) \mid t \in (-\infty, 0]\}, & \mathrm{x} = q_{2n}, \text{ де } n \in \mathbb{N} \end{cases}. \end{aligned} \quad (24)$$

З формули (24) випливає, що в усіх трьох випадках існують $t_1, t_2, \mathrm{y} \in \mathbb{R}$ такі, що:

$$\mathrm{w}_1 = (t_1, \mathrm{y}), \qquad \mathrm{w}_2 = (t_2, \mathrm{y}).$$

Звідси отримуємо:

$$\mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) \ (= \mathrm{y}).$$

Отже, за твердженням 7, система відліку $\mathfrak{m}$ є нерухомою відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$. Тому, за твердженням 8, система відліку $\mathfrak{m}$ є т-одностайною відносно $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$. Проте система відліку $\mathfrak{m}$ не є квазіодностайною (а отже і одностайною) відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$, оскільки, згідно (24), при $n \in \mathbb{N}$ траєкторії

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(q_{2n-1}) = \{(t, q_n) \mid t \in (0, \infty)\}$$

і

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(q_{2n}) = \{(t, q_n) \mid t \in (-\infty, 0]\}$$

не є паралельними відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ (в сенсі означення 4 (пункт 2)).

Приклад 3 показує, що з т-одностайності однієї системи відліку відносно іншої в універсальній кінематиці, взагалі кажучи, не випливає відповідна квазіодностайність, а отже й одностайність. Нижче буде доведено, що з т-одностайності однієї системи відліку відносно іншої, все ж таки, випливає відповідна траєкторна регулярність.

Твердження 9. *Якщо система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є т-одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у векторній універсальній кінематиці $\mathcal{F}$, то $\mathfrak{m}$ є траєкторно-регулярною відносно $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$.*

Доведення.
Нехай, система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є т-одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у векторній універсальній кінематиці $\mathcal{F}$. І нехай для деякого $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ маємо:

$$\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) \quad \text{і} \quad \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2). \quad (25)$$

Оскільки $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$, то, за означенням 3, існують $t_1, t_2 \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ такі, що:

$$\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_1, \mathrm{x}), \qquad \mathrm{w}_2 = [\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_2, \mathrm{x}).$$

Звідси, використовуючи [1, рівності (6), (7)] або [5, рівності (3.3), (3.4)], отримуємо:

$$\begin{aligned} &\mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\,[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}](t_1, \mathrm{x})) = \\ &\qquad = \mathsf{bs}((t_1, \mathrm{x})) = \mathrm{x} = \mathsf{bs}([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_2). \end{aligned} \quad (26)$$

Покладемо:

$$\mathrm{w}_1' := \mathrm{w}_1, \qquad \mathrm{w}_2' := \mathrm{w}_1. \tag{27}$$

Використовуючи (27), (26), (25), отримаємо:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{bs}\left([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_1'\right) = \mathsf{bs}\left([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_1\right);\\
&\mathsf{bs}\left([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_2'\right) = \mathsf{bs}\left([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_1\right) = \mathsf{bs}\left([\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w}_2\right);\\
&\qquad \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2\right);\\
&\qquad \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1'\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2'\right).
\end{aligned}$$

Звідси, за означенням 6, маємо:

$$\mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_2\right) - \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_1\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_2'\right) - \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_1'\right),$$

тобто, враховуючи (27), отримуємо, $\mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_2\right) - \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_1\right) = \mathbf{0}$. Отже:

$$\mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_2\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_1\right).$$

Таким чином, ми довели, що для довільних $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$ з умови $\mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_1\right) = \mathsf{tm}\left(\mathrm{w}_2\right)$ випливає рівність $\mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_1\right) = \mathsf{bs}\left(\mathrm{w}_2\right)$, тобто, за означенням 5 (пункт 1), система відліку $\mathfrak{m}$ є траєкторно-регулярною відносно $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$.

Наступна теорема 1 показує, що при деяких додаткових умовах з т-одностайності однієї системи відліку відносно іншої у векторній універсальній кінематиці випливає відповідна одностайність. Для формулювання цієї теореми зручно ввести наступне нове поняття:

Означення 7. *Нехай, $\mathcal{F}$ — довільна універсальна кінематика. Систему відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ будемо називати **повночасовою** відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$, якщо для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ виконується рівність $\mathfrak{D}\left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, де $\mathfrak{D}\left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right)$ — область визначення $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$, тобто $\mathfrak{D}\left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right) = \left\{t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \mid \exists \mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}) :\ (t, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right\}$.*

Зауваження 2. Легко бачити, що система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є повночасовою відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$ тоді і тільки тоді, коли для довільного $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ виконується рівність:

$$\left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right\} = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}). \tag{28}$$

Теорема 1. *Нехай, $\mathcal{F}$ — векторна універсальна кінематика. Система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ в $\mathcal{F}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{m}$ є т-одностайною і повночасовою відносно $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$.*

Доведення.

I. Нехай система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ векторної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$. Тоді, згідно з твердженням 6 $\mathfrak{m}$ є т-одностайною відносно $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$. Отже, залишилось довести, що система відліку $\mathfrak{m}$ є повночасовою відносно $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$.

Нехай, $\mathrm{x} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$. Доведемо рівність (28).

За означенням 3, враховуючи примітку 6, маємо,

$$\left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right\} \subseteq \\ \subseteq \left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})\right\} = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}). \tag{29}$$

Навпаки, нехай, $t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$. Тоді, для довільного $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ {[7]}, враховуючи (2) маємо:

$$(t, \mathrm{y}) \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}).$$

Отже, згідно з твердженням 4, існує елемент $\mathrm{x}_0 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$ такий, що:

$$(t, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_0).$$

Оскільки $\mathrm{x}, \mathrm{x}_0 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$, то, за означенням 5 (див. пункт (б) цього означення), $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}) \ \|_{\mathfrak{l}} \ \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_0)$. Тому, оскільки $(t, \mathrm{y}) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_0)$, за означенням 4, існує елемент $\widetilde{\mathrm{y}} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ такий, що $(t, \mathrm{y} + \widetilde{\mathrm{y}}) \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})$. Звідси випливає, що $t \in \left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{m}]}(\mathrm{x})\right\}$. Тому, враховуючи довільність вибору елемента $t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, отримуємо включення, обернене до (29), а отже і рівність (28).

II. Навпаки, нехай система відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ є т-одностайною і повночасовою відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у векторній універсальній кінематиці $\mathcal{F}$. Тоді, згідно з твердженням 9, система відліку $\mathfrak{m}$

[7] За означенням координатного простору (див. [2, 5]), враховуючи систему позначень для універсальних кінематик (див. [1, 5]), маємо, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}) \neq \emptyset$. Отже, хоч один елемент $\mathrm{y} \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$ існує.

є траєкторно-регулярною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$.

Отже, залишилось довести, що система відліку $\mathfrak{m}$ є квазіодностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$. Розглянемо довільні елементи $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$. Оскільки система відліку $\mathfrak{m}$ є повночасовою відносно системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ у кінематиці $\mathcal{F}$, то, згідно з зауваженням 2, маємо:

$$\begin{aligned}\left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)\right\} = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \\ = \left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)\right\}. \quad (30)\end{aligned}$$

Розглянемо довільний момент часу $t \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$. Згідно (30), існують елементи $\mathrm{w}_1' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)$, $\mathrm{w}_2' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)$ такі, що:

$$\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1') = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2') = t. \quad (31)$$

Покладемо:

$$\mathrm{x} := \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2') - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1').$$

Розглянемо довільний елемент $\mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)$. З формули (30) випливає, що існує елемент $\mathrm{w}_1 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)$ такий, що $\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2)$. Отже, враховуючи (31), маємо:

$$\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2); \qquad \mathsf{tm}(\mathrm{w}_1') = \mathsf{tm}(\mathrm{w}_2'). \quad (32)$$

Оскільки $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_1' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)$, то, за означенням 3, існують моменти часу $t_1, t_1' \in \mathbf{Tm}(\mathfrak{m})$ такі, що:

$$\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}](t_1, \mathrm{x}_1); \quad \mathrm{w}_1' = [\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}](t_1', \mathrm{x}_1).$$

Звідси, використовуючи [1, рівності (6), (7)] або [5, рівності (3.3), (3.4)], отримуємо:

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1 = [\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}](t_1, \mathrm{x}_1) = (t_1, \mathrm{x}_1);\\ &[\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1' = (t_1', \mathrm{x}_1).\end{aligned}$$

Отже:

$$\mathsf{bs}([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_1'). \quad (33)$$

Оскільки $\mathrm{w}_2, \mathrm{w}_2' \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)$, то, аналогічно, отримуємо:

$$\mathsf{bs}([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}([\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}]\,\mathrm{w}_2'). \quad (34)$$

З рівностей (32), (33) і (34), за означенням 6, випливає рівність:

$$\mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2') - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1'),$$

тобто рівність:

$$\begin{aligned}\mathsf{bs}(\mathrm{w}_2) = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) + \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2') - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1') = \\ = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1) + \mathrm{x}.\end{aligned}$$

Звідси, враховуючи рівність (32), та означення 4 (пункт 1), маємо:

$$\begin{aligned}\mathrm{w}_2 = (\mathsf{tm}(\mathrm{w}_2), \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2)) = (\mathsf{tm}(\mathrm{w}_1), \mathrm{x} + \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1)) \in \\ \in \left\{\mathsf{tm}(\mathrm{w}), \mathrm{x} + \mathsf{bs}(\mathrm{w}) \mid \mathrm{w} \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)\right\} = \\ = \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)\right)^{\langle +\mathrm{x}\rangle}.\end{aligned}$$

Отже, враховуючи довільність вибору елемента $\mathrm{w}_2 \in \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)$, маємо:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2) \subseteq \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)\right)^{\langle +\mathrm{x}\rangle}. \quad (35)$$

Аналогічно, "помінявши місцями" x_1 і x_2, а також w_1' і w_2', отримаємо:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1) \subseteq \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)\right)^{\langle +\widetilde{\mathrm{x}}\rangle},$$

де $\widetilde{\mathrm{x}} = \mathsf{bs}(\mathrm{w}_1') - \mathsf{bs}(\mathrm{w}_2') = -\mathrm{x}$. Звідси, використовуючи твердження 5 (пункти 1 і 2), отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)^{\langle +\mathrm{x}\rangle} \subseteq \left(\left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)\right)^{\langle +\widetilde{\mathrm{x}}\rangle}\right)^{\langle +\mathrm{x}\rangle} = \\ = \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)\right)^{\langle +(\widetilde{\mathrm{x}}+\mathrm{x})\rangle} = \\ = \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)\right)^{\langle +\mathbf{0}\rangle} = \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2). \quad (36)\end{aligned}$$

З включень (35) і (36) отримуємо рівність:

$$\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2) = \left(\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1)\right)^{\langle +\mathrm{x}\rangle}.$$

З останньої рівності, за означенням 4 (пункт 2) випливає, що $\mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_1) \parallel_{\mathfrak{l}} \mathbf{trj}_{[\mathfrak{l}\leftarrow\mathfrak{m}]}(\mathrm{x}_2)$.

Враховуючи довільність вибору елементів $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{m})$, за означенням 5 (пункт 2), маємо, що система відліку $\mathfrak{m}$ є квазіодностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$. Таким чином, будучи квазіодностайною і траєкторно-регулярною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематиці $\mathcal{F}$, система відліку $\mathfrak{m}$ є одностайною відносно системи відліку $\mathfrak{l}$ в $\mathcal{F}$ (за означенням 5 (пункт 3)).

Зауваження 3. Означення А і Б поступального руху було взято з відповідної літератури в галузі класичної механіки. Саме тому, в рамках законів класичної механіки, *означення А′ і Б′ на фізичному рівні описують системи відліку, пов'язані з тілами, що рухаються поступально.* Виявляється, що в рамках теорії відносності виділений курсивом висновок вже не буде справедливим. Справді, для прикладу розглянемо жорстку систему відліку $\mathfrak{m}$, що рухається рівноприскорено з додатним прискоренням $\boldsymbol{a}$ відносно заданої інерційної системи відліку $\mathfrak{l}$, таку, що в нульовий момент часу $T=0$ має нульову початкову швидкість і центри систем відліку $\mathfrak{l}$ і $\mathfrak{m}$ при $T=0$ співпадають. Згідно з [19, с. 207, формули (8.165)], перетворення координат між нерухомою системою відліку $\mathfrak{l}$ і рухомою системою відліку $\mathfrak{m}$ має вигляд[8]:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}T &= \mathtt{sh}\,(\boldsymbol{a}t)\,(1+\boldsymbol{a}x)\,; \\ (1+\boldsymbol{a}X) &= \mathtt{ch}\,(\boldsymbol{a}t)\,(1+\boldsymbol{a}x)\,; \\ Y &= y; \\ Z &= z, \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

де (T,X,Y,Z) — просторово-часові координати довільної точки в нерухомій системі відліку $\mathfrak{l}$, а (t,x,y,z) — координати цієї точки в прискореній системі відліку $\mathfrak{m}$. Підкреслимо, що в формулах (37) швидкість світла c приймається за одиницю ($c=1$). Зазначимо, що перетворення (37) мають математичний та фізичний сенс лише за умови $1+\boldsymbol{a}x>0$ (див., також [19, с. 207]), тобто за умов $1+\boldsymbol{a}X>0$, $|\boldsymbol{a}T|<1+\boldsymbol{a}X$. Обчислимо траєкторію руху в системі відліку $\mathfrak{l}$ точки $\mathbf{M}_0$, яка в системі відліку $\mathfrak{m}$ має сталі координати $(0,0,0)$. В довільний проміжок часу t просторово-часові координати цієї точки в рухомій системі відліку $\mathfrak{m}$ мають вигляд $(t,0,0,0)$. Отже, згідно (37), координати (T,X_0,Y_0,Z_0) цієї точки в нерухомій системі відліку $\mathfrak{l}$ можна вирахувати за формулами:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}T &= \mathtt{sh}\,(\boldsymbol{a}t)\,; \\ 1+\boldsymbol{a}X_0 &= \mathtt{ch}\,(\boldsymbol{a}t)\,; \\ Y_0 &= Z_0 = 0. \end{aligned}\right\}$$

З першого рівняння останньої системи знаходимо $\boldsymbol{a}t=\mathtt{arsh}\,(\boldsymbol{a}T)$. Отже, виключаючи змінну "t" з другого рівняння останньої системи, отримуємо, $1+\boldsymbol{a}X_0=\mathtt{ch}\,(\mathtt{arsh}\,(\boldsymbol{a}T))=\sqrt{1+(\boldsymbol{a}T)^2}$. Таким чином рівняння руху точки $\mathbf{M}_0$ в нерухомій системі відліку $\mathfrak{m}$ має вигляд:

$$\left.\begin{aligned} &X_0(T)=\frac{1}{\boldsymbol{a}}\left(\sqrt{1+(\boldsymbol{a}T)^2}-1\right); \\ &Y_0(T)=Z_0(T)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

Аналогічно переконуємось, що рівняння руху в системі відліку $\mathfrak{l}$ точки $\mathbf{M}_1$, яка в системі відліку $\mathfrak{m}$ має сталі координати $(1,1,0)$ має вигляд:

$$\left.\begin{aligned} &X_1(T)=\frac{1+\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}\sqrt{1+\left(\frac{\boldsymbol{a}T}{1+\boldsymbol{a}}\right)^2}-\frac{1}{\boldsymbol{a}}\,; \\ &Y_1(T)=1; \quad Z_1(T)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

З формул (38), (39) видно, що точки $\mathbf{M}_0$ і $\mathbf{M}_1$ в системі відліку $\mathfrak{l}$ проходять за один і той же проміжок часу $[0,T]$ ($T>0$) різні (за довжиною) ділянки своїх траєкторій. Справді, позначимо через $\mathbf{M}_0(T)$ і $\mathbf{M}_1(T)$ координати точок $\mathbf{M}_0$ і $\mathbf{M}_1$ в системі відліку $\mathfrak{l}$ в момент часу T відповідно. Тоді вектори $\overrightarrow{\mathbf{M}_0(0),\mathbf{M}_0(T)}$ і $\overrightarrow{\mathbf{M}_1(0),\mathbf{M}_1(T)}$ матимуть різні координати, $\overrightarrow{\mathbf{M}_0(0),\mathbf{M}_0(T)}=\left(\frac{1}{\boldsymbol{a}}\left(\sqrt{1+(\boldsymbol{a}T)^2}-1\right),0,0\right)$, $\overrightarrow{\mathbf{M}_1(0),\mathbf{M}_1(T)}=\left(\frac{1+\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\boldsymbol{a}T}{1+\boldsymbol{a}}\right)^2}-1\right),0,0\right)$. Крім того вектор $\overrightarrow{\mathbf{M}_0,\mathbf{M}_1}$ в системі відліку $\mathfrak{l}$ в різні моменти часу 0 і T ($T>0$) матиме різні координати, $\overrightarrow{\mathbf{M}_0(0),\mathbf{M}_1(0)}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{M}_0(T),\mathbf{M}_1(T)}=\left(\frac{1}{\boldsymbol{a}}\left(\sqrt{1+\left(\frac{\boldsymbol{a}T}{1+\boldsymbol{a}}\right)^2}(1+\boldsymbol{a})-\sqrt{1+(\boldsymbol{a}T)^2}\right),1,0\right)$. Отже система відліку, пов'язана з тілом, що рухається прямолінійно і рівноприскорено в рамках теорії відносності не є одностайно-поступальною ні в сенсі означення А′ ні в сенсі означення Б′.

Таким чином, одностайно-поступальні системи відліку в універсальних кінематиках, взагалі кажучи, непридатні для опису поступальних неінерційних систем відліку в рамках теорії відносності. Різні типи одностайно-поступальних систем відліку, введені в даній роботі, є просто технічними

[8] Див, також [20, стор. 219, формули (6.17)]

поняттями, для того, щоб дослідити випадки, коли можна однозначно ввести поняття переміщення, а отже і середньої або миттєвої швидкості руху однієї системи відліку відносно іншої в рамках теорії універсальних кінематик.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Грушка Я.І.* Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат. // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2015. – **12**, N 1. – С. 74-118.
2. *Грушка Я.І.* Критерій існування універсального перетворення координат у кінематичних мінливих множинах. //Буковинський математичний журнал. – 2014. – **2**, N 2-3. – С. 59-71.
3. *Грушка Я.І.* Еволюційні розширення кінематичних множин та універсальних кінематик. // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2015. – **12**, N 2. – С. 139-204.
4. *Грушка Я.І.* Теорема про еволюційне розширення для універсальних кінематик. // Буковинський математичний журнал. – 2015. – **3**, N 3-4. – С. 67-77.
5. *Grushka Ya.I.* Draft introduction to abstract kinematics. (Version 2.0). – Preprint viXra: 1701.0523v2, 2017. – 208 p. – DOI: 10.13140/RG.2.2.28964.27521.
6. *Грушка Я.І.* Мінливі множини та їх властивості. // Доповіді НАНУ. – 2012. – N 5. – 12-18.
7. *Грушка Я.І.* Примітивні мінливі множини та їх властивості. // Математичний Вісник НТШ. – 2012 – **Т 9**. – С. 52-80.
8. *Grushka Ya.I.* Abstract Coordinate Transforms in Kinematic Changeable Sets and their Properties. – Preprint arXiv:1504.02685v2. – 2015. – 31 p.
9. *Grushka Ya.I.* Abstract concept of changeable set. Preprint arXiv:1207.3751v1. – 2012. – 54 p.
10. *Грушка Я.І.* Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів. // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2014. – **11**, N 1. – С. 192-227.
11. *Грушка Я.І.* Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем. // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, N 9. – С. 1190-1210.
12. *Грушка Я.І.* Видимість у мінливих множинах. // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2012. – **9**, N 2. – С. 122-145.
13. *Грушка Я.І.* Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для базових мінливих множин. // Праці Ін-ту математики НАНУ. – 2014. – **11**, N 2. – С. 66-99.
14. *Грушка Я.І.* Перетворення координат у кінематичних мінливих множинах. // Доповіді НАН України. – 2015. – N 3. – С. 24-31.
15. *Исакович М.А.* Теория полёта. – Ленинград: ОГИЗ, Государственное изд-во физико-технической литературы, 1947. – 328 с.
16. *Аппель П.* Теоретическая механика, том 1. – М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1960. – 515 с.
17. *Павловський М.А.* Теоретична механіка. – К.: "Техніка", 2002. – 511 с.
18. *Грушка Я.І.* Про часозворотність тахіонових кінематик. Праці Ін-ту математики НАНУ. **13**, (2), (2016), 125-174.
19. *К. Мёлер.* Теория Относительности. – М.:Атомиздат, 1975. – 400 с.
20. *Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер.* Гравитация. Том 1. – М.: Мир , 1977. – 480 с.