УДК 517.2, 517.9

©2017 р. І.А. Бондар, М. І. Громяк

Інститут математики НАН України, Тернопільський національний педагогічний університет імені В. Гнатюка

ІМПУЛЬСНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ. НЕКРИТИЧНИЙ ВИПАДОК

Розглянуто імпульсну крайову задачу для системи інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. Встановлено умову існування єдиного розв'язку.

The impulse boundary-value problem for a system of integro-differential equations with a degenerate kernel is considered. A condition for the existence of a single solution is established.

1. Постановка задачі. Систематичне вивчення математичних проблем теорії диференціальних систем з імпульсним впливом розпочалося у роботах А.Д. Мишкіса, А.М. Самойленка, М.О. Перестюка [1], А. Халаная, Д. Векслера [2]. У подальшому ідеї, закладені у даних роботах отримали свій розвиток і узагальнення у багаточисленних публікаціях М.В. Азбелєва [3], В.П. Максимова, О.В. Анохіна, О.А. Бойчука [4,5], Є.О. Гребенікова, Ю.А. Рябова. Стало зрозуміло, що теорію крайових задач для диференціальних систем з імпульсним впливом можна розвивати, отримуючи при цьому оригінальні результати, як, наприклад, для інтегро-диференціальних систем з імпульсним впливом [6–9] з використанням теорії псевдообернених матриць (за Муром-Пенроузом) та апарату ортопроекторів. Такий напрямок в теорії крайових задач для інтегро-диференціальних систем з імпульсним впливом і буде предметом дослідження у даній роботі. Розглянемо імпульсну задачу для систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром

$$\dot{x}(t) - \Phi(t)\int_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big]ds = f(t), \quad (1)$$

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} := S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i, \quad (2)$$

$$t \neq \tau_i, t \in [a,b], \tau_i \in (a,b), i = 1,2,...,p,$$

$$\ell x(\cdot) = \alpha. \quad (3)$$

Будемо використовувати припущення і позначення з [4, 6–9], де: $A(t), B(t)$, $\Phi(t)$ — $(m \times n)$, $(m \times n)$, $(n \times m)$-вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; вектор-стовпці матриці $\Phi(t)$ — лінійно-незалежні на $[a,b]$, $f(t)$ — n-вимірна вектор-функція з $L_2[a,b]$; E_i, S_i — $(k_i \times n)$-вимірні матриці, γ_i — k_i-вимірний вектор стовпець сталих, $rank(E_i + S_i) = k_i$ $(i = 1,2,...,p)$, тобто розв'язок імпульсної системи (1), (2), визначається однозначним продовженням через точки розриву:

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} = E_i\big(x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0)\big); \quad (4)$$

$\ell = col(\ell_1, \ell_2, ..., \ell_q)$ — лінійний обмежаний q-вимірний векторний функціонал, $\alpha = col(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_q) \in R^q$.

Розв'язок $x(t)$ крайової задачі (1)–(3) шукаємо у просторі $D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I)$ — простір n-вимірних функцій, які допускають розриви першого роду в точках $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_p \in (a,b)$ і які абсолютно неперервні на кожному із проміжків $[a,\tau_1), [\tau_1,\tau_2), ..., [\tau_p, b]$. Такі функції $x(t) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I)$ допускають зображення:

$$x(t) = \int_a^t \dot{x}(s)ds + x(a) + \sum_{i=1}^p \chi_{[\tau_i,b]}(t)\Delta x(\tau_i), \quad (5)$$

де $\Delta x(\tau_i) = x(\tau_i) - x(\tau_i - 0)$, $\chi_{[\tau_i,b]}(t)$ — характеристична функція проміжка $[\tau_i, b]$ [3]. Норми у відповідних просторах задаються наступним чином

$$\|x\|_{D_2([a,b]\setminus\{\tau_i\}_I)} = \|\dot{x}\|_{L_2[a,b]} + \\ + |x(a)|_{R^n} + \|\sum_{i=1}^{p} \chi_{[\tau_i,b]}(t)\Delta x(\tau_i)\|_{R^n},$$

$$\|x\|_{L_2[a,b]} = \left(\int_a^b \sum_{i=1}^{n} \mid x_i(t) \mid^2 dt \right)^{1/2}, \ t \in [a,b].$$

Отже, розв'язок імпульсної крайової задачі (1)–(3) шукаємо у наступному класі вектор-функцій:

$$x(t) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I), \ \dot{x}(t) \in L_2[a,b],$$

$$t \in [a,b], \ \tau_i \in (a,b), \ i = 1,...,p.$$

Розглядаючи імпульс у вигляді (2), ми припускаємо, що він задається не по всіх компонентах вектор-функції $x(t) = col(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, а тільки по її частинах [8, 9]. Таким чином, можна розглядати випадок, коли перший імпульс задається лише по першій компоненті, другий — лише по другій і т.д., n-ий імпульс — по n-ій компоненті вектор-функції $x(t)$. Або, наприклад, у точках $\tau_j \in (a,b)$ вектор-функція $x(t)$ може взагалі не мати імпульсу, а у точках $\tau_i \in (a,b)$, $i \neq j$, може мати імпульси по z-тих ($z = 1, 2, ..., n$) компонентах вектор-функція $x(t)$.

2. Основний результат. Дотримуючись раніше введеної [5] класифікації крайових задач, нагадаємо наступне

Означення. *Крайові задачі з імпульсним впливом (1)–(3), для яких відповідні їм лінійні однорідні крайові задачі*

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s) \Big] ds = 0, \tag{6}$$

$$\Delta E_i x|_{t=\tau_i} - S_i x(\tau_i - 0) = 0, \tag{7}$$

$$t \neq \tau_i, t \in [a,b], \tau_i \in (a,b), i = 1,2,...,p,$$

$$\ell x(\cdot) = 0 \tag{8}$$

не мають (мають) нетривіальні розв'язки, називаються ***некритичними (критичними)***.

Таким чином, випадки крайових задач, для яких виконується одна із умов $rankQ = k + q$ або $rankQ < k + q$ є, відповідно, некритичним або критичним [5], де Q — $(k+q) \times r_1$-вимірна матриця [6], отримана підстановкою у крайову умову нормальної фундаментальної матриці $X(t) = X(t,a)$, $X(a) = E$ системи з імпульсним впливом

$$Q = \ell X(\cdot).$$

Тут $k := k_1 + k_2 + ... + k_p$. Коли розглядаємо некритичний випадок, тобто $rankQ = n_2 = k + q$, то $rankP_Q = k + q - rankQ = 0$, отже $P_Q = 0$, а це доводить справедливість наступного твердження.

Теорема (Некритичний випадок). Якщо $rankQ = n_2 = k + q$, то однорідна імпульсна крайова задача (6)–(8) має лише тривіальний розв'язок.

Неоднорідна імпульсна крайова задача (1)–(3) розв'язна тоді і тільки тоді, коли $f(t) \in L_2[a,b]$, $\gamma_i \in R^{k_i}$, $\alpha \in R^q$ задовольняють умову

$$P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} = 0, \quad P_{Q^*_d} \Big\{ \delta - \mathfrak{L}F(\cdot) \Big\} = 0, \tag{9}$$

де $d_1 = m - n_1$, $d = k + q - r_1$, $r_1 = m + n - n_1$, $n_1 = rankD$ і при цьому має єдиний розв'язок

$$x(t) = \Psi_0(t) P_{D_{r_1}} Q^+ \Big(\delta - \mathfrak{L}F(\cdot) \Big) + F(t), \tag{10}$$

визначених у класі вектор-функцій

$$x(t) \in D_2([a,b] \setminus \{\tau_i\}_I), \ \dot{x}(t) \in L_2[a,b],$$

$$t \in [a,b], \ \tau_i \in (a,b), \quad i = 1,...,p.$$

Автори висловлюють подяку член-кореспонденту НАН України, проф. О.А. Бойчуку за постановку задачі та увагу до роботи.

Робота підтримана Грантом НАН України для молодих вчених на 2017 р.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння з імпульсною дією. — Київ: Вища школа, 1987.

2. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. — М.: Мир, 1971. — 307 с.

3. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. — Моска: Институт компьютерных исследований, 2002. — 384 с.

4. *Бойчук О.А., Кривошея С.А., Самойленко А.М.* Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, N11. – С. 1576-1579.

5. *Boichuk A.A. and Samoilenko A.M.* Generalized Inverse Operators And Fredholm Boundary-Value Problems. (2nd ed.) – Inverse and Ill-Posed Problems Series 59. – Berlin/Boston. Walter de Gruyter GmbH, 2016. — xvi + 298 p. — ISBN 978-3-11-037839-9.

6. *Бойчук О.А., Головацька І.А.* Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь// Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, N4. – С. 460-474.

7. *Бондар І.А.* Імпульсні крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь// Буковинський математичний журнал, Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. – 2014. – **2**, N4. – С. 7-11.

8. *Bondar Ivanna* Weakly perturbed boundary-value problems for systems of integro-differential equations with impulsive action// Tatra Mountains Mathematical Publications (Subtitle: Differential and Difference Equations and Applications 2014). – 2015. – **63**. – P. 73-87, DOI: 10.1515/tmmp-2015-0021.

9. *Bondar I., Gromyak M., Kozlova N.* Weakly nonlinear impulsive boundary-value problems for systems of integrodifferential equations // Miskolc Mathematical Notes, Vol. 17 (2016), No. 1, pp. 69–84.