УДК 517.98

©2017 р. В. В. Городецький, Т.І. Готинчан

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПЕРЕТВОРЕННЯ БЕССЕЛЛЯ У ПРОСТОРАХ ТИПУ $\overset{\circ}{S}$

Доведено аналог загальної теореми про перетворення Фур'є просторів типу S у випадку інтегрального перетворення Бесселя, визначеного на парних функціях з просторів типу $\overset{\circ}{S}$. Як наслідок отримано твердження про перетворення Бесселя узагальнених просторів типу $\overset{\circ}{S}$.

An analogue of a general theorem on the Fourier transform of S type spaces in the case of the Bessel integral transform defined on the pair functions in $\overset{\circ}{S}$ type spaces is proved. As a consequence, the proposition on the Bessel transform of generalized $\overset{\circ}{S}$ type spaces is obtained.

Вступ. Одним із важливих і ефективних методів вивчення задачі Коші, крайових та мішаних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень (Фур'є, Бесселя, Фур'є-Бесселя, Лежандра, Лапласа, Вебера, Ганкеля та ін.), який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших задач через їх інтегральне зображення.

І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов довели [1], що в просторах нескінченно диференційовних функцій, заданих на $\mathbb{R}$ (просторах типу S), які задовольняють умову

$$\exists C = C(\varphi)>0 \; \exists A = A(\varphi)>0 \; \exists B = B(\varphi)>0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \; \forall \{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$
$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \leq C A^k B^q m_{k,q},$$

за певних обмежень на послідовність $\{m_{k,q}\}$ оператори множення на x та диференціювання комутують між собою. Звідси вже випливає, що перетворення Фур'є відображає зазначені простори у простори такого ж типу, при цьому

$$\exists C_1 = C_1(\varphi) > 0 \; \exists A_1 = A_1(\varphi) > 0 \; \exists B_1 =$$
$$= B_1(\varphi) > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \; \forall \{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$
$$|\sigma^k \psi^{(q)}(\sigma)| \leq C_1 A_1^q B_1^k m_{q,k},$$

де $\psi = F[\varphi]$, F – перетворення Фур'є.

При дослідженні сингулярних параболічних рівнянь, еволюційних рівнянь з псевдобеселевими операторами та інших рівнянь, що вироджуються на межі, використовується перетворення Бесселя. У цій роботі доведено аналог загальної теореми з [1] про перетворення Фур'є просторів типу S у випадку інтегрального перетворення Бесселя, визначеного на парних функціях з просторів типу S (простори типу $\overset{\circ}{S}$). Як наслідок, отримано твердження про перетворення Бесселя узагальнених просторів типу $\overset{\circ}{S}$, побудованих за послідовностями вигляду $m_{k,q} = a_k b_q$, $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+$, зокрема, якщо $a_k = k^{k\alpha}$, $b_q = q^{q\beta}$, де $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – фіксовані параметри. Простори, які відповідають таким послідовностям, позначають символами $\overset{\circ}{S}_\alpha$, $\overset{\circ}{S}{}^\beta$, $\overset{\circ}{S}{}^\beta_\alpha$. На теперешній час були досліджені властивості інтегрального перетворення Бесселя просторів типу $\overset{\circ}{S}$ з параметрами $\{\alpha,\beta\} \subset (0,1)$ [2], у цьому випадку елементами таких просторів є функції, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняють певні оцінки. Наприклад, якщо $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^\beta_\alpha$, $\{\alpha,\beta\} \subset (0,1)$, то правильною є нерівність

$$|\varphi(x+iy)| \leq c \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\},$$

$$c > 0, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad \{x,y\} \subset \mathbb{R}.$$

В.В. Крехівський у 1981 році [3], використовуючи властивості цілих функцій довів, що простори типу $\overset{\circ}{W}$, які складаються з парних функцій з просторів типу W, введених Б.Л. Гуревичем [4, 5], перетворенням

Бесселя відображаються у простори такого ж типу. Функції з просторів типу W можна охарактеризувати в термінах послідовностей [6], здійснивши оцінки похідних функцій з таких просторів на дійсній вісі. Отже, простори типу $\overset{\circ}{W}$ утворюють певний підклас просторів $\overset{\circ}{S}_{a_{2k}}$, $\overset{\circ}{S}^{b_{2q}}$, $\overset{\circ}{S}^{b_{2q}}_{a_{2k}}$ при відповідному підборі послідовностей $\{a_{2k}\}$, $\{b_{2q}\}$.

Сукупність $\overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}$. Нехай числа $m_{2k,2q}$, $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+$, такі, що виконуються умови:

1) $\exists \gamma > 0 \ \forall \{k,q\} \subset \mathbb{N}$:

$$\frac{m_{2k-2,2q-2}}{m_{2k,2q}} \leq \gamma^2 \left(\frac{k+q}{kq}\right)^2; \tag{1}$$

$$\frac{m_{2k-2,2q}}{m_{2k,2q}} \leq \gamma \left(\frac{k+q}{kq}\right)$$

або

$$\frac{m_{2k,2q-2}}{m_{2k,2q}} \leq \gamma \left(\frac{k+q}{kq}\right); \tag{2}$$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mu_\varepsilon > 0 \ \forall \{k,q\} \subset \mathbb{N}$:

$$\frac{m_{2k+2,2q}}{m_{2k,2q}} \leq \mu_\varepsilon (1+\varepsilon)^{2k+2q}$$

або

$$\frac{m_{2k,2q+2}}{m_{2k,2q}} \leq \mu_\varepsilon (1+\varepsilon)^{2k+2q}. \tag{3}$$

Сукупність парних нескінченно диференційовних функцій $\varphi = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, для яких виконується умова

$$\exists C = C(\varphi) > 0 \ \exists A = A(\varphi) > 0 \ \exists B = B(\varphi) > 0$$

$$\forall x \in [0; +\infty) \ \forall \{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$

$$|x^{2k} \varphi^{(2q)}(x)| \leq C A^{2k} B^{2q} m_{2k,2q}, \tag{4}$$

позначатимемо символом $\overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}$.

Умови (1)–(3) гарантують визначення у $\overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}$ операцій множення на x^2, $\dfrac{d^2}{dx^2}$ і $\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}$.

Для функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}$ також справджується умова

$$\exists C_0 = C_0(\varphi) > 0 \ \exists A_0 = A_0(\varphi) > 0 \ \exists B_0 =$$

$$= B_0(\varphi) > 0 \ \forall x \in [0; +\infty) \ \forall \{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$

$$|(x^{2k} \varphi(x))^{(2q)}| \leq C_0 A_0^{2k} B_0^{2q} m_{2k,2q}. \tag{5}$$

Справді, згідно з формулою Лейбніца [7]

$$(x^{2k}\varphi(x))^{(2q)} = \sum_{i=0}^{2q} C_{2q}^i (x^{2k})^{(i)} \varphi^{(2q-i)}(x). \tag{6}$$

Зауважимо, що для φ, крім умови (4), виконуються також нерівності:

$$\exists C_1 = C_1(\varphi) > 0 \ \exists A_1 = A_1(\varphi) > 0 \ \exists B_1 =$$

$$= B_1(\varphi) > 0 \ \forall x \in [0; +\infty) \ \forall \{l,n\} \subset \mathbb{Z}_+ :$$

$$|x^{2l-1} \varphi^{(2n-1)}(x)| = |x^{2l-2}(x \varphi^{(2n-1)}(x))| \leq$$

$$\leq C_1 A_1^{2(l-1)} B_1^{2n} m_{2(l-1),2n}. \tag{7}$$

Подамо праву частину (6) у вигляді суми двох доданків

$$I_{2i} \equiv \sum_{i=0}^{2q} C_{2q}^{2i} (x^{2k})^{(2i)} \varphi^{(2q-2i)}(x),$$

$$I_{2i-1} \equiv \sum_{i=1}^{2q} C_{2q}^{2i-1} (x^{2k})^{(2i-1)} \varphi^{(2q-2i+1)}(x).$$

Нехай виконується, наприклад, перша умова з (2). Враховуючи (4) і (7), маємо

$$|I_{2i}| \leq C A^{2k} B^{2q} m_{2k,2q} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2!} \frac{\prod_{i=0}^{1} (2k-i)(2q-i)}{(AB)^2} \frac{m_{2k-2,2q-2}}{m_{2k,2q}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4!} \frac{\prod_{i=0}^{3} (2k-i)(2q-i)}{(AB)^4} \frac{m_{2k-4,2q-4}}{m_{2k,2q}} + \ldots \right) \leq$$

$$\leq C A^{2k} B^{2q} m_{2k,2q} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{(4\gamma(2k+2q))^2}{2!(AB)^2} + (\frac{(4\gamma(2k+2q))^4}{4!(AB)^4} + \ldots \right) \leq$$

$$\leq C A^{2k} B^{2q} m_{2k,2q} \operatorname{ch}\left(\frac{4\gamma(k+q)}{AB}\right)$$

і

$$|I_{2i-1}| \leq C_1 A_1^{2k} B_1^{2q} m_{2k,2q} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{1!} \frac{\prod_{i=0}^{0} (2k-i)(2q-i)}{A_1^2 B_1^0} \frac{m_{2k-2,2q}}{m_{2k,2q}} + \right.$$

$$+\frac{1}{3!}\frac{\prod_{i=0}^{2}(2k-i)(2q-i)}{A_1^4B_1^2}\frac{m_{2k-4,2q-2}}{m_{2k,2q}}+\ldots\Bigg)\le$$

$$\le C_1\frac{B_1}{A_1}A_1^{2k}B_1^{2q}m_{2k,2q}\times$$

$$\times\left(\frac{4\gamma(k+q)}{1!(A_1B_1)}+\frac{(4\gamma(2k+2q))^3}{3!(A_1B_1)^3}+\ldots\right)\le$$

$$\le\left(C_1\frac{B_1}{A_1}\right)A_1^{2k}B_1^{2q}m_{2k,2q}\operatorname{sh}\left(\frac{4\gamma(k+q)}{A_1B_1}\right).$$

Тоді

$$|I_{2i}|+|I_{2i-1}|\le$$

$$\le\tilde{C}_0\tilde{A}_0^{2k}\tilde{B}_0^{2q}m_{2k,2q}\exp\left(\frac{4\gamma}{d}(k+q)\right),$$

де $\tilde{C}_0=\max\left\{C,C_1\frac{B_1}{A_1}\right\}$, $\tilde{A}_0=\max\{A,A_1\}$, $\tilde{B}_0=\max\{B,B_1\}$, $d=\min\{AB,A_1B_1\}$.

Отже, виконується умова (5) зі сталими $A_0=\tilde{A}_0\exp\{2\gamma/d\}$, $B_0=\tilde{B}_0\exp\{2\gamma/d\}$, $C_0=\tilde{C}_0$.

Аналогічно доводимо нерівність (5), якщо виконується друга умова з (2).

Розглянемо оператор Бесселя

$$B_p:=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2p+1}{x}\frac{d}{dx},$$

$$p>-\frac{1}{2}\text{ – фіксований параметр.}$$

Для нескінченно диференційовної парної функції $\varphi=\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}$, правильна рівність

$$B_p^q\varphi(x)=\sum_{i=0}^{q}C_i(p)\frac{\varphi^{(2q-i)}(x)}{x^i},\qquad q\in\mathbb{Z}_+,$$

де $C_i(p)$ – коефіцієнти, залежні від параметра p, при цьому функції $\frac{\varphi^{(2q-i)}(x)}{x^i}$, $i\in\{0,1,\ldots,q\}$, належать до $\overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}$. Тому, якщо φ задовольняє умову (4), то

$$\exists\tilde{C}=\tilde{C}(\varphi,p)>0\ \exists\tilde{A}=\tilde{A}(\varphi,p)>0\ \exists\tilde{B}=$$
$$=\tilde{B}(\varphi,p)>0\ \forall x\in[0;+\infty)\ \forall\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+:$$
$$|x^{2k}B_p^q\varphi(x)|\le\tilde{C}\tilde{A}^{2k}\tilde{B}^{2q}m_{2k,2q},\qquad(8)$$

і навпаки.

Для функції $x^{2k}\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}$, справджується співвідношення

$$B_p(x^{2k}\varphi(x))=(x^{2k}\varphi(x))^{(2)}+$$
$$+(2p+1)(2kx^{2k-2}\varphi(x)+x^{2k-2}(x\varphi^{(1)}(x)).$$

Згідно з (4) і (7) отримуємо, що

$$\exists C'=C'(\varphi)>0\ \exists A'=A'(\varphi)>0\ \exists B'=$$
$$=B'(\varphi)>0\ \forall x\in[0;+\infty)\ \forall\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+:$$
$$|B_p(x^{2k}\varphi(x))|\le C'A'^{2k}B'^2m_{2k,2}(1+(2p+1)).$$

Методом математичної індукції встановлюємо оцінку

$$\exists\tilde{C}'=\tilde{C}'(\varphi,p)>0\ \exists\tilde{A}'=\tilde{A}'(\varphi,p)>0\ \exists\tilde{B}'=$$
$$=\tilde{B}'(\varphi,p)>0\ \forall x\in[0;+\infty)\ \forall\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+:$$
$$|B_p^q(x^{2k}\varphi(x))|\le\tilde{C}'\tilde{A}'^{2k}\tilde{B}'^{2q}m_{2k,2q}.\qquad(9)$$

Перетворення Бесселя. Пряме і обернене перетворення Бесселя визначаються за допомогою формул [8]

$$\psi(\sigma)\equiv F_{B_p}[\varphi](\sigma)=$$
$$=\int_0^{+\infty}\varphi(x)j_p(\sigma x)x^{2p+1}dx,\ \sigma\in\mathbb{R},\ \varphi\in\overset{\circ}{S}(\mathbb{R}),$$
$$\varphi(x)\equiv F_{B_p}^{-1}[\psi](x)=$$
$$=\frac{1}{2^{2p}\Gamma^2(p+1)}\int_0^{+\infty}\psi(\sigma)j_p(\sigma x)\sigma^{2p+1}d\sigma,\ x\in\mathbb{R}.\qquad(10)$$

де функція j_p є розв'язком задачі [8, 9]

$$\begin{cases}B_pu=\sigma^2u,\\ u(0)=1,\ u'(0)=0,\end{cases}$$

$\overset{\circ}{S}(\mathbb{R})$ – сукупність парних функцій з простору $S(\mathbb{R})$ Л. Шварца [1].

Лема. *Для функції $\varphi\in\overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}$ правильна рівність*

$$\sigma^{2q}B_{p,\sigma}^k\psi(\sigma)=\int_0^{+\infty}B_{p,x}^q\left(x^{2k}\varphi(x)\right)j_p(\sigma x)x^{2p+1}dx.$$

(Тут $B_{p,x}^q$ – q-ий степінь оператора Бесселя порядку p, який діє за змінною x.)

Доведення. Застосуємо формально B_p^k до $\psi=F_{B_p}[\varphi]$. Маємо

$$\int_0^{+\infty}\varphi(x)B_{p,\sigma}^k\left(j_p(\sigma x)\right)x^{2p+1}dx=$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(x) x^{2k} j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx.$$

Інтеграл у правій частині рівності існує та збіжний рівномірно, а тому правильною є рівність

$$\sigma^{2q} B^k_{p,\sigma} \psi(\sigma) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) x^{2k} \sigma^{2q} j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(x) x^{2k} B^q_{p,x} j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx.$$

Подамо останній інтеграл як суму двох інтегралів

$$I+II \equiv \int_0^{+\infty} \varphi(x) x^{2k} \frac{d^2}{dx^2} \left(B^{q-1}_{p,x} j_p(\sigma x)\right) x^{2p+1} dx +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \varphi(x) x^{2k} \frac{2p+1}{x} \frac{d}{dx} \left(B^{q-1}_{p,x} j_p(\sigma x)\right) x^{2p+1} dx.$$

Кожний інтеграл проінтегруємо частинами. Враховуючи властивості функції φ, отримуємо

$$I \equiv \int_0^{+\infty} (\varphi(x) x^{2k}) \frac{d^2}{dx^2} \left(B^{q-1}_{p,x} j_p(\sigma x)\right) x^{2p+1} dx =$$

$$= - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\varphi(x) x^{2k}\right) \frac{d}{dx} \left(B^{q-1}_{p,x} j_p(\sigma x)\right) x^{2p+1} dx -$$

$$- \int_0^{+\infty} \frac{2p+1}{x} (\varphi(x) x^{2k}) \frac{d}{dx} \left(B^{q-1}_{p,x} j_p(\sigma x)\right) x^{2p+1} dx,$$

$$II \equiv$$

$$\equiv \int_0^{+\infty} (\varphi(x) x^{2k}) \frac{2p+1}{x} \frac{d}{dx} \left(B^{q-1}_{p,x} j_p(\sigma x)\right) x^{2p+1} dx =$$

$$= - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\varphi(x) x^{2k}\right) \frac{d}{dx} \left(B^{q-1}_{p,x} j_p(\sigma x)\right) x^{2p+1} dx -$$

$$- \int_0^{+\infty} (\varphi(x) x^{2k}) \frac{d^2}{dx^2} \left(B^{q-1}_{p,x} j_p(\sigma x)\right) x^{2p+1} dx.$$

Отже,

$$I + II = - \int_0^{+\infty} (\varphi(x) x^{2k}) B^q_{p,x} j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx -$$

$$-2 \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\varphi(x) x^{2k}\right) \frac{d}{dx} \left(B^{q-1}_{p,x} j_p(\sigma x)\right) x^{2p+1} dx.$$

Звідки

$$\sigma^{2q} B^k_{p,\sigma} \psi(\sigma) =$$

$$= - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\varphi(x) x^{2k}\right) \frac{d}{dx} \left(B^{q-1}_{p,x} j_p(\sigma x)\right) x^{2p+1} dx.$$

Проінтегрувавши інтеграл справа частинами, прийдемо до співвідношення

$$\sigma^{2q} B^k_{p,\sigma} \psi(\sigma) =$$

$$= \int_0^{+\infty} B_{p,x} (\varphi(x) x^{2k}) B^{q-1}_{p,x} j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx.$$

Застосувавши вищенаведений алгоритм $q-1$ разів, отримаємо, що

$$\sigma^{2q} B^k_{p,\sigma} \psi(\sigma) = \int_0^{+\infty} B^q_{p,x} (\varphi(x) x^{2k}) j_p(\sigma x) x^{2p+1} dx.$$

Отже,

$$\sigma^{2q} B^k_{p,\sigma} \psi(\sigma) = F_{B_p}[B^q_{p,x} (\varphi(x) x^{2k})](\sigma).$$

Теорема 1. *Правильною є формула*

$$F_{B_p}[\overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}] = \overset{\circ}{S}_{m_{2q,2k}}.$$

Доведення. Очевидно, що $\psi = F_{B_p}[\varphi]$, яка визначається формулою (10), – парна і нескінченно диференційовна функція.

Врахувавши (1)–(3), (9), а також оцінку $|j_p(\sigma x)| \leq C_{j_p}$, $\{\sigma, x\} \subset \mathbb{R}$, прийдемо до нерівностей

$$|\sigma^{2q} B^k_{p,\sigma} \psi(\sigma)| \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} |B^q_{p,x} (x^{2k} \varphi(x))| |j_p(\sigma x)| x^{2p+1} dx \leq$$

$$\leq C_{j_p} \tilde{C}' \tilde{A}'^{2k} \tilde{B}'^{2} m_{2k,2q} \int_0^{1} x^{2p+1} dx +$$

$$+(C_{j_p}\tilde{A}'^{[2p+1]+\delta}\tilde{C}')\tilde{A}'^{2k}\tilde{B}''^{2q}m_{2k,2q}\times$$
$$\times\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^{2p+1}}{x^{[2p+1]+\delta}}dx\frac{m_{2k+[2p+1]+\delta,2q}}{m_{2k,2q}},$$

де $\delta>0$ – таке, що $[2p+1]+\delta>0$ – парне число і $\delta-\{2p+1\}>1$. (Тут $[a]$, $\{a\}$ – відповідно ціла і дробова частини числа a).

Оскільки, згідно з умовами на числа $m_{2k,2q},\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+$,

$$\frac{m_{2k+[2p+1]+\delta,2q}}{m_{2k,2q}}=\frac{m_{2k+[2p+1]+\delta,2q}}{m_{2k+[2p+1]+\delta-2,2q}}\cdots$$
$$\cdots\frac{m_{2k-2,2q}}{m_{2k,2q}}\le(\mu_\varepsilon(1+\varepsilon)^{2k+2q})^{[2p+1]+\delta},$$

то

$$|\sigma^{2q}B_p^k\psi(\sigma)|\le C_{j_p}\tilde{C}_0\tilde{A}_0^{2k}\tilde{B}_0^{2q}m_{2k,2q}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{2p+2}+\frac{\tilde{A}'^{[2p+1]+\delta}}{\delta-1-\{2p+1\}}\right)\times$$
$$\times(\mu_\varepsilon(1+\varepsilon)^{2k+2q})^{[2p+1]+\delta}.$$

Тому

$$|\sigma^{2q}B_p^k\psi(\sigma)|\le\tilde{C}\tilde{A}^{2k}\tilde{B}^{2q}m_{2k,2q},\qquad(11)$$

де сталі $\tilde{C}$, $\tilde{A}$ і $\tilde{B}$ залежні від p.

Отже, $\psi\in\overset{\circ}{S}_{m_{2q,2k}}$ і $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}]\subset\overset{\circ}{S}_{m_{2q,2k}}$.

Також правильне вкладення $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}_{m_{2q,2k}}]\subset\overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}$. Застосовуючи ще раз перетворення Бесселя і вищенаведені вкладення, отримуємо $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}_{m_{2k,2q}}]=\overset{\circ}{S}_{m_{2q,2k}}$.

Розглянемо простори $\overset{\circ}{S}_{a_{2k}}$, $\overset{\circ}{S}{}^{b_{2q}}$, $\overset{\circ}{S}{}^{b_{2q}}_{a_{2k}}$, які складаються з парних функцій відповідно з просторів S_{a_k}, S^{b_q}, $S_{a_k}^{b_q}$ з тією самою топологією [1].

Теорема 2. *Якщо числа* $a_{2k},b_{2q},\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+$, *такі, що:*

$$\exists C_a>0\ \exists C_b>0\ \exists\tilde{C}>0\ \exists A_0>0\ \forall\{k,q\}\subset\mathbb{N}:$$
$$\frac{a_{2k-2}}{a_{2k}}\le C_ak^{-2(1-\mu)},\ \frac{b_{2q-2}}{b_{2q}}\le C_bq^{-2(1-\lambda)},$$
$$\lambda\ge0,\ \mu\ge0,\ \mu+\lambda\le1,\ \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}\le\tilde{C}A_0^{2k},\ (12)$$

то $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}_{a_{2k}}]=\overset{\circ}{S}{}^{a_{2q}}$, $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}{}^{b_{2q}}]=\overset{\circ}{S}_{b_{2k}}$, $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}{}^{b_{2q}}_{a_{2k}}]=\overset{\circ}{S}{}^{a_{2q}}_{b_{2k}}$.

Доведення. Розглянемо насамперед простір $\overset{\circ}{S}{}^{b_{2q}}_{a_{2k}}$. Тоді $m_{2k,2q}=a_{2k}b_{2q}$, $\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+$.

Перевіримо виконання умов (1)–(3).

Справді, врахувавши перші дві умови з (12), маємо

$$\frac{m_{2k-2,2q-2}}{m_{2k,2q}}=\frac{a_{2k-2}}{a_{2k}}\cdot\frac{b_{2q-2}}{b_{2q}}\le C_aC_b\left(\frac{k^\mu q^\lambda}{kq}\right)^2\le$$
$$\le C_aC_b\left(\frac{(\max\{k,q\})^{\mu+\lambda}}{kq}\right)^2\le$$
$$\le C_aC_b\left(\frac{(k+q)^{\mu+\lambda}}{kq}\right)^2.$$

Тоді

$$\frac{m_{2k-2,2q-2}}{m_{2k,2q}}\le C_aC_b\left(\frac{k+q}{kq}\right)^2.$$

Нехай $\mu\le\lambda$. Перевіримо виконання першої умови з (2). Згідно з першою нерівністю з (12) маємо

$$\frac{m_{2k-2,2q}}{m_{2k,2q}}=\frac{a_{2k-2}}{a_{2k}}\le C_ak^{2(\mu-1)}\le C_a\frac{k^{2\mu-1}q}{kq}\le$$
$$\le C_a\frac{(\max\{k,q\})^{2\mu}}{kq}\le C_a\frac{(k+q)^{2\mu}}{kq}\le$$
$$\le C_a\frac{(k+q)^{\mu+\lambda}}{kq}=\le C_a\frac{(k+q)}{kq}.$$

Якщо ж $\mu\ge\lambda$, то аналогічно перевіряється виконання другої умови з (2). Отже, умови (1)–(2) виконуються зі сталою $\gamma=\max\{C_a,\sqrt{C_aC_b}\}$.

Виконання перших двох умов з (12) для $m_{2k,2q}=a_{2k}b_{2q}$, $\{k,q\}\subset\mathbb{Z}_+$, гарантує виконання оцінки (4). А виконання третьої умови з (12) гарантує виконання оцінки (11). Отже, правильна рівність $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}{}^{b_{2q}}_{a_{2k}}]=\overset{\circ}{S}{}^{a_{2q}}_{b_{2k}}$.

Аналогічно встановлюються рівності $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}_{a_{2k}}]=\overset{\circ}{S}{}^{a_{2q}}$ і $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}{}^{b_{2q}}]=\overset{\circ}{S}_{b_{2k}}$.

Частинним випадком просторів $\overset{\circ}{S}_{a_{2k}}$, $\overset{\circ}{S}{}^{b_{2q}}$, $\overset{\circ}{S}{}^{b_{2q}}_{a_{2k}}$ є простори $\overset{\circ}{S}_\alpha$, $\overset{\circ}{S}{}^\beta$, $\overset{\circ}{S}{}^\beta_\alpha$, які складаються з парних функцій відповідно з просторів S_α, S^β, S_α^β з тією самою топологією [1].

Наслідок. $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}_\alpha] = \overset{\circ}{S}{}^\alpha$, $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}{}^\beta] = \overset{\circ}{S}_\beta$, $F_{B_p}[\overset{\circ}{S}{}^\beta_\alpha] = \overset{\circ}{S}{}^\alpha_\beta$, $\alpha > 0, \beta > 0$.

Доведення. Перевіримо виконання умов (12) теореми 2. Маємо, що

$$\frac{a_{2k-2}}{a_{2k}} = \frac{(2k-2)^{(2k-2)\alpha}}{(2k)^{2k\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{(2k-2)^{2\alpha}} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{2k\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2^{2\alpha}} \frac{1}{k^{2\alpha}} \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{2\alpha} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{2k\alpha} \leq$$

$$\leq e^{-2\alpha} \frac{1}{k^{2\alpha}},$$

оскільки $\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{2\alpha} \leq 2^{2\alpha}$, $k \geq 2$, $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{\alpha k} = e^{-\alpha}$.

Аналогічно встановлюємо нерівності $\frac{b_{2q-2}}{b_{2q}} \leq e^{-2\beta} \frac{1}{q^{2\beta}}$. Крім того,

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \frac{(2k+2)^{(2k+2)\alpha}}{(2k)^{2k\alpha}} =$$

$$= (2k+2)^{2\alpha} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{2k\alpha} \leq$$

$$\leq C_\alpha 2^{2\alpha}(k+1)^{2\alpha} e^{2\alpha} \leq C_\alpha 2^{2\alpha} 2^{(k+1)2\alpha} e^{2\alpha},$$

оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\alpha k} = e^\alpha$, $(k+1)^{2\alpha} \leq C 2^{(k+1)2\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$.

Отже,

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} \leq \tilde{C} A_0^{2k},$$

де $\tilde{C} = C C_\alpha 2^{4\alpha}$, $A_0 = 2^\alpha$.

Зауваження. *Для просторів $\overset{\circ}{S}_\alpha$, $\overset{\circ}{S}{}^\beta$, $\overset{\circ}{S}{}^\beta_\alpha$ виконуються й оцінки (1)–(3), оскільки*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mu_\varepsilon > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} :$$

$$(k+1)^{2\alpha} \leq \mu_\varepsilon (1+\varepsilon)^{2k}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

2. *Дрінь С.С., Дрінь І.І.* Перетворення Фур'є-Бесселя просторів типу S та S' // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.160. Математика. – Чернівці, Рута, 2003. – С. 50–59.

3. *Кречивский В.В.* Преобразования Фурье-Бесселя классов целых функций, убывающих на действительной оси. // Нелинейные дифференциальные уравнения в прикладных задачах: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1984. – С. 124–128.

4. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

5. *Гуревич Б.Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем // Докл. АН СССР – 1954. – Т.99, №6. – С. 893–896.

6. *Готинчан Т.І., Атаманюк Р.М.* Різні форми означення просторів типу W // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.111. Математика. – Чернівці, Рута, 2001. – С. 21–26.

7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. Перевод с английского И.Г. Арамановича, А.М. Березмана, И.А. Вайнштейна, Л.З. Румшинского и Л.Я. Цлафа. Под общей редакцией И.Г. Арамановича. Издание второе. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

8. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Математический сборник. – 1955. – Т.36 (78), №2. – С. 299–310

9. *Левитан Б.И. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье* // Успехи мат. наук. – 1951. – Т.6, вып.2. – С. 102–143.