УДК 517.928

©2017 р. М.Б. Віра

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

ПРО ПОБУДОВУ АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ КРАТНОГО СПЕКТРА ГОЛОВНОГО ОПЕРАТОРА

Запропоновано метод побудови асимптотичного розв'язку двоточкової крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку, коли головна матриця системи має кратне значення, якому відповідає елементарний дільник тієї ж кратності. Знаходяться умови існування і єдиності розв'язку цієї крайової задачі і побудовано асимптотику у вигляді розвинень за дробовими степенями малого параметра. З цією метою використовуються результати асимптотичного аналізу загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями та елементи теорії матриць.

It is proposed the method of constructing of asymptotic solution of the boundary-value problem for a linear singularly perturbed system of differential equations, when the main matrix of the system has multiple eigenvalue, which is corresponding elementary divisor of the same multiplicity. It was obtained the conditions of the existence and uniqueness of the solution of this boundary-value problem and its asymptotic is constructed in form of power series with fractional degrees of a small parameter. For this purpose, it was used the results of the asymptotic analysis of a general solution for the degenerated singular perturbed linear systems of differential equations and basic of matrix theory.

1. Постановка задачі

У даній статті розглядається двоточкова крайова задача

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{1}$$

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(T,\varepsilon) = d(\varepsilon), \tag{2}$$

де $t \in [0;T]$; $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $x(t,\varepsilon)$, $f(t,\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ — відповідно шуканий та задані n-вимірні вектори ; M, N, $A(t,\varepsilon)$ — квадратні матриці n-го порядку.

Нехай виконуються такі умови:

1° матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t), \tag{3}$$

$$f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t); \tag{4}$$

2° коефіцієнти розвинень $A_k(t), f_k(t)$ нескінченно диференційовані на відрізку $[0;T]$;

3° головна матриця $A_0(t)$ має при всіх $t \in [0;T]$ єдине власне значення $\lambda_0(t)$ кратності n, якому відповідає один n-кратний елементарний дільник $(\lambda - \lambda(t))^n$;

4° вектор $d(\varepsilon)$ зображається у вигляді асимптотичного розвинення

$$d(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k d_k,$$

при $\varepsilon \to 0$.

На сьогодні теорія побудови асимптотики загального розв'язку системи (1) досить розвинена. Відомо, що перші основні результати були отримані на початку XX століття в працях Д. Біркгофа [1], Я. Д. Тамарніна [2]. Ними виведено асимптотичні формули для визначення n лінійно незалежних розв'язків системи (1) у випадку простих коренів харакктеристичного рівняння

$$\det(A_0(t)-\lambda E)=0. \tag{5}$$

Ці формули виявилися надзвичайно ефективними. Пізніше з'явився інтерес щодо можливості їх узагальнення на випадок кратних коренів характеристичного рівняння (5). Проте ця задача виявилася досить складною і довгий час вважалася нерозв'язною. І лише в 60-х роках XX століття у працях М. Шкіля [3,4] було встановлено, що в разі кратних коренів характеристичного рівняння (5), асимптотичні розв'язки системи (1) можна будувати у вигляді розвинень за дробовими степенями параметра. Крім того, беручи до уваги умову 3°, за певних обмежень, накладених на матрицю $A_1(t)$, всі n розв'язків можна побудувати у вигляді розвинень за степенями $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$.

У роботах [5,6] здійснено побудову асимптотики розв'язку крайових задач для вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь, коли у системі (1) замість одиничної матриці при похідній розглядають деяку тотожно вироджену матрицю $B(t)$ ($\det B(t)\equiv 0, \forall t\in[0;T]$). З цією метою було використано асимптотику загального розв'язку вироджених систем. Але запропонована техніка виявилася дуже громіздкою.

У даній роботі спробуємо раціоналізувати підхід до побудови розв'язку поставленої крайової задачі.

2. Асимптотика загального розв'язку системи ДР

Із умови 3° та теорії асимптотичного інтегрування [6], випливає, що власному значенню $\lambda_0(t)$ матриці $A_0(t)$ відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки n, який складається із власного вектора $\varphi(t)$ та приєднаних векторів $\varphi_i(t)$, $i=\overline{2,n}$, які задовольняють співвідношення

$$(A_0(t)-\lambda_0(t)E)\varphi(t)=0,$$
$$(A_0(t)-\lambda_0(t)E)\varphi_i(t)=\varphi_{i-1}, i=\overline{2,n}, \tag{6}$$

а рівняння

$$(A_0(t)-\lambda_0(t)E)x=\varphi_n(t), \tag{7}$$

нерозв'язне при всіх $t\in[0;T]$. Спершу знайдемо власний вектор $\varphi(t)$. Тоді приєднані вектори виразимо формулами

$$\varphi_i(t)=(H(t))^{i-1}\varphi(t),$$

$i=\overline{2,n}$, де $H(t)$ — напівобернена матриця до матриці $A_0(t)-\lambda_0(t)E$. З умови розв'язності рівнянь (6) випливає тотожна рівність

$$(H^{i-1}\varphi,\psi)\equiv 0, i=\overline{1,n-1},$$

де $\psi(t)$ — власний вектор матриці $A_0^*(t)$, спряженої з $A_0(t)$. А із нерозв'язності рівняння (7) випливає

$$(H^{n-1}\varphi,\psi)\neq 0, \forall t\in[0;T].$$

Оскільки вектор $\psi(t)$ визначається з точністю до скалярного множника, визначимо його так, щоб

$$(H^{n-1}\varphi,\psi)=1.$$

Тоді, взявши до уваги структуру напівоберненої матриці $H(t)$, дістанемо рівність

$$(H^{i-1}\varphi,\psi)=\delta_{i,n}, i=1,2,\ldots,$$

де δ_{ij} — символ Кронекера.

У роботі [7, с.123] показано, що однорідна система рівнянь

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x, \tag{8}$$

має n лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$x_i(t,\varepsilon)=u_i(t,\varepsilon)\times$$
$$\times\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{t_0}^{t}(\lambda_0(\tau)+\lambda^{(i)}(\tau,\varepsilon))\right)d\tau, \tag{9}$$

де $u_i(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектор-функції, $\lambda^{(i)}(t,\varepsilon)$ — скалярні функції, що зображаються розвиненнями за дробовими степенями малого параметра. При цьому функція $\lambda^{(i)}(t,\varepsilon)$ має задовольняти рівняння розгалуження

$$(\lambda^{(i)})^n+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s L_{0s}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s L_{ks}[(\lambda^{(i)})^k]=0, \tag{10}$$

коефіцієнти якого виражаються формулами

$$L_{0s} = (\widetilde{L}_{0s}\varphi, \psi), s = 1, 2, \ldots,$$

де

$$\widetilde{L}_{0s} = \sum_{j=1}^{s}(-1)^j P_j^s(H\Gamma),$$

а

$$L_{ks}[(\lambda^{(i)})^k] = (\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(i)})^k]\varphi, \psi),$$

$$\widetilde{L}_{ks} = \sum_{j=0}^{s}\sum_{r=0}^{s-j}(-1)^r D^j[(\lambda^{(i)})^k] P_{j+k,r}^{s-j}(H, H\Gamma),$$

$$k = 1, 2, \ldots, s = 0, 1, \ldots.$$

Символом $P_{s,k}^m(H, H\Gamma)$ позначено суму всеможливих "добутків" s матричних множників H і k операторних множників $H\Gamma_{j_1}, H\Gamma_{j_2}, \ldots H\Gamma_{j_k}$ з натуральними індексами, сума яких дорівнює m, де перший множник H у всіх цих множників "відбирається", а

$$\Gamma_k(t) = A_k(t) - \delta_{k,1}\frac{d}{dt}, k = 1, 2, \ldots.$$

$P_j^s(H\Gamma)$ утворюється аналогічно як сума всіх можливих "добутків" операторних множників $H\Gamma_{k_1}, H\Gamma_{k_2}, \ldots H\Gamma_{k_j}$, сума індексів яких дорівнює s, від усіх доданків яких "відбирається" перший множник H. (Причому вважатимемо $P_0^s(H\Gamma) = 0$ при $s > 0$, $P_0^0(H\Gamma) = E$ і аналогічно $P_{0,0}^s(H, H\Gamma) = 0$ при $s > 0$, $P_{0,0}^0(H, H\Gamma) = E$).

Символом $D^j[\lambda^k]$ позначається диференціальний вираз, що являє собою суму всеможливих "добутків" k функцій $\lambda(t)$ та оператора диференціювання $D = \frac{d}{dt}$, причому останнім множником у всіх доданках цього виразу має бути λ. Наприклад,

$$D^2[\lambda^2] = D^2\lambda^2 + D\lambda D\lambda + \lambda D^2\lambda = (\lambda^2)''+$$

$$+(\lambda\lambda')' + \lambda\lambda'' = 3(\lambda\lambda')' + \lambda\lambda'' = 3(\lambda')^2 + 4\lambda\lambda''.$$

У роботі [7] також показано, що коли функція $\lambda^{(i)}(t, \varepsilon)$ задовольняє рівняння розгалуження (10), то відповідний вектор $u_i(t, \varepsilon)$ зображається у вигляді формального розвинення

$$u_i(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1}(\lambda^{(i)})^k H^k\varphi + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s H\widetilde{L}_{0s}\varphi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(i)})^k]\varphi. \qquad (11)$$

Як і у роботі [6] припустимо, що виконується умова

$$5^\circ \qquad L_{01}(t) = -(\Gamma_1\varphi, \psi) =$$

$$= -(A_1\varphi, \psi) + (\varphi', \psi) \neq 0, \forall t \in [0; T].$$

Тоді відповідно до методу діаграм Ньютона рівняння розгалуження (10) має n розв'язків, які можна побудувати у вигляді розвинень за степенями $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$:

$$\lambda^{(i)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k^{(i)}(t). \qquad (12)$$

При цьому перший коефіцієнт цих розвинень має задовольняти визначальне рівняння, яке в даному випадку має вигляд

$$(\lambda_1^{(j)}(t))^n + L_{01}(t) = 0, \qquad (13)$$

з якого, беручи до уваги умову 5°, дістанемо n різних ненульових коренів

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[n]{|L_{01}|}\times$$

$$\times\exp\left(i\frac{arg(-L_{01}) + 2\pi(j-1)}{n}\right), j = \overline{1, n}.$$

Підставивши ряд (12) у рівняння розгалуження (10) і змінивши порядок сумування у третьому доданку, дістанемо

$$\sum_{k=n}^{\infty}\mu^k P_n^k(\lambda^{(i)}) + \sum_{k=n}^{\infty}\mu^k L_{0,\frac{k}{n}} +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n}]}\sum_{j=1}^{k-ns}\mu^k L_{js}[P_j^{k-ns}(\lambda^{(i)})] = 0, \quad (14)$$

де $L_{0,\frac{k}{n}} = 0$, якщо k не ділиться на n, $P_k^j(\lambda^{(i)})$ — сума всеможливих добутків k множників $\lambda_{s_1}^{(i)}, \lambda_{s_2}^{(i)}, ..., \lambda_{s_k}^{(i)}$, сума індексів яких дорівнює j. Прирівнявши в (14) вирази при однакових степенях μ, дістанемо нескінченну систему рівнянь:

$$P_n^k(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{k}{n}} + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n}]}\sum_{j=1}^{k-ns} L_{js}[P_j^{k-ns}(\lambda^{(i)})] = 0,$$

$$k = n, n+1, \ldots, \qquad (15)$$

перше рівняння якої збігається з визначальним рівнянням (13). Покладемо в (15) $n+k$ замість k:

$$P_n^{n+k}(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{k+n}{n}} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{[\frac{n+k-1}{n}]} \sum_{j=1}^{n+k-ns} L_{js}[P_j^{n+k-ns}(\lambda^{(i)})] = 0. \qquad (16)$$

Представимо перший доданок рівняння (16) у вигляді

$$P_n^{n+k}(\lambda^{(i)}) = n(\lambda_1^{(i)})^{n-1}\lambda_{k+1}^{(i)} + \widetilde{P}_n^{n+k}(\lambda^{(i)}),$$

де $\widetilde{P}_n^{n+k}(\lambda^{(i)})$ також містить лише ті $\lambda_j^{(i)}$, нижні індекси яких не перевищують k. Враховуючи, що третій доданок в (16) теж містить лише ті $\lambda_j^{(i)}$, нижні індекси яких не перевищують k, із рівняння (16) отримаємо рекурентну формулу для визначення коефіцієнтів $\lambda_{k+1}^{(i)}$, $k = 1, 2, ...$

$$\lambda_{k+1}^{(i)}(t) = -\frac{1}{n(\lambda_1^{(i)})^{n-1}} \left[\widetilde{P}_n^{n+k}(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{k+n}{n}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{[\frac{n+k-1}{n}]} \sum_{j=1}^{n+k-ns} L_{js}[P_j^{n+k-ns}(\lambda^{(i)})]\right]. \qquad (17)$$

Підставивши розвинення (12) у вираз (11) і згрупувавши в ньому доданки із однаковими степенями μ, дістанемо розвинення

$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k^{(i)}(t), i = \overline{1,n}, \qquad (18)$$

де коефіцієнти $u_k^{(i)}(t)$ визначаються формулами

$$u_k^{(i)}(t) = H\widetilde{L}_{0,\frac{k}{n}}\varphi +$$

$$+ \sum_{s=0}^{[\frac{k-1}{n}]} \sum_{j=1}^{k-sn} H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(i)})]\varphi,$$

$$k = 1, 2, \ldots, i = \overline{1,n}. \qquad (19)$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок неоднорідної системи (1), припустивши виконання умови

$6^\circ \qquad \det A_0(t) \neq 0,\ \forall t \in [0;T].$

Тоді цей розв'язок побудуємо у вигляді розвинення

$$v(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t). \qquad (20)$$

Підставивши (20) в систему (1) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε, дістанемо такі рекурентні формули для визначення векторів $v_k(t)$:

$$v_0(t) = -A_0^{-1}(t)f_0(t),$$

$$v_k(t) = -A_0^{-1}(t)(f_k(t) - \sum_{i=1}^{k} A_i(t)v_{k-i}(t) -$$

$$-v'_{k-1}(t)),\ k = 1, 2, \ldots. \qquad (21)$$

3. Побудова асимптотики розв'язку крайової задачі

Перейдемо тепер до побудови аимптотики розв'язку крайової задачі (1), (2). Припустимо, що виконується умова

7°

$$Re\lambda_0(t) < 0, \forall t \in [0;T].$$

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді суми лінійної комбінації побудованих вище розв'язків однорідної системи (9) і частинного розв'язку (20) неоднорідної системи

$$x(t,\varepsilon) = \frac{1}{\mu^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} u_i(t,\varepsilon) \times$$

$$\times \exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t (\lambda_0(\tau) + \lambda^{(i)}(\tau,\varepsilon))d\tau\right) c_i(\varepsilon) +$$

$$+v(t,\varepsilon), \qquad (22)$$

де $c_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$ — скалярні множники, які розкладаються в степеневі ряди

$$c_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k c_k^{(i)}, i = \overline{1,n}, \qquad (23)$$

коефіцієнти яких $c_k^{(i)}$, $k = 0, 1, ...$ підлягають визначенню. Підставивши вектор (22) у крайову умову (2) і знехтувавши експоненціально малими доданками, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} Mu_i(0,\varepsilon)c_i(\varepsilon) = \mu^{n-1}(d(\varepsilon) -$$

$$-Mv(0,\varepsilon)-Nv(T,\varepsilon)). \tag{24}$$

Припустимо, що матриця M невироджена, тобто виконується умова

8° $\det M \neq 0$.

Тоді помноживши рівняння (24) зліва на обернену до M матрицю, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(0,\varepsilon)c_i(\varepsilon) = \mu^{n-1}(M^{-1}d(\varepsilon)-$$

$$-v(0,\varepsilon)-M^{-1}Nv(T,\varepsilon)).$$

Далі, підставивши вирази (11) для визначення векторів $u_i(t,\varepsilon)$ в останнє рівняння, запишемо його у векторно-матричному вигляді

$$U(0,\varepsilon)c(\varepsilon)=n(\varepsilon), \tag{25}$$

де

$$U(0,\varepsilon) = (P(0)\Lambda(0,\varepsilon)+$$

$$+H\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\left[\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(1)})^k]\varphi,\ldots,\right.$$

$$\left.\left.\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(n)})^k]\varphi\right]\right), \tag{26}$$

в якій

$$P(t)=[\varphi, H\varphi,\ldots,H^{n-1}\varphi],$$

$$\Lambda(t,\varepsilon)=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1\\ \lambda^{(1)}(t,\varepsilon) & \ldots & \lambda^{(n)}(t,\varepsilon)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ (\lambda^{(1)}(t,\varepsilon))^{n-1} & \ldots & (\lambda^{(n)}(t,\varepsilon))^{n-1}\end{pmatrix}.$$

$$c(\varepsilon)=col(c_1(\varepsilon),\ldots,c_n(\varepsilon)),$$

$$n(\varepsilon)=\mu^{n-1}(M^{-1}d(\varepsilon)-v(0,\varepsilon)-M^{-1}Nv(T,\varepsilon)).$$

Представимо матрицю $U(0,\varepsilon)$ у вигляді ряду за степенями параметра μ. Врахувавши, що

$$(\lambda^{(i)}(t,\varepsilon))^k=\sum_{j=k}^{\infty}\mu^k P_k^j(\lambda^{(i)}),$$

матрицю $\Lambda(t,\varepsilon)$ представимо у вигляді

$$\Lambda(t,\varepsilon)=diag\{1,\mu,...,\mu^{n-1}\}\times$$

$$\times(\Lambda_0(t)+\mu\Lambda_1(t)+\mu^2\Lambda_2(t)+\ldots),$$

де

$$\Lambda_0(t)=\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1\\ \lambda_1^{(1)}(t) & \ldots & \lambda_1^{(n)}(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ (\lambda_1^{(1)}(t))^{n-1} & \ldots & (\lambda_1^{(n)}(t))^{n-1}\end{pmatrix},$$

$$\Lambda_k(t)=\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0\\ P_1^{k+1}(\lambda^{(1)}) & \ldots & P_1^{k+1}(\lambda^{(n)})\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ P_{n-1}^{n-1+k}(\lambda^{(1)}) & \ldots & P_{n-1}^{n-1+k}(\lambda^{(n)})\end{pmatrix},$$

$$k=1,2,\ldots.$$

Врахувавши вигляд матриці $\Lambda(t,\varepsilon)$ і перегрупувавши вирази у другому доданку формули (26) для матриці $U(0,\varepsilon)$, представимо її у вигляді

$$U(0,\varepsilon)=\big(P(0)diag\{1,\mu,...,\mu^{n-1}\}\times$$

$$\times(\Lambda_0(t)+\mu\Lambda_1(t)+\mu^2\Lambda_2(t)+\ldots)+H\sum_{k=n}^{\infty}\mu^k\times$$

$$\times\left[\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]}\sum_{j=0}^{k-sn}\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(1)})]\varphi,\ldots,\right.$$

$$\left.\left.\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]}\sum_{j=0}^{k-sn}\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(n)})]\varphi\right]\right). \tag{27}$$

Беручи до уваги (27), помножимо (25) зліва на матрицю $diag\{1,\mu^{-1},...,\mu^{-(n-1)}\}P^{-1}(0)$. Дістанемо систему

$$\widetilde{U}(0,\varepsilon)c(\varepsilon)=\widetilde{n}(\varepsilon), \tag{28}$$

де

$$\widetilde{U}(0,\varepsilon)=(\Lambda_0(t)+\mu\Lambda_1(t)+\mu^2\Lambda_2(t)+\ldots+$$

$$+diag\{1,\mu^{-1},...,\mu^{-(n-1)}\}P^{-1}(0)\times$$

$$\times H\sum_{k=n}^{\infty}\mu^k\left[\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]}\sum_{j=0}^{k-sn}\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(1)})]\varphi,\ldots,\right.$$

$$\left.\left.\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]}\sum_{j=0}^{k-sn}\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(n)})]\varphi\right]\right),$$

$$\widetilde{n}(\varepsilon)=diag\{\mu^{n-1},\mu^{n-2},...,1\}P^{-1}(0)\times$$

$$\times(M^{-1}d(\varepsilon)-v(0,\varepsilon)-M^{-1}Nv(T,\varepsilon)).$$

Введемо до розгляду вектори

$$r_k^{(i)}(t) = P^{-1}(0)H \sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]} \sum_{j=0}^{k-sn} \widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(i)})]\varphi,$$

$$i = \overline{1,n}, k = n, n+1, \ldots,$$

і позначимо їх координати $(r_k^{(i)}(t))_j$, $j = \overline{1,n}$. Тоді, враховуючи ці позначення, матрицю $\widetilde{U}(0,\varepsilon)$ запишемо у вигляді

$$\widetilde{U}(0,\varepsilon) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \Lambda_k(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k R_k(0) \right),$$

де

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^k R_k(0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=n}^{\infty} \mu^k [(r_k^{(1)})_1 ... (r_k^{(n)})_1] \\ \sum_{k=n-1}^{\infty} \mu^k [(r_{k+1}^{(1)})_2 ... (r_{k+1}^{(n)})_2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k [(r_{k+n-1}^{(1)})_n ... (r_{k+n-1}^{(n)})_n] \end{pmatrix},$$

звідки

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \\ (r_n^{(1)})_n & \ldots & (r_n^{(n)})_n \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \\ (r_n^{(1)})_{n-1} & \ldots & (r_n^{(n)})_{n-1} \\ (r_{n+1}^{(1)})_n & \ldots & (r_{n+1}^{(n)})_n \end{pmatrix}, \ldots.$$

Зобразимо вектор $\widetilde{n}(\varepsilon)$ у вигляді

$$\widetilde{n}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \widetilde{n}_k,$$

де

$$\widetilde{n}_k = col((a_{\frac{k-(n-1)}{n}})_1, (a_{\frac{k-(n-2)}{n}})_2,$$

$$\ldots, (a_{\frac{k-1}{n}})_{n-1}, (a_{\frac{k}{n}})_n),$$

$$a_k = M^{-1}d_k - v_k(0) - M^{-1}Nv_k(T)),$$

$k = 0, 1, \ldots$, $(a_k)_j$ — j-та координата вектора a_k.

Остаточно матриця $\widetilde{U}(0,\varepsilon)$ набуває вигляду

$$\widetilde{U}(0,\varepsilon) = \Lambda_0(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k U_k(0)$$

де

$$U_k(0) = \Lambda_k(0) + R_k(0), k = 1, 2, \ldots.$$

Прирівнявши в рівнянні (28) вирази при однакових степенях μ, дістанемо

$$\Lambda_0(0)c_0 = \widetilde{n}_0, \tag{29}$$

$$\Lambda_0(0)c_k = \widetilde{n}_k - \sum_{j=1}^{k} U_j(0)c_{k-j},$$

$$k = 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

де

$$c_k = col(c_1^{(k)}, ..., c_n^{(k)}).$$

Оскільки $\Lambda_0(0)$ — матриця Вандермонда і є невиродженою, то із (29), (30) однозначно визначимо вектори сталих c_k:

$$c_0 = \Lambda_0^{-1}(0)\widetilde{n}_0,$$

$$c_k = \Lambda_0^{-1}(0) \left(\widetilde{n}_k - \sum_{j=1}^{k} U_j(0)c_{k-j} \right),$$

підставивши які у (23) дістанемо формальний ряд, яким зображається розв'язок крайової задачі (1), (2).

Як і в роботах [5,6] можна показати, що побудований розв'язок має асимптотичний характер.

Підсумком проведених міркувань є наступна теорема.

Теорема

Якщо матриця $A_0(t)$ має на відрізку $[0;T]$ кратний скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0(t))^n$ і виконуються умови $1° - 8°$, то при досить малих ε існує єдиний розв'язок крайової задачі (1), (2), що виражається асимптотичною формулою

$$x(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) + O(\mu^{m+2-n}),$$

де вектор $x_m(t,\varepsilon)$ зображається у вигляді розвинення

$$x_m(t,\varepsilon) = \mu^{-(n-1)} \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mu^k \times$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^{k} c_j^{(i)} u_{k-j}^{(i)}(t) \right) \times$$

$$\times \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \left(\lambda_0(\tau) + \sum_{k=1}^{m} \mu^k \lambda_k^{(i)}(\tau) \right) d\tau \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{[\frac{m}{n}]} \mu^{kn} v_k(t),$$

а вектор-функції $u_k^{(i)}(t)$, $i = \overline{1,n}$, $v_k(t)$, *скалярні функції* $\lambda_k^{(i)}(t), i = \overline{1,n}$, *скалярні множники* $c_k^{(i)}, i = \overline{1,n}$ *визначаються за описаним вище алгоритмом.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Birkhoff G.D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter / / G.D. Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – №9. – P. 219-231.

2. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды / Я. Д. Тамаркин. – Петроград, 1917. – 308 с.

3. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях / М. І. Шкіль. – К.: Вища шк., 1971. – 226 с.

4. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. – К.: Вища шк., 1991. – 207 с.

5. *Віра М. Б.* Двоточкова крайова задача для виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратного спектра головного оператора / М. Б. Віра // Труды ИПММ НАН Украины. — 2009. — **Т. 18**. — С. 19-28.

6. *Віра М. Б.* Асимптотика розв'язку крайової задачі для лінійної виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у критичному випадку / М. Б. Віра // Буковинський математичний журнал. — 2014. — **Т. 2**, №1. — С. 17-25.

7. *Самойленко А. М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. — Київ: Вища школа, 2000. — 294 с.

8. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. — К.: Вища шк., 1989. – 287 с.