УДК 517.956

©2017 р. Г.П. Вережак

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ГАРМОНІЙНИМ ОСЦИЛЯТОРОМ

Встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з гармонічним осцилятором і функціями від такого оператора у просторах типу S і S'.

We prove the correct solvability of the nonlocal multipoint in time problem for the evolutionary equations with the harmonic oscillator and the functions of such operator in the spaces of S and S' type.

У розвитку багатьох важливих напрямів математики і фізики значну роль відіграли поняття і методи, які виникли при вивченні рівняння Штурма-Ліувілля та пов'язаного з цим рівнянням оператора Штурма-Ліувілля $A = -d^2/dx^2 + q(x)$. Оператор Штурма-Ліувілля породжує різні крайові задачі: регулярні (x належить скінченному інтервалу) і сингулярні (випадок нескінченного проміжку). Вони, як відомо, відрізняються постановкою задачі, методами дослідження і сферами застосування. Функція q називається потенціалом; якщо $q(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, то оператор A називається гармонійним осцилятором. Відомо [1, с. 145], що гармонійний осцилятор – невід'ємний самоспряжений оператор у просторі $L_2(\mathbb{R})$. Еволюційне рівняння

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad t \in (0, T], \tag{1}$$

з таким оператором відноситься до рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких необмежено зростають при $|x| \to +\infty$. М.Л.Горбачуком, А.І. Кашпіровским [1, с. 148] доведено, що розв'язок рівняння (1) завжди має граничне значення $u(0) = \lim\limits_{t\to+0} u(t)$ в просторах узагальнених функцій нескінченного порядку типу ультрарозподілів (типу S') і за ним завжди однозначно знаходиться. У працях М.Л. Горбачука, В.І. Горбачук, П.І. Дудникова, В.В. Городецького та ін. доведено, що простори типу S' співпадають з множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними параболічного типу (до яких відносяться і рівняння (1)), при яких розв'язки є нескінченно диференційовними за просторовими змінними функціями (див., наприклад, [1, 2]).

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$, $\{t_1,\ldots,t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа (если $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші); при цьому умова $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f$ трактується в класичному або в слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція (така ситуація виникає у випадку, коли f має особливість в одній або декількох точках і допускає регуляризацію в тому чи іншому просторі узагальнених функцій).

Нелокальна багатоточкова за часом задача відноситься до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними, теорія яких інтенсивно розвивається з сімдесятих років минулого століття. Дослідження таких задач зумовлено багатьма застосуваннями в механіці, фізиці, хімії, біології, екології та інших дисциплінах, які виникають при математичному моделюванні тих чи інших процесів [3–6]. На доцільності використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач вперше вказав А.А. Дезин [7], котрий досліджував розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Він довів, що для постановки коректної крайової задачі необхідно використовувати разом з локальними і нелокальні умови. А.Х. Мамян встановив [8], що існують рівняння з частинними похідними, для яких неможливо сформулювати жодної коректної локальної задачі; в той же час коректні задачі існують, якщо застосувати нелокальні умови.

У цій роботі встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для диференціально-операторних рівнянь другого порядку з гармонійним осцилятором і функціями від такого оператора у випадку, коли функція, за допомогою якої задається багатоточкова задача, належить до простору типу S або є узагальненою функцією типу ультрарозподілів і ототожнюється з певним формальним рядом Фур'є-Ерміта (нелокальна багатоточкова задача для диференціально-операторних рівнянь першого порядку досліджена в [9]). Знайдено представлення розв'язку вказаної задачі у вигляді згортки фундаментального розв'язку з граничною функцією.

1.Простори основних і узагальнених елементів.

Нехай A – невід'ємний самоспряжений оператор з дискретним спектром у сепарабельному гільбертовому просторі H зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, $\{e_k, k\geq 1\}$ – ортонормований базис з його власних векторів, $\{\lambda_k, k\geq 1\}$ – послідовність відповідних власних чисел, розміщених у порядку зростання; при цьому кожне власне число береться стільки разів, якою є його кратність, і $\sum\limits_{k:\lambda_k\neq 0}\lambda_k^{-p}<\infty$ при деякому $p>0$.

Позначимо

$$\Phi_m=\Big\{\varphi\in H\,\Big|\,\varphi=\sum_{k=1}^{m}c_{k,\varphi}e_k,\ c_{k,\varphi}\in\mathbb{C}\Big\},$$

$$\Phi=\lim_{m\to\infty}\operatorname{ind}\Phi_m$$

(очевидно, що Φ лежить щільно в H і інваріантно відносно A), а через Φ' – простір усіх антилінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Зіставлення

$$H\ni\varphi\longrightarrow f_\varphi\in\Phi':\ \ \langle f_\varphi,\psi\rangle=(\varphi,\psi),\forall\psi\in\Phi,$$

визначає вкладення $H\subset\Phi'$ ($\langle f,\psi\rangle$ позначає дію функціоналу f на элемент ψ). Елементи з Φ' називаються узагальненими.

Нехай s – простір усіх числових послідовностей $\{s_k, k\geq 1\}$ ($s_k\in\mathbb{C}$) з покоординатною збіжністю. Ізоморфізм J: $f\to\{c_k(f)=\langle f,e_k\rangle, k\geq 1\}\in s$ із Φ' на s відображає Φ на множину фінітних послідовностей із s, а H – на l_2. При цьому оператору A відповідає операція $\{c_k(f), k\geq 1\}\to\{\lambda_k c_k(f), k\geq 1\}$ і його можна розширити на Φ' до неперервного оператора $\hat{A}$: $\hat{A}f=J^{-1}\{\lambda_k c_k(f), k\geq 1\}$.

Нехай $f\in\Phi'$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k e_k$, де $c_k=\langle f,e_k\rangle$, називається рядом Фур'є елемента $f\in\Phi'$, а числа c_k – його коефіцієнтами Фур'є. Для довільного елемента $f\in\Phi'$ його ряд Фур'є збігається в Φ' до f. Навпаки, довільний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k e_k$ збігається в Φ' до деякого елемента $f\in\Phi'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [10]. Отже, Φ' можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k e_k$.

Введемо тепер деякі класи елементів, які породжені оператором A. Позначимо

$$H_\infty(A):=\lim_{\alpha\to\infty}\operatorname{pr}H_\alpha(A),\quad H_\alpha(A)=\mathcal{D}(A^\alpha),$$

$$G_{\beta,B}(A):=\{\varphi\in H_\infty(A)|$$
$$\exists c>0\ \exists B>0\ \forall n\in\mathbb{N}:\ \|A^n\varphi\|\leq cB^n n^{n\beta}\},$$

де $\beta>0$ – фіксований параметр. Простір $G_{\beta,B}(A)$ є банаховим відносно норми $\|\varphi\|_{\beta,B}=\sup\limits_n(\|A^n\varphi\|/(B^n n^{n\beta}))$. Простір $G_{\{\beta\}}(A):=\lim\limits_{B\to\infty}\operatorname{ind}G_{\beta,B}(A)$ називається простором Жевре порядку β. Якщо через $H'_\infty(A)$, $G'_{\{\beta\}}(A)$ позначити простори, топологічно спряжені з просторами $H_\infty(A)$, $G_{\{\beta\}}(A)$ відповідно, то, згідно [10], прийдемо до ланцюжка щільних і неперервних вкладень $\Phi \subset G_{\{\beta\}}(A) \subset H_\infty(A) \subset H \subset H'_\infty(A) \subset G'_{\{\beta\}}(A) \subset \Phi', \beta > 1$.

Символом $H_{\alpha,\beta}$ позначимо сукупність тих елементів $f \in \Phi'$, для яких при деякому $\alpha > 0$

$$\|f\|^2_{H_{\alpha,\beta}} := \sum_{k=1}^{\infty} \exp(2\alpha\lambda_k^{1/\beta})|c_k|^2 < \infty,$$

$c_k = \langle f, e_k \rangle$, $k \in \mathbb{N}$, і покладемо $H_{\{\beta\}} = \lim\limits_{\alpha\to+0} \operatorname{ind} H_{\alpha,\beta}$. Відповідно, $H'_{\{\beta\}} = \lim\limits_{\alpha\to+0} \operatorname{pr} H'_{\alpha,\beta}$. Як доведено в [10], $G_{\{\beta\}}(A) = H_{\{\beta\}}$.

Простори $G_{\{\beta\}}(A)$, $G'_{\{\beta\}}(A)$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їх елементів описуються так [10]:

$$(f \in G_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0\, \exists c > 0\, \forall k \in \mathbb{N}:$$

$$|c_k(f)| \le c \exp(-\mu\lambda_k^{1/\beta}));$$

$$(f \in G'_{\{\beta\}}(A)) \Leftrightarrow (\forall \mu > 0\, \exists c = c(\mu) > 0$$

$$\forall k \in \mathbb{N}: \ |c_k(f)| \le c \exp(\mu\lambda_k^{1/\beta})).$$

Нехай $\{f_1, f_2\} \subset \Phi'$, $f_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(f_1)e_k$, $f_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k(f_2)e_k$. У просторі Φ' визначимо операцію "$*$", яку називатимемо "абстрактною згорткою" (або просто згорткою) і задамо формулою

$$f_1 * f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1)c_k(f_2)e_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1 * f_2)e_k,$$

тобто $c_k(f_1 * f_2) = c_k(f_1)c_k(f_2)$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

2.Функції Ерміта. Формальні ряди Фур'є-Ерміта.

Функція $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ваговою, якщо вона невід'ємна і така, що абсолютно збігаються інтеграли $\alpha_n = \int\limits_{\mathbb{R}} x^n F(x)dx$, $n \in \mathbb{Z}_+$, які називаються степеневими моментами функції F. Наприклад, за F, зокрема, можна взяти функцію $\exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Користуючись методом математичної індукції можна довести (див. [11]), що $(e^{-x^2})^{(n)} = e^{-x^2} \sum\limits_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}, n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}$. Отже, функція $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, є многочленом степеня n. Цей многочлен називається стандартизованим многочленом Ерміта, а відповідна формула – формулою Родріга. Многочлени H_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, ортогональні на $\mathbb{R}$ з ваговою функцією F; при цьому

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n(x)dx = \sqrt{\pi}2^n n!, n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, ортонормовані многочлени Ерміта $\hat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, мають вигляд

$$\hat{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{\pi}2^n n!}} e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)},$$

$n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}$.

Многочлени $\hat{H}_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, побудовані за ваговою функцією $F(x) = \exp(-x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, утворюють ортонормований базис у просторі $L_2(\mathbb{R}, \exp(-x^2))$. У просторі ж $L_2(\mathbb{R})$ ортонормований базис утворюють функції Ерміта $h_n(x) = e^{-x^2/2}\hat{H}_n(x) = (-1)^n \pi^{-1/4}(2^n n!)^{-1/2} \cdot e^{x^2/2}(e^{-x^2})^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}$.

У просторі $H = L_2(\mathbb{R})$ розглянемо гармонійний осцилятор – невід'ємний самоспряжений оператор A, який є замиканням оператора $-d^2/dx^2 + x^2$, заданого на множині фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій. Спектр цього оператора дискретний, його власні числа $\lambda_k = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, власні функції – функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$ [2, с. 145]. Простір Φ у даному випадку складається з функцій φ вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} c_{k,\varphi} h_k(x), c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$, де $c_k = \langle f, h_k \rangle$, називається рядом Фур'є-Ерміта функціоналу $f \in \Phi'$, а числа c_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, – його коефіцієнтами Фур'є (надалі елементи простору Φ' називатимемо узагальненими функціями). Простір Φ' у даному конкретному випадку можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k$.

3.Простори типу S і S'.

Для фіксованих α, $\beta > 0$ покладемо $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \,\Big|\, \exists c > 0\, \exists A > 0$ $\exists B > 0\ \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \forall x \in \mathbb{R}:$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le cA^k B^n k^{k\alpha} n^{n\beta}\Big\}.$$

Введені простори можна охарактеризувати ще й так [12].

S_α^β складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le cB^n n^{n\beta} \exp(-a|x|^{1/\alpha}), n \in \mathbb{Z}_+,$$

$x \in \mathbb{R}$, з деякими додатними сталими c, a і b, залежними тільки від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \ge 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій φ, які допускають аналітичне продовження в $\mathbb{C}$ і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x + iy)| \le c \exp(-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}),$$

$c, a, b > 0$.

Простори S_α^β нетривіальні при $\alpha + \beta \ge 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини. При $\beta > 1$ простори S_α^β містять фінітні функції.

Топологічна структура в просторах S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову: $\forall \delta > 0\ \forall \rho > 0\ \exists c_{\delta\rho} > 0 : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_{\delta\rho}(A + \delta)^k (B + \rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta}$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}$. Ця множина перетворюється в повний зліченно-нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta}},$$

$\{\delta, \rho\} \subset \Big\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\Big\}$.

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$.

Якщо P – деякий фіксований многочлен, то в просторі S_α^β визначена і неперервна операція множення на P. Звідси, зокрема, випливає, що функції Ерміта h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, належать до простору $S_{1/2}^{1/2}$. Справді, $|\exp(-z^2/2)| = \exp(-x^2/2 + y^2/2)$, якщо $z = x + iy$ і $1/\alpha = 1/(1 - \beta) = 2$, тобто $\alpha = \beta = 1/2$, а кожна функція Ерміта має вигляд $P(x)\exp(-x^2/2)$, де P – многочлен Ерміта.

У просторі S_α^β визначені і є неперервними операція зсуву аргументу і диференціювання, які переводять S_α^β у себе. Простори типу S є досконалими [12] тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні. Простір всіх лінійних неперервних функціоналів на S_α^β зі слабкою збіжністю позначають символом $(S_\alpha^\beta)'$. Елементи із $(S_\alpha^\beta)'$ називаються ультрарозподілами Жевре порядку β.

У [12, с. 145–147] доведено, що $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A)$ при $\beta \ge 1$, де A – гармонійний осцилятор. Тоді, як випливає із загальної теорії невід'ємних самоспряжених операторів у гільбертовому просторі з дискретним спектром (див. п. 1), простори S_β^β, $(S_\beta^\beta)'$, $\beta \ge 1/2$, можна охарактеризувати так.

Якщо $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in \Phi'$, $c_k = \langle f, e_k\rangle$, то правильними є такі співвідношення еквівалентності:

а) $(f \in S_\beta^\beta) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0\, \exists c > 0\, \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$ $|c_k| \le c \exp(-\mu(2k + 1)^{1/(2\beta)}));$ (А)

б) $(f \in (S_\beta^\beta)') \Leftrightarrow (\forall \mu > 0\ \exists c = c(\mu) > 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+ :\ |c_k| \le c \exp(\mu(2k + 1)^{1/(2\beta)}))$. (Б)

4. Функції від гармонійного осцилятора.

Нехай B – невід'ємний самоспряжений оператор в сепарабельному гільбертовому просторі H з щільною у H областю визначення $\mathcal{D}(B)$, $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ – деяка неперервна функція, яка строго монотонно зростає на $[0, +\infty)$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = +\infty$. За функцією f і оператором B на множині

$$\mathcal{D}(f(B)) = \Big\{\varphi \in H \,\Big|\, \int_0^\infty f^2(\lambda) d(E_\lambda f, f) < \infty\Big\},$$

де E_λ, $\lambda \in [0, +\infty)$, – спектральна функція оператора B, будуємо оператор $f(B)$:

$$f(B)\varphi = \int_0^\infty f(\lambda) dE_\lambda \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(f(B)), \quad (2)$$

який також невід'ємний і самоспряжений в

H, при цьому $\overline{\mathcal{D}(f(B))} = H$ [12]. Інтеграл (2) береться, фактично, лише по спектру $\sigma(B)$ оператора B, тобто

$$f(B)\varphi = \int\limits_{\sigma(B)} f(\lambda) dE_\lambda \varphi, \varphi \in \mathcal{D}(f(B)).$$

Якщо $B = A$ – гармонійний осцилятор, то $\sigma(A) = \{\lambda_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $\lambda_k = 2k+1$. Спектральна функція E_λ, $\lambda \in [0, +\infty)$, оператора A є кусково-сталою і має розриви у точках λ_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, причому $E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k}$ – оператор проектування на власний підпростір оператора A, який відповідає власному значенню λ_k. Цей підпростір є одновимірним, відповідна функція Ерміта h_k утворює його базис. Отже,

$$(E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k})\varphi = (\varphi, h_k)_{L_2(\mathbb{R})} \cdot h_k = c_k(\varphi) h_k;$$

спектральна функція E_λ, $\lambda \in [0, +\infty)$, у цьому випадку має вигляд

$$(E_\lambda \varphi)(x) = \sum_{\lambda_k < \lambda} c_k(\varphi) h_k(x),$$

а інтеграл (2) є таким:

$$(f(A)\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)(E_{\lambda_k+0} - E_{\lambda_k})\varphi(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(\varphi) h_k(x), \varphi \in \mathcal{D}(f(A)),$$

при цьому $\mathcal{D}(f(A)) = \Big\{\varphi \in L_2(\mathbb{R}) \Big| \sum_{k=0}^{\infty} f^2(\lambda_k)|c_k(\varphi)|^2 < \infty, \lambda_k = 2k+1\Big\}$, $f(\lambda_k)$ – власні числа оператора $f(A)$. Оператор $f(A)$ продовжимо на Φ' до неперервного оператора $\hat{f}(A)$: $\hat{f}(A)\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(\varphi) h_k$,

$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi) h_k \in \Phi'$.

Розглянемо узагальнену функцію G_f із простору Φ', побудовану за функцією f: $G_f = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) h_k$. Тоді $\hat{f}(A)$ – оператор згортки, який діє у просторі Φ':

$$\hat{f}(A)\varphi = G_f * \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(\varphi) h_k.$$

Символом A_f будемо позначати звуження оператора $\hat{f}(A)$ на простір $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A)$, $\beta \geq 1$; при цьому

$$\Phi \subset S_{\beta/2}^{\beta/2} \subset L_2(\mathbb{R}) \subset (S_{\beta/2}^{\beta/2})' \subset \Phi', \beta \geq 1.$$

Лема 1. *Нехай $G_f \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, тоді оператор A_f є неперервним у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$.*

Доведення. Передусім доведемо, що $G_f * \varphi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ для довільної функції $\varphi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$. Справді, оскільки $G_f \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, то із умови (Б) випливає, що

$$\forall \mu_1 > 0 \ \exists c_1 = c_1(\mu_1) > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$|c_k(G_f)| = f(\lambda_k) \leq c_1 \exp(\mu_1 \lambda_k^{1/\beta}), \qquad (3)$$

де $\lambda_k = 2k+1$. Крім того, $\varphi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$, тому, з урахуванням умови (А), $\exists \mu_2 > 0 \ \exists c_2 > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ |c_k(\varphi)| \leq c \exp(-\mu_2 \lambda_k^{1/\beta})$. Тоді

$$|c_k(G_f * \varphi)| = |c_k(G_f)| \cdot |c_k(\varphi)| \leq$$

$$\leq c_1 c_2 \exp(-(\mu_2 - \mu_1)\lambda_k^{1/\beta}).$$

Візьмемо $\mu_1 = \mu_2/2$, тоді

$$|c_k(G_f * \varphi)| \leq \tilde{c} \exp(-\tilde{\mu} \lambda_k^{1/\beta}), \tilde{c} = c_1 c_2,$$

$\tilde{\mu} = \mu_2/2$, звідки й випливає, що $G_f * \varphi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$. Отже, оператор A_f відображає простір $S_{\beta/2}^{\beta/2}$ в себе. Доведемо, що A_f – неперервний оператор у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$, тобто довільну обмежену множину цього простору він відображає в обмежену множину цього ж простору (відзначимо, що в просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$, $\beta \geq 1$, клас неперервних операторів співпадає з класом обмежених операторів [12]).

Нехай L – обмежена множина у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A) = \bigcup_{\alpha > 0} H_{\alpha,\beta}$. Тоді L – обмежена множина у гільбертовому просторі $H_{\alpha,\beta}$ при деякому $\alpha > 0$, тобто $\exists b > 0 \ \forall \psi \in L :$

$$\|\psi\|^2_{H_{\alpha,\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) |c_k(\psi)|^2 \leq b^2,$$

$\lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+$, або

$$\forall \psi \in L : \ |c_k(\psi)| \leq b \exp(-\alpha \lambda_k^{1/\beta}), k \in \mathbb{Z}_+.$$

У нерівності (3) покладемо $\mu_1 = \alpha/2$. Тоді

$$|c_k(A_f\psi)| = |c_k(G_f)| \cdot |c_k(\psi)| \le$$

$$\le c_1 b \exp(-(\alpha - \mu_1)\lambda_k^{1/\beta}) = b_2 \exp(-\alpha_1 \lambda_k^{1/\beta}),$$

$\alpha_1 = \alpha/2, b_2 = c_1 b$, і

$$|c_k(A_f\psi)| \exp\left(\frac{\alpha_1}{2}\lambda_k^{1/\beta}\right) \le b_2 \exp\Big(-\frac{\alpha_1}{2}\lambda_k^{1/\beta}\Big),$$

$k \in \mathbb{Z}_+$. Звідси випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k(A_f\psi)| \exp\left(\frac{\alpha_1}{2}\lambda_k^{1/\beta}\right)$. Таким чином, множина $A_f L$ обмежена у просторі $H_{\alpha_1/2,\beta} = H_{\alpha/4,\beta}$, тобто у просторі $S_{\beta/2}^{\beta/2}$. Твердження доведено.

Надалі вважатимемо, що функція f задовольняє умову:

$\exists d_0, d_1, d_2 > 0, d_1 \ge d_0, \forall \lambda \in [0,\infty)$:

$$d_0 \lambda^{2/\beta} \le f(\lambda) \le d_1 \lambda^{2/\beta} + d_2. \qquad (4)$$

5.Нелокальна багатоточкова за часом задача.

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{dt^2} - A_f u(t,x) = 0, \qquad (5)$$

де $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega$, A_f – оператор, побудований в п. 4 за функцією f.

Під розв'язком рівняння (5) розумітимемо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка задовольняє умови: 1) $u(t,\cdot) \in C^2((0,\infty), S_{\beta/2}^{\beta/2})$ і задовольняє рівняння (5); 2) для довільного фіксованого проміжку $[\delta,+\infty) \subset (0,+\infty)$ існує стала $c = c(\delta) > 0$ така, що

$$\sup_{t\in[\delta,+\infty)} \|u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le c.$$

Теорема 1. *Функція u є розв'язком рівняння (5) тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) c_k h_k(x),$$

$$(t,x) \in \Omega, \lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+, \qquad (6)$$

де $\psi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, $\beta \ge 1$.

Доведення. Нехай u задається формулою (6). Доведемо, що $u(t,\cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ при кожному $t > 0$. Оскільки $\psi \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, то

$$\forall \mu > 0\, \exists c = c(\mu) > 0 : |c_k| \le c \exp(\mu \lambda_k^{1/\beta}), \qquad (7)$$

$k \in \mathbb{Z}_+$. Враховуючи (4), (7), а також співвідношення $c_k(u(t,x)) = c_k \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)})$ знайдемо, що

$$|c_k(u(t,x))| \le c \exp(\mu\lambda_k^{1/\beta}) \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \le$$

$$\le c \exp(\mu\lambda_k^{1/\beta}) \exp(-\sqrt{d_0} t \lambda_k^{1/\beta}) =$$

$$= c \exp(-(\sqrt{d_0} t - \mu)\lambda_k^{1/\beta}).$$

Візьмемо $\mu = \sqrt{d_0} t/2$. Тоді

$$|c_k(u(t,x))| \le c \exp(-\mu \lambda_k^{1/\beta}), \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

звідси випливає, що $u(t,\cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ при кожному $t > 0$.

Функція $u(t,x)$ диференційовна за $t \in (0,\infty)$ (для довільного $x \in \mathbb{R}$). Справді, нехай $t \in [\varepsilon, +\infty)$, де $\varepsilon > 0$. Доведемо, що ряд

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{f(\lambda_k)} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) c_k h_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(t,x,\lambda_k) \qquad (8)$$

збігається рівномірно по t, тоді

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma(t,x,\lambda_k).$$

Враховуючи нерівності (4), (7), а також те, що $|h_k(x)| \le 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$ [11], для $t \ge \varepsilon$ і довільного, фіксованого $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$|\gamma(t,x,\lambda_k)| \le c\sqrt{\tilde{d}} \lambda_k^{1/\beta} \exp(-\varepsilon\sqrt{d_0}\lambda_k^{1/\beta})\cdot$$

$$\cdot \exp(\mu\lambda_k^{1\beta}) \le c\sqrt{\tilde{d}} \cdot \frac{2}{\varepsilon} \exp\Big(-\Big(\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{d_0} - \mu\Big)\lambda_k^{1\beta}\Big),$$

$$\tilde{d} = \max\{d_1, d_2\}. \qquad (9)$$

Нехай $\mu = \varepsilon\sqrt{d_0}/4$. Тоді $|\gamma(t,x,\lambda_k)| \le \tilde{c}\sqrt{\tilde{d}} \exp(-\mu\lambda_k^{1/\beta})$. Звідси отримуємо, що ряд

(8) збігається рівномірно по $t \in [\varepsilon, +\infty)$. Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то функція $u(t,x)$ диференційовна за t на проміжку $(0, +\infty)$, а співвідношення (9) має місце для кожного $t \in (0, +\infty)$. Аналогічно можна довести, що функція $u_t(t,x)$ диференційовна за $t \in (0, \infty)$. Отже, $u(t, \cdot) \in C^2((0, \infty), S_{\beta/2}^{\beta/2})$.

Функція u задовольняє рівняння (5). Справді,

$$A_f u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(u(t,x)) h_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) c_k h_k(x).$$

З іншого боку, при доведенні диференційовності функції $u(t,x)$ встановлено, що

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) c_k h_k(x).$$

Таким чином, $u(t,x)$ – розв'язок рівняння (5).

Перевіримо виконання умови 2). Маємо, що

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(u(t,x))|^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}).$$

Враховуючи умову (4) і нерівності (7) знайдемо, що для $t \geq \delta > 0$

$$|c_k| \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \leq c \exp(\mu \lambda_k^{1/\beta}) \cdot$$

$$\cdot \exp(-t\sqrt{d_0}\lambda_k^{1/\beta}) \leq c \exp(-(\delta\sqrt{d_0} - \mu)\lambda_k^{1/\beta}),$$

$\lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+$.

Візьмемо $\mu = \delta\sqrt{d_0}/2$. Тоді для $t \geq \delta$ виконується нерівність $|c_k| \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \leq$ $\leq c \exp(-\mu\lambda_k^{1/\beta})$. Звідси отримуємо, що

$$\sup_{t \in [\delta, +\infty)} \|u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq c^2 \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-2\mu\lambda_k^{1/\beta}) = \tilde{c}(\delta).$$

Отже, умова 2) виконується.

Навпаки, нехай u – розв'язок рівняння (5). Тоді $u(t,\cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2} \subset L_2(\mathbb{R})$ при кожному $t > 0$, при цьому $u(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(t) h_k(x)$, $c_k(t) = (u(t,x), h_k)_{L_2(\mathbb{R})}, k \in \mathbb{Z}_+$, причому

$$\|u(t,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(t)|^2, \quad t > 0. \qquad (10)$$

Помножимо (5) скалярно на h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$; тоді

$$\left(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}, h_k\right) = (A_f u(t,x), h_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

При фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+$ маємо:

$$(A_f u(t,x), h_k) = (u(t,x), A_f h_k) =$$

$$= (u(t,\cdot), f(\lambda_k) h_k) = f(\lambda_k)(u(t,\cdot), h_k) =$$

$$= f(\lambda_k) c_k(t).$$

Оскільки

$$\left(\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}, h_k\right) = \frac{d^2}{dt^2}(u(t,\cdot), h_k) = c_k''(t),$$

$k \in \mathbb{Z}_+$, то функція $c_k(t)$ (при фіксованому $k \in \mathbb{Z}_+$) задовольняє умову

$$c_k''(t) - f(\lambda_k) c_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+, t \in (0, +\infty),$$

загальний розв'язок якого задається формулою

$$c_k(t) = c_k^{(1)} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) + c_k^{(2)} \exp(t\sqrt{f(\lambda_k)}),$$

$k \in \mathbb{Z}_+$, де $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$ – довільні сталі. Із (10), вигляду коефіцієнтів $c_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, і умови 2), яку задовольняє функція $u(t,\cdot)$, випливає, що $c_k^{(2)} = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, тобто $c_k(t) = c_k^{(1)} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)})$. Отже, якщо $u(t,\cdot)$ – розв'язок рівняння (5), то $u(t,\cdot)$ має вигляд

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) h_k(x).$$

Доведемо тепер, що

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'.$$

Для цього скористаємося тим, що $\|u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq c$, $c = c(t) > 0$, для кожного $t > 0$. Звідси випливає нерівність

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k^{(1)}|^2 \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}) \leq c^2,$$

тобто $|c_k^{(1)}| \leq c\exp(t\sqrt{f(\lambda_k)})$. Із умови (4), яку задовольняє функція f випливає, що для кожного $t > 0$ існує стала $c = c(t) > 0$ така, що $|c_k^{(1)}| \leq c\exp(t\sqrt{\tilde{d}}\lambda_k^{1/\beta})$, $\tilde{d} = \max\{d_1, d_2\}, \lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+$, звідси випливає, що $\psi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$. Теорема доведена.

Зауваження 1. *Введемо позначення*

$$G(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) h_k(x).$$

Із властивостей функції f випливає, що $G(t,\cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ для кожного $t > 0$. Крім того, $u(t,x) = G(t,x) * \psi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$, $\forall \psi \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$. Отже, оператор згортки $G(t,x) * \cdot$ переводить кожний елемент простору $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$ (зокрема, кожний елемент простору $S_{\beta/2}^{\beta/2} \subset (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$) у розв'язок рівняння (5).

Поставимо задачу: у множині розв'язків рівняння (5) вигляду (6) знайти розв'язок, який задовольняє умову

$$\mu u(0,\cdot) - \sum_{n=1}^{m} \mu_n u(t_n,\cdot) = g, \qquad (11)$$

де $g \in H = L_2(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, \infty)$ – фіксовані числа, $\mu > \sum\limits_{n=1}^{m} \mu_n$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$; при цьому $u(0,\cdot)$ розуміємо як $\lim\limits_{t\to+0} u(t,\cdot)$, де границя розглядається в $L_2(\mathbb{R})$. Таку задачу називатимемо нелокальною багатоточковою за часом задачею для рівняння (5). Із теореми 1 і зауваження 1 випливає, що задачу (5), (11) можна поставити ще і так: у класі $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$ знайти елемент ψ, який утворює згортку з функцією $G(t,x)$ і є розв'язком рівняння (5), який задовольняє умову (11). Для розв'язності цієї задачі необхідно знайти коефіцієнти Фур'є $c_k = c_k(\psi)$ такого елемента. Для цього помножим (11) скалярно на h_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, враховуючи при цьому, що

$$c_k(u(t,\cdot)) = c_k(G(t,\cdot))c_k(\psi),$$

$$c_k(G(t,\cdot)) = \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}).$$

У результаті прийдемо до співвідношень

$$\mu c_k(G(0,\cdot))c_k(\psi) - \sum_{n=1}^{m} \mu_n c_k(G(t_n,\cdot))c_k(\psi) =$$

$$= c_k(g), \quad c_k(G(0,\cdot)) = 1.$$

Отже,

$$c_k(\psi) = c_k(g)\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \exp(-t_n\sqrt{f(\lambda_k)})\Big)^{-1}.$$

Введемо позначення:

$$Q_1(t,\lambda_k) = \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}).$$

Тоді

$$c_k(\psi) = c_k(g) \cdot \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)\Big)^{-1}.$$

Відмітимо, що $\Big(\mu - \sum\limits_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)\Big)^{-1} \leq$

$$\leq \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n\Big)^{-1} \equiv \mu_0.$$

Тоді $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k(\psi)|^2 \leq \mu_0^2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k(g)|^2 = \mu_0^2 \|g\|_H^2$, $g \in H$, тобто елемент ψ, за допомогою якого будується розв'язок задачі (5), (11), належить до $L_2(\mathbb{R})$. При цьому розв'язок задається формулою $u(t,x) = G(t,x) * \psi$,

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} Q_2(\lambda_k) c_k(g) h_k,$$

$$Q_2(\lambda_k) := \Big(\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)\Big)^{-1},$$

або

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) h_k(x) =$$

$$= G_1(t,x) * g, \quad g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) h_k \in H,$$

де

$$G_1(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k,$$

$G_1(t,\cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$, для всіх $t \in (0,+\infty)$.

Теорема 2. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (5), (11) є коректно розв'язною, розв'язок задається формулою*

$$u(t,x) = G_1(t,x) * g(x), \quad (t,x) \in \Omega,$$

при цьому $\{G_1(t,\cdot), u(t,\cdot)\} \subset S_{\beta/2}^{\beta/2}$ *для всіх* $t > 0$.

Доведення. Те, що функція $u(t,x)$ є розв'язком задачі (5), (11), доведено раніше. Єдиність розв'язку цієї задачі випливає з таких міркувань. Якщо $g = 0$, то $c_k(g) = (g, h_k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+$; тоді $u(t,x) = 0$ для кожного $t \in (0,+\infty)$, що і доводить єдиність розв'язку задачі (5), (11).

Доведемо тепер, що розв'язок задачі (5), (11) неперервно залежить від функції, за допомогою якої задається умова (11). Нехай $\{g, g_n, n \geq 1\} \subset L_2(\mathbb{R})$, причому $g_n \to g$ при $n \to \infty$ у просторі $L_2(\mathbb{R})$, тобто $\|g_n - g\| \to 0$ при $n \to \infty$. Це рівносильно тому, що $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k(g_n - g)|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Нехай u_n – розв'язок задачі (5), (11), який відповідає функції g_n, за допомогою якої задається умова (11). Тоді

$$\|u_n - u\|^2 = \|G_1(t,\cdot) * (g_n - g)\|^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(G_1(t,\cdot))|^2 \cdot |c_k(g_n - g)|^2.$$

Із доведеного раніше випливає, що $|c_k(G_1)| \leq \tilde{c}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, де $\tilde{c} = \Big(\mu - \sum\limits_{p=1}^{m} \mu_p\Big)^{-1} > 0$. Отже,

$$\|u_n - u\|^2 \leq \tilde{c}^2 \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(g_n - g)|^2 \to 0, n \to \infty,$$

що і потрібно було довести. Теорему доведено.

Згортка $G_1(t,\cdot) * g$ має зміст і в тому випадку, коли $g \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})' = G'_{\{\beta\}}(A)$, при цьому $u(t,\cdot) = G_1(t,\cdot) * g \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ при кожному $t \in (0,\infty)$. Доведемо, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (5), але умову (11), де $g \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})'$, $u(t,x)$ задовольняє у тому розумінні, що

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = g,$$

$$g \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})', \tag{12}$$

границі розглядаються у просторі $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$.

Перед доведенням деяких допоміжних тверджень, дамо означення абстрактної функції. Нехай X – топологічний простір, K – деяка множина чисел. Функцію $K \ni t \to \varphi_\nu \in X$ називають абстрактною функцією параметра ν зі значеннями в просторі X. Про властивості абстрактних функцій див. [12, 94–97]. Зокрема, абстрактна функція називається диференційовною у точці $\nu_0 \in K$, якщо у просторі X існує границя

$$\frac{d\varphi_\nu}{d\nu}\Big|_{\nu=\nu_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{\nu_0+h} - \varphi_{\nu_0}}{h}.$$

Лема 2. *Функція* $G_1(t,\cdot)$, $t \in (0,\infty)$, *як абстрактна функція параметра* t *зі значеннями в просторі* $S_{\beta/2}^{\beta/2}$, *диференційовна за* t.

Доведення. Виберемо довільне $t \in (0,\infty))$. Оскільки $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{\{\beta\}}(A) = = H_{\{\beta\}} = \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{\alpha,\beta}$, де A – гармонійний осцилятор, то для доведення твердження досить довести, що

$$\Phi_{\Delta t}(x) := \frac{1}{\Delta t}[G_1(t+\Delta t, x) - G_1(t,x)] \longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} G_1(t,x), \quad \Delta t \to 0,$$

у просторі $H_{\{\beta\}}$ (якщо $\Delta t < 0$, то вважаємо Δt таким, що $t + \Delta t \geq t/2$). Це означає, що: 1) множина функцій $\{\Phi_{\Delta t} : \ |\Delta t| \leq \varepsilon_0, \Delta t \neq$

$0\}$ ($\varepsilon_0 > 0$ – довільно фіксоване мале число) є обмеженою у просторі $H_{\{\beta\}}$, тобто $\exists c > 0$

$$\forall \Delta t \ \ (|\Delta t| \le \varepsilon_0, \Delta t \ne 0) : \|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\alpha,\beta}} \le c$$

для деякого $\alpha > 0$;

2) $\Phi_{\Delta t} \to \frac{\partial}{\partial t} G_1(t, \cdot)$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $H_{\{\beta\}}$, тобто

$$\left\| \Phi_{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial t} G_1(t, \cdot) \right\|^2_{H_{\alpha,\beta}} \to 0, \quad \Delta t \to 0.$$

Передусім відзначимо, що функція $G_1(t, \cdot)$ диференційовна за змінною $t \in (0, \infty)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Доведення цієї властивості аналогічне доведенню диференційовності функції, яка задається формулою (6); при цьому $\frac{\partial G_1(t,x)}{\partial t} = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sqrt{f(\lambda_k)} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x)$.

Оскільки

$$\Phi_{\Delta t}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta t} [Q_1(t + \Delta t, \lambda_k) - Q_1(t, \lambda_k)] \cdot$$

$$\cdot Q_2(\lambda_k) h_k(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{f(\lambda_k)} Q_1(t + \theta \Delta t, \lambda_k) \cdot$$

$$\cdot Q_2(\lambda_k) h_k(x), \quad 0 < \theta < 1,$$

то

$$c_k(\Phi_{\Delta t}) = -\sqrt{f(\lambda_k)} Q_1(t + \theta \Delta t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k)$$

(якщо $\Delta t < 0$, то внаслідок домовленостей відносно Δt маємо, що $t + \theta \Delta t > t + \Delta t \ge t/2$). Тоді для довільно фіксованого $\alpha < t\sqrt{d_0}/2$ (d_0 – стала із нерівності (4)) виконуються співвідношення

$$\|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\alpha,\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) |c_k(\Phi_{\Delta t})|^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) \exp(-2(t + \theta \Delta t) \cdot$$

$$\cdot \sqrt{f(\lambda_k)}) Q_2^2(\lambda_k) \le (\mu - \tilde{\mu}_0)^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) \cdot$$

$$\cdot \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}), \tilde{\mu}_0 = \sum_{p=1}^{m} \mu_p.$$

Оскільки

$$f(\lambda_k) \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}) \le \frac{2}{t^2} \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \le$$

$$\le \frac{2}{t^2} \exp(-t\sqrt{d_0} \lambda_k^{1/\beta}), k \in \mathbb{Z}_+,$$

то

$$\|\Phi_{\Delta t}\|^2_{H_{\alpha,\beta}} \le \frac{2}{t^2} (\mu - \tilde{\mu}_0)^{-2} \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-(t\sqrt{d_0} - 2\alpha) \lambda_k^{1/\beta}) < \infty,$$

$\lambda_k = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}_+$. Отже, множина функцій $\{\Phi_{\Delta t} : |\Delta t| \le \varepsilon_0, \Delta t \ne 0\}$ обмежена у просторі $H_{\{\beta\}}$.

Перевіримо виконання умови 2). Нехай $\Psi_{\Delta t}(x) := \Phi_{\Delta t} - \frac{\partial}{\partial t} G_1(t, x)$. Тоді

$$\Psi_{\Delta t}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [Q_1(t, \lambda_k) - Q_1(t + \theta \Delta t, \lambda_k)] \cdot$$

$$\cdot Q_2(\lambda_k) \sqrt{f(\lambda_k)} h_k(x).$$

Звідси випливає, що

$$\|\Psi_{\Delta t}\|^2_{H_{\alpha,\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) |c_k(\Psi_{\Delta t})|^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) |\exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) -$$

$$- \exp(-(t + \theta \Delta t)\sqrt{f(\lambda_k)})|^2 Q_2^2(\lambda_k) f(\lambda_k) \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) \exp(-2(t + \theta_1 \Delta t)\sqrt{f(\lambda_k)}) \cdot$$

$$\cdot f^3(\lambda_k) \theta^2 Q_2^2(\lambda_k) (\Delta t)^2 \le$$

$$\le (\mu - \mu_0)^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \exp(2\alpha \lambda_k^{1/\beta}) \cdot$$

$$\cdot \exp(-2t\sqrt{f(\lambda_k)}) f^3(\lambda_k) (\Delta t)^2, 0 < \theta_1 < 1.$$

Оскільки $f^3(\lambda_k) \exp(-t\sqrt{f(\lambda_k)}) \le 3!/t^3$ та $\alpha < t\sqrt{d_0}/2$, то $\|\Psi_{\Delta t}\|^2_{H_{\alpha,\beta}} \le 3!(\mu - \mu_0)^{-2} t^{-3}$.

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-(t\sqrt{d_0} - 2\alpha) \lambda_k^{1/\beta}) (\Delta t)^2.$$

Отже, $\|\Psi_{\Delta t}\|_{H_{\alpha,\beta}} \to 0$ при $\Delta t \to 0$ для довільно-фіксованого $\alpha \in (0, t\sqrt{d_0}/2)$, тобто $\Phi_{\Delta t} \to \frac{\partial}{\partial t} G_1(t, \cdot)$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $H_{\{\beta\}} = S^{\beta/2}_{\beta/2}$. Лема доведена.

Аналогічно доводиться диференційовність функції $\frac{\partial}{\partial t}G_1(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра $t \in (0,\infty)$ зі значеннями у просторі $S^{\beta/2}_{\beta/2}$.

Лема 3. *Для функції*

$$u(t,x) = G_1(t,x) * g =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k h_k(x), (t,x) \in \Omega, \tag{13}$$
$$g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in (S^{\beta/2}_{\beta/2})', c_k = \langle g, h_k\rangle, k \in \mathbb{Z}_+,$$

правильною є формула $u(t,x) = \langle g, G_{t,x}(\cdot)\rangle$, *де*

$$G_{t,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)h_k(x)h_k(y).$$

Доведення. Нехай

$$S_{n,t,x}(y) := \sum_{k=0}^{n} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)h_k(x)h_k(y).$$

Твердження леми випливає з того, що послідовність частинних сум $S_{n,t,x}$ збігається до $G_{t,x}$ при $n \to \infty$ у просторі $S^{\beta/2}_{\beta/2} = H_{\{\beta\}}$ при фіксованих $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ (для доведення цієї властивості використовуються оцінки функції Ерміта h_k: $|h_k(x)| \le 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, і функції $Q_1(t,\lambda_k)$, $Q_2(\lambda_k)$). Справді, внаслідок лінійності і неперервності функціонала g

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)h_k(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)\langle g, h_k(y)\rangle h_k(x) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)\langle g, h_k\rangle h_k(x) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \Big\langle g, \sum_{k=0}^{n} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)h_k(x)h_k(\cdot)\Big\rangle =$$
$$\lim_{n\to\infty} \langle g, S_{n,t,x}(\cdot)\rangle = \langle g, \lim_{n\to\infty} S_{n,t,x}(\cdot)\rangle =$$
$$= \langle g, G_{t,x}(\cdot)\rangle.$$

Лема 4. *Функція* $u(t,x)$, *яка задається формулою* (13), *диференційовна за* t, *при цьому*

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \Big\langle g, \frac{\partial}{\partial t}G_{t,x}(\cdot)\Big\rangle = \frac{\partial}{\partial t}G_1(t,x) * g.$$

Доведення. Із леми 2 випливає, що функція $G_{t,x}$, як абстрактна функція аргументу t зі значеннями у просторі $S^{\beta/2}_{\beta/2}$, диференційовна за t (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$). Отже,

$$\tilde{\Phi}_{\Delta t,t,x}(y) := \frac{1}{\Delta t}[G_{t+\Delta t,x}(y) - G_{t,x}(y)] \to$$
$$\frac{\partial}{\partial t}G_{t,x}(y)$$

при $\Delta t \to 0$ у просторі $S^{\beta/2}_{\beta/2}$. Тоді, враховуючи неперервність функціонала g, прийдемо до співвідношень

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}[u(t+\Delta t,x) - u(t,x)] =$$
$$= \lim_{\Delta t\to 0} \Big\langle g, \frac{1}{\Delta t}[G_{t+\Delta t,x}(\cdot) - G_{t,x}(\cdot)]\Big\rangle =$$
$$\lim_{\Delta t\to 0} \langle g, \tilde{\Phi}_{\Delta t,t,x}(\cdot)\rangle =$$
$$= \langle g, \lim_{\Delta t\to 0} \tilde{\Phi}_{\Delta t,t,x}(\cdot)\rangle = \Big\langle g, \frac{\partial}{\partial t}G_{t,x}(\cdot)\Big\rangle.$$

Той факт, що $\partial u/\partial t$ можна також подати за допомогою згортки $\frac{\partial G_1(t,\cdot)}{\partial t} * g$, доводиться за схемою, яка використовувалася при доведені леми 2. Лема доведена.

Варто відзначити, що аналогічно доводиться диференційовність за t функції $\partial u/\partial t$, при цьому

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \Big\langle g, \frac{\partial^2}{\partial t^2}G_{t,x}(\cdot)\Big\rangle = \frac{\partial^2 G_1(t,x)}{\partial t^2} * g.$$

Лема 5. *Нехай* $u(t,x) = G_1(t,x) * g$, $g \in (S^{\beta/2}_{\beta/2})'$, $(t,x) \in \Omega$; *тоді у просторі* $(S^{\beta/2}_{\beta/2})'$ *виконується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = g. \tag{14}$$

Доведення. Для доведення (14) візьмемо довільну функцію $\psi(x) =$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(\psi)h_k(x) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ і відмітимо, що внаслідок неперервності вкладання $S_{\beta/2}^{\beta/2}$ у простір $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$ і ортонормованості базису $\{h_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$

$$\langle u(t,\cdot),\psi\rangle = (u(t,\cdot),\psi)_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot))c_k(\psi) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\psi),$$

$$\lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{n=1}^{m}\mu_n \lim_{t\to t_n}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle =$$

$$= \mu \lim_{t\to+0}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot))c_k(\psi) -$$

$$- \sum_{n=1}^{m}\mu_n \lim_{t\to t_n}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot))c_k(\psi),$$

при цьому ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot))c_k(\psi)$ збігається рівномірно по $t \in (0,\infty)$. Це випливає із вигляду коефіцієнтів $c_k(u(t,\cdot))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, нерівності

$$|c_k(u(t,\cdot))|\cdot|c_k(\psi)| \le \tilde{c}|c_k(g)|\cdot|c_k(\psi)|,$$

$t \in (0,\infty), k \in \mathbb{Z}_+$, і тверджень (А), (Б). Отже,

$$\lim_{t\to t_n}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot))c_k(\psi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t_n,\cdot))c_k(\psi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t_n,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\psi), \qquad (15)$$

$$\lim_{t\to+0}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(t,\cdot))c_k(\psi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u(0,\cdot))c_k(\psi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\psi). \qquad (16)$$

Враховуючи (15), (16), знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to+0}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle - \sum_{n=1}^{m}\mu_n \lim_{t\to t_n}\langle u(t,\cdot),\psi\rangle =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\Big(\mu - \sum_{n=1}^{m}\mu_n Q_1(t_n,\lambda_k)\Big)\Big]Q_2(\lambda_k)c_k(g)c_k(\psi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g)c_k(\psi) = \langle g,\psi\rangle,$$

$$\psi \in S_{\beta/2}^{\beta/2}, g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g)h_k \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})',$$

що і потрібно було довести.

Теорема 3. *Нелокальна багатоточкова задача* (5), (12) *є коректно розв'язною, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = G_1(t,x)*g = \langle g, G_{t,x}(\cdot)\rangle, \quad (t,x)\in\Omega,$$

$u(t,\cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ *для довільного* $t > 0$.

Доведення. Із властивостей абстрактної згортки випливає, що $u(t,\cdot) \in S_{\beta/2}^{\beta/2}$ для довільного $t > 0$. Функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (5). Справді,

$$A_f(G_1(t,\cdot)*g) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)c_k(G_1(t,\cdot)*g)h_k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)c_k(G_1)c_k(g)h_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k)c_k(g)Q_1(t,\lambda_k)Q_2(\lambda_k)h_k.$$

З іншого боку,

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 G_1(t,x)}{\partial t^2} * g =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k\Big(\frac{\partial^2 G_1}{\partial t^2}\Big)c_k(g)h_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(g) Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k.$$

Звідси отримуємо, що функція $u(t,x) = G_1(t,x) * g$ є розв'язком рівняння (5). Крім того, із леми 5 випливає, що $u(t,x)$ задовольняє (12) у вказаному сенсі. Отже, $u(t,x)$ – розв'язок задачі (5), (12). Єдиність розв'язку випливає із наступних міркувань: якщо $g = 0$, то $c_k(g) = \langle g, h_k \rangle = 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$; тоді $u(t,x) = 0$, $t \in (0,+\infty)$.

Як приклад, розглянемо оператор A_f, побудований за функцією $f(\lambda) = \lambda^2$, яка задовольняє умову (4) з параметром $\beta = 1$. При цьому рівняння (5) має вигляд

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4} - 2x^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \\ + x^4 u(t,x), \quad (t,x) \in \Omega. \qquad (17)$$

Для рівняння (17) задамо двоточкову задачу з параметрами μ, μ_1; $\mu > \mu_1$:

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t,\cdot) - \mu_1 \lim_{t \to t_1} u(t,\cdot) = g, \qquad (18)$$

$$g \in (S_{1/2}^{1/2})', t_1 > 0.$$

Внаслідок теореми 3 така задача є коректно розв'язною, розв'язок задається формулою

$$u(t,x) = \langle g, G_{t,x}(\cdot) \rangle, u(t,\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}, t > 0,$$

де $G_{t,x}(y) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t(2k+1)} (\mu - \mu_1 e^{-t_1(2k+1)})^{-1} h_k(x) h_k(y).$$

Скористаємося тим, що

$$(\mu - \mu_1 e^{-t_1(2k+1)})^{-1} = \mu^{-1} \Big(1 - \frac{\mu_1}{\mu} e^{-t_1(2k+1)}\Big)^{-1} =$$

$$= \mu^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^n e^{-nt_1(2k+1)}, \quad \frac{\mu_1}{\mu} e^{-t_1(2k+1)} < 1,$$

$k \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

$$G_{t,x}(y) =$$

$$= \mu^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(t+nt_1)(2k+1)} h_k(x) h_k(y).$$

Враховуючи результат, наведений в [2, с. 53–54], знайдемо, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(t+nt_1)(2k+1)} h_k(x) h_k(y) =$$

$$(2\pi \operatorname{sh}(2(t+nt_1)))^{-1/2} \cdot$$

$$\cdot \exp\{\operatorname{sh}^{-1}(2(t+nt_1)) xy - \frac{1}{2} \operatorname{cth}(2(t+nt_1)) \cdot$$

$$\cdot (x^2+y^2)\} \equiv K_n(t,x,y).$$

Отже,

$$G_{t,x}(y) = \mu^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^n K_n(t,x,y), \mu_1/\mu < 1.$$

Зокрема, якщо $g = \delta \in (S_{1/2}^{1/2})'$, де δ – дельта-функція Дірака, то розв'язок задачі дається формулою

$$u(t,x) = \langle \delta, G_{t,x}(y) \rangle = G_{t,x}(0) =$$

$$= \mu^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\mu_1}{\mu}\Big)^n K_n(t,x,0).$$

Якщо $\mu = 1$, $\mu_1 = 0$ (випадок задачі Коші), $g = \delta \in (S_{1/2}^{1/2})'$, то

$$u(t,x) = (2\pi \operatorname{sh}(2t))^{-1/2} \exp\Big\{ - \frac{1}{2} \operatorname{cth}(2t) x^2 \Big\},$$

$(t,x) \in \Omega$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.*

2. Городецький В.В. *Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.*

3. Нахушев А.М. *О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 92–101.*

4. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии. – М.: Высшая, школа, 1995. – 301 с.*

5. Белавин И.А., Капица С.П., Курдюмов С.П. *Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1988. – Т. 38, № 6. – С. 885–902.*

6. Майков А.Р., Поезд А.Д., Якунин С.А.*Экономический метод вычисления нестационарных нелокальных по времени условий излучения для волновых систем // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1990. – Т. 30, № 8. – С. 1267-1271.*

7. Дезин А.А. *Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61–86.*

8. Мамян А.Х. *Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 267, № 2. – С. 292–296.*

9. Городецький В.В., Широковських А.О. *Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором // Буковинський математ. журн. Т. 3, № 1. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2015. – С. 30–44.*

10. Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. – 328 с.*

11. Горбачук В.И. *О разрешимости задачи Дирихле для дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Прямые и обратные задачи спектральной теории дифференциальных операторов: Сб. науч. трудов. – К., 1985. – С. 8–22.*

12. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.*