УДК 517.51

©2017 р. Г. П. Горбаль, В. К. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

СКРІЗЬ РОЗРИВНІ НАРІЗНО ПОЛІНОМІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ НА ДОБУТКАХ ВСЮДИ ЩІЛЬНИХ ПІДМНОЖИН ЧИСЛОВОЇ ПРЯМОЇ

Для довільних зліченних всюди щільних підмножин X і Y числової прямої $\mathbb{R}$ побудовано нарізно поліноміальну скрізь розривну функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$.

For all countable dense subsets X and Y of the number line $\mathbb{R}$ a separately polinomial discontinuous everywhere function is built $f : X \times Y \to \mathbb{R}$.

1. Вступ

Питання про сукупну поліноміальність нарізно поліноміальних функцій, яке почали вивчати ще С. Мазур та В. Орлич [1], в останній час знову привернуло увагу математиків [2-11]. Зокрема, нерозв'язаною залишається така загальна проблема: для яких підмножин E степеня K^n довільного поля K множина $S(E)$ всіх нарізно поліноміальних функцій $f : E \to K$ збігається з множиною $P(E)$ всіх сукупно поліноміальних функцій $f : E \to K$? Навіть для підмножин арифметичної площини $\mathbb{R}^2$ не знайдено відповідної необхідної і достатньої умови для цього. Таку умову вдалось знайти [2, теорема 11] для множин $E = X_1 \times ... \times X_n$, де X_k – довільні підмножини поля K, вона формулюється так: щонайбільше одна з множин $X_1, ..., X_n$ може бути зліченною. До того ж у [2, теорема 7] був побудований приклад нарізно поліноміальної і скрізь розривної, а тому і не сукупно поліноміальної функції $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$ на квадраті раціональної прямої $\mathbb{Q}$.

У цій статті продовжуються дослідження з [2]. Розвиваючи метод міркувань з [2], що використовує многочлени Лаґранжа, ми для довільних зліченних всюди щільних підмножин X і Y числової прямої $\mathbb{R}$ будуємо нарізно поліноміальну і скрізь розривну функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$. При цьому ми не використовуємо як у [2] спеціальних властивостей множини $\mathbb{Q}$, а лише її зліченність і всюди щільність в $\mathbb{R}$.

2. Теореми про систему інтервалів з раціональними кінцями

Ми будемо використовувати наступну добре відому властивість, яка негайно випливає з [12, теорема 3].

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{I}$ –система всіх інтервалів $I = (a, b)$ з раціональними кінцями a і b. Тоді $\mathcal{I}$ є зліченною множиною.*

Основою нашої побудови є наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ – довільна послідовність невироджених інтервалів на числовій прямій $\mathbb{R}$ і X – зліченна всюди щільна в $\mathbb{R}$ множина. Тоді існує така бієкція $\varphi : \mathbb{N} \to X$, $\varphi(n) = x_n$, що $x_{2k} \in I_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Оскільки $\overline{X} = \mathbb{R}$, то для кожного k перетин $I_k \cap X$ нескінченний. Нехай $X = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ – якась перенумерація множини X, де $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$. Існує такий номер n_1, що $a_{n_1} \in I_1$. Візьмемо який небудь номер $\tilde{n}_1$, такий, що $\tilde{n}_1 \neq n_1$. Покладемо $x_2 = a_{n_1}$, $\tilde{x}_2 = a_{\tilde{n}_1}$. Далі знайдемо такий номер n_2, що $a_{n_2} \in I_2$, причому $n_2 \notin \{n_1, \tilde{n}_1\}$ та довільний номер $\tilde{n}_2$, що відрізняється від вибраних номерів $n_1, \tilde{n}_1, n_2$, і покладемо $x_4 = a_{n_2}$ і $\tilde{x}_4 = a_{\tilde{n}_2}$. Припустимо, що для деякого номера k уже визначені різні номери $n_1, ..., n_{k-1}$, $\tilde{n}_1, ..., \tilde{n}_{k-1}$ і точки x_{2j} та $\tilde{x}_{2j}$, такі, що $x_{2j} = a_{n_j} \in I_j$ $\tilde{x}_{2j} = a_{\tilde{n}_j}$ при $j = 1, ..., k-1$. Оскільки множина $\{n : a_n \in I_k\}$ нескінченна, то існують такі різні номери n_k і $\tilde{n}_k$, що $x_{2k} = a_{n_k} \in I_k$, причому ці номери відрізняються від попередньо вибраних. Поклавши $\tilde{x}_{2k} = a_{\tilde{n}_k}$, ми продовжимо нашу побудову ще на один крок, тому її можна продовжити і до нескінченності. В результаті отримаємо по дві послідовності номерів і точок $x_{2k} = a_{n_k}$ і $\tilde{x}_{2k} = a_{\tilde{n}_k}$, такі, що $x_{2k} \in I_k$ для всіх k і всі номери n_k та $\tilde{n}_j$ різні. Множина $E = X \setminus \{x_{2k} : k \in \mathbb{N}\}$ нескінченна, адже вона містить нескінченну множину $\widetilde{X} = \{\tilde{x}_{2k} : k \in \mathbb{N}\}$. Оскільки множина X зліченна, то такою ж буде і множина E. Множина $M = \{1, 3, 5, ...\}$ всіх непарних номерів теж зліченна. Тому існує бієкція $\psi : M \to E$. Визначимо бієкцію $\varphi : \mathbb{N} \to X$, покладаючи $\varphi(2k) = x_{2k}$ і $\varphi(2k-1) = \psi(2k-1) = x_{2k-1}$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Ця бієкція і буде шуканою.

3. Многочлени Лаґранжа

Нехай $x_1, ..., x_n$ – різні точки числової прямої. Розглянемо для кожного $k = 1, ..., n$ многочлени

$$\psi_k(x) = (x - x_1)...(x - x_{k-1})$$
$$(x - x_{k+1})...(x - x_n) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j)$$

і

$$\varphi_k(x) = \frac{\psi_k(x)}{\psi_k(x_k)}.$$

Ясно, що $\varphi_k(x_j) = \delta_{k,j}$, де $\delta_{k,j}$ – символ Кронекера, тобто $\delta_{k,j} = 0$ при $k \neq j$ і $\delta_{k,k} = 1$.

Для чисел $y_1, ..., y_n$ многочлен

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \varphi_k(x)$$

задовольняє умови: $L(x_k) = y_k$ при $k = 1, ..., n$. Він називається *многочленом Лаґранжа з вузлами* $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$.

4. Основний результат

Перейдемо тепер до викладу основного результату.

Нагадаємо, що функція $f : D \to \mathbb{R}$ яка визначена на підмножині D топологічного простору X називається *локально обмеженою* в точці $x_0 \in \overline{D}$, якщо існує такий окіл U точки x_0 в X, що множина $f(U \cap D)$ обмежена в $\mathbb{R}$. Зрозуміло, що неперервна в точці $x_0 \in D$ функція є локально обмеженою в цій точці.

Теорема 3. *Нехай X і Y – зліченні всюди щільні підмножини числової прямої $\mathbb{R}$. Тоді існує така нарізно поліноміальна скрізь розривна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка в жодній точці з $\mathbb{R}^2$ не є локально обмеженою.*

Доведення. Розглянемо систему $\mathcal{P}$ всіх прямокутників $P = I \times J$, що є добутками невироджених інтервалів $I = (a, b)$ та $J = (c, d)$ з раціональними кінцями. З теореми 1 легко вивести, що $\mathcal{P}$ – це зліченна множина. Тому її можна записати у вигляді

$$\mathcal{P} = \{P_k : k \in \mathbb{N}\},$$

де $P_k = I_k \times J_k$ при $k \in \mathbb{N}$. Ясно, що $\mathcal{P}$ – це база евклідової топології площини $\mathbb{R}^2$. Використавши теорему 2 для послідовностей інтервалів I_k та J_k, занумеруємо множини X та Y так, що

$$X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}, Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\},$$

$x_{2k} \in I_k$, $y_{2k} \in J_k$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ і $x_n \neq x_m$ та $y_n \neq y_m$ при $n \neq m$.

Використавши многочлени Лаґранжа можна побудувати такі послідовності многочленів p_n і q_n на $\mathbb{R}$, що $p_n(x_n) = q_n(y_n) = n$, причому $p_n(x_m) = q_m(y_n)$ для довільних номерів m і n. Справді, існують такі многочлени p_1 і q_1, що $p_1(x_1) = q_1(y_1) = 1$. Нехай $n > 1$ і вже побудовані такі многочлени $p_1, ..., p_{n-1}$ і $q_1, ..., q_{n-1}$, що $p_k(x_k) = k = q_k(y_k)$ при $k < n$ і $p_k(x_j) = q_j(y_k)$ при $k, j < n$. Нехай p_n і q_n – це інтерполяційні многочлени Лаґранжа з вузлами $(x_1, q_1(y_n)), ..., (x_{n-1}, q_{n-1}(y_n)), (x_n, n)$ і $(y_1, p_1(x_n)), ..., (y_{n-1}, p_{n-1}(x_n)), (y_n, n)$ відповідно. Для цих многочленів за побудовою $p_n(x_n) = n = q_n(y_n)$. При $m < n$ будемо мати $p_n(x_m) = q_m(y_n)$ і $q_n(y_m) = p_m(x_n)$, отже, співвідношення $p_k(x_j) = q_j(y_k)$ виконується при всіх $k, j \leqslant n$. Таким чином, побудову можна продовжити на один крок, а значить, і до нескінченності.

Визначимо функцію $g : (X \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times Y) \to \mathbb{R}$, покладаючи $g(x, y) = q_n(y)$, якщо

$x = x_n$ і $y \in \mathbb{R}$ і $g(x,y) = p_n(x)$, якщо $y = y_n$ і $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $p_n(x_m) = q_m(y_n)$, то наше означення функції g коректне. Нарешті покладемо $f = g|_{X\times Y}$ і доведемо, що f – шукана функція.

По-перше, $f^x = f(x,\cdot) = g(x,\cdot)|_Y = g^x|_Y = q_n|_Y$, якщо $x = x_n \in X$, і $f_y = f(\cdot, y) = g(\cdot, y)|_X = g^y|_X = p_n|_X$, якщо $y = y_n \in Y$, таким чином, f – це нарізно поліноміальна функція.

По-друге, нехай $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, U – довільний окіл точки x_0, V – довільний окіл точки y_0 в $\mathbb{R}$ і $W = U \times V$. Покажемо, що функція f не обмежена зверху на множині $W \cap (X \times Y)$. Справді, множина $K = \{k : P_k \subseteq W\}$ нескінченна, адже $\mathcal{P}$ – це база топології в $\mathbb{R}^2$, а за побудовою для кожного k точка $p_{2k} = (x_{2k}, y_{2k}) \in I_k \times J_k = P_k$, причому $f(p_{2k}) = 2k$. Оскільки множина K нескінченна, то множина $\{f(p_{2k}) : k \in K\}$ необмежена зверху, а значить, такою буде і множина $f(W \cap (X\times Y))$. Це і доводить нашу теорему.

Зрозуміло, що побудована в теоремі 3 функція f не може бути сукупно поліноміальною, бо тоді вона б була локально обмеженав кожній точці з $\mathbb{R}^2$, адже многочлен від двох дійсних змінних є неперервною функцією.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Mazur S., Orlicz W.* Grundlegende Eigenschaften der polinomischen Operationen// Studia Math. – 1935. – **5**. – P. 50-68.

2. *Косован В. М., Маслюченко В. К.* Нарізно поліноміальні функції // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. В. **374**. Математика. — Чернівці: Рута, 2008. -– С. 66-74.

3. *Косован В. М., Маслюченко В. К.* Нарізно поліноміальні функції на довільних підмножинах $\mathbb{R}^n$// Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Вип. **454**. Математика. — Чернівці: Рута, 2009. — С. 50-53.

4. *Косован В. М., Маслюченко В. К.* Про нарізно сталі та стало-лінійні функції// Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Серія: математика.: зб. наук. пр. – **1**. №3. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. 2011. – С. 44-49.

5. *Косован В. М., Маслюченко В. К.* Про (m,n)-поліноміальні функції на добутках та нарізно поліноміальні функції на хрестах// Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Серія: математика.: зб. наук. пр. – **2-3**. №3. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. 2012. – С. 108-113.

6. *Косован В. М., Маслюченко В. К.* Про поліноміальність нарізно сталих функцій// Карпатські математичні публікації. – 2014. – **5**. №3. – С. 61-66.

7. *Косован В. М.* Про поліноміальність нарізно поліноміальних функцій від багатьох змінних// Бук. мат. журн. –2014.– **2**. №2-3. – С. 126-129.

8. *Косован В. М., Маслюченко В. К.* Про поліноміальність нарізно поліноміальних функцій на добутках комплексних банахових просторів// Мат. вісн. НТШ. – 2008. – **5**. – С. 89-96.

9. *Плічко А. М.* Поліноміальність нарізно поліноміальних операторів// Мат. вісн. НТШ. – 2014. – **11**. – С. 33-35.

10. *Волошин Г. А., Косован В. М., Маслюченко В. К.* Умова Гаара та сукупна поліноміальність нарізно поліноміальних функцій// Укр. мат. журн. – 2017. – **69**. №1. – С. 17-27.

11. *Волошин Г. А., Косован В. М., Маслюченко В. К.* Умова Гаара і тригонометричні поліноми// Збірник праць Ін-ту. математики НАН України. – 2017. – **14**. №1. – С. 103-115.

12. *Маслюченко В. К.* Елементи теорії множин. – Чернівці: Рута, 2002. – С 132.