

СЛАБКО РЕГУЛЯРНІ МНОЖИНИ У КОМПЛЕКСНІЙ ПЛОЩИНІ

Розглядається поняття слабо регулярної множини у комплексній площині. Доводиться, що такі множини є інтерполяційними в класах аналітичних функцій скінченного порядку. Ключові слова: регулярні множини, уточнений порядок, слабо регулярні множини, інтерполяційна послідовність.

We consider the concept of a weakly regular set in the complex plane. We prove that such sets are interpolation sets in the classes of analytical functions of finite order. Keywords: Regular sets, proximate order, weakly regular sets, interpolation sequence.

Вступ. Поняття регулярної множини у комплексній площині було запроваджено Б.Я. Левіним [1]. Введемо необхідні означення. Диференційовна функція $\rho(r)$ на півосі $(0, +\infty)$ називається *уточненим порядком*, якщо виконуються умови:

- 1) $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho$,
- 2) $\lim_{r \rightarrow \infty} r\rho'(r) \ln r = 0$.

У статті використовується позначення $V(r) = r^{\rho(r)}$. Наведемо найчастіше цитовану властивість уточненого порядку [1, Розділ I, §12].

Лема 1. Нехай ρ уточнений порядок та $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho > 0$. Тоді асимптотична нерівність

$$(1 - \varepsilon)k^\rho V(r) < V(kr) < (1 + \varepsilon)k^\rho V(r)$$

виконується рівномірно відносно k , $0 < a \leq k \leq b$, при $r \rightarrow \infty$.

Нехай $\rho(r)$ – деякий уточнений порядок такий, що $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho > 0$, та $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ – послідовність різних точок у комплексній площині $\mathbb{C}$. Припустимо, що точки відмежовані одна від одної. Більш точно, що виконується одна з наступних умов (C) або (C'):

(C) Точки a_n розташовані в середині кутів із спільною вершиною в початку координат, які не перетинаються, так, що для будь-яких двох точок послідовності A , розташованих в середині одного з кутів, виконується умова

$$|a_{n+1}| - |a_n| \geq r_n = d|a_n|^{1-\rho(|a_n|)}$$

для деякого $d > 0$.

(C') Існує число $d > 0$ таке, що круги з радіусами

$$r_n = d|a_n|^{1-\frac{\rho(|a_n|)}{2}}$$

з центрами в точках a_n , не перетинаються.

Правильна множина A (див. [1, Розділ II]), що задовольняє одну з умов (C) або (C'), називається *регулярною множиною в сенсі Левіна*, або коротко *R-множиною*, а круги $|z - a_n| \leq r_n$ називають *винятковими кругами R-множини* (C_R -кругами).

Множини, що задовольняють умову (C), відіграють важливу роль у теорії цілих функцій. Зокрема, вони застосовуються для побудови канонічних добутків множин [1, 2, 3].

У роботах [4, 5] розглядаються множини $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ у верхній півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$, що задовольняють умову:

(C₊) Для всіх точок множини A виконується нерівність:

$$|a_{n+1}| - |a_n| \geq r_n = d \sin \arg(a_n) |a_n|^{1-\rho(|a_n|)}$$

для деякого $d > 0$.

Такі множини також використовуються для побудови канонічних добутків у верхній півплощині $\mathbb{C}_+$.

У нашій статті ми узагальнюємо поняття регулярної множини в сенсі Левіна. Ми вводимо поняття слабо регулярної множини у комплексній площині. Це накладає більш

слабкі обмеження на множину A . Зокрема, не вимагається, щоб вона була правильно розподілена. Використовуючи критерії інтерполяційності в термінах міри, яка породжується вузлами інтерполяції, які були отримані раніше К.Г. Малютіним, ми доводимо, що такі множини є інтерполяційними у класах цілих функцій скінченного порядку. Це дає можливість будувати приклади інтерполяційних множин у цих класах. Відмітимо, що аналогічні приклади інтерполяційних множин у класах обмежених функцій в одиничному крузі були наведені в [6]. Для їх побудови використовувалася інтерполяційна теорема Карлесона у термінах міри, яка породжується вузлами інтерполяції.

Далі через K_i , $i = 1, 2, \dots$, будемо позначати додатні сталі.

1. Слабко регулярні множини у комплексній площині. Позначимо через $[\rho, \infty]$ клас цілих функцій f порядку $\rho > 0$, тобто таких, що виконується умова

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ |f(re^{i\theta})|}{\log r} \leq \rho.$$

Означення 1. *Послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ називається інтерполяційною послідовністю в класі $[\rho, \infty]$, якщо для будь-якої послідовності комплексних чисел $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$, що задовольняє умову*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^+ \log^+ |b_n|}{\log |a_n|} \leq \rho \quad (1)$$

існує функція $f \in [\rho, \infty]$, яка розв'язує інтерполяційну задачу

$$f(a_n) = b_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Нехай $\rho(r)$ - уточнений порядок, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho > 0$. Позначимо через $[\rho(r), \infty)$ клас цілих функцій f типу не вищого, ніж нормальний при порядку $\rho(r)$, тобто, таких, що

$$\log^+ |f(re^{i\theta})| \leq C_f V(r),$$

де $C_f > 0$ - скінченна стала.

Означення 2. *Послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ називається інтерполяційною послідовністю в класі $[\rho(r), \infty)$, якщо для будь-якої послідовності комплексних чисел $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$, що задовольняє умову*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^+ |b_n|}{V(|a_n|)} < \infty \quad (3)$$

існує функція $f \in [\rho(r), \infty)$, яка розв'язує інтерполяційну задачу (2).

Позначимо через $C(a, r)$ відкритий круг радіуса r з центром в точці a . На множині A визначимо міру $n(G) = \sum_{a_n \in G} 1$ і сім'ю функцій

$$\Phi_z(\alpha) = \frac{\max\{n(C(z, \alpha|z|)) - 1; 0\}}{V(|z|)}.$$

Наступні теореми були отримані в роботі [7].

Теорема 1. *Послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ є інтерполяційною в класі $[\rho, \infty]$, тоді і тільки тоді, коли існує уточнений порядок $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) \leq \rho$, такий, що*

$$\Phi_z(\alpha) \leq (\ln 1/\alpha)^{-1}. \quad (4)$$

Теорема 2. *Послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ є інтерполяційною в класі $[\rho(r), \infty)$, тоді і тільки тоді, коли*

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \int_0^{1/2} \frac{\Phi_z(\alpha)}{\alpha} d\alpha < \infty. \quad (5)$$

Введемо наступні означення.

Означення 3. *Послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ називається слабо регулярною послідовністю при порядку $\rho > 0$, або більш точноше $WR(\rho)$ -множиною, якщо існує уточнений порядок $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) \leq \rho$, такий, що виконується одна з умов (C) або (C') і*

$$n(C(0, r)) \leq K_1 V(r), \quad K_1 > 0. \quad (6)$$

Означення 4. *Послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ називають слабо регулярною послідовністю при уточненому*

порядку $\rho(r)$, або більш точніше $WR(\rho(r))$ -множиною, якщо виконується умова (30) і справедлива одна з умов (C) або (C').

2. Інтерполяційність слабо регулярних множин. Перш за все доведемо деякі наслідки з умов (C) і (C').

Лема 2. Якщо послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$, задовольняє умову (C), то існує число $d_1 > 0$ таке, що круги з радіусами $d_1|a_n|/V(|a_n|)$ та з центром в точках a_n не перетинаються.

Доведення. З леми 1 випливає, що існує число $K_2 > 1$ таке, що для будь яких r_1 і r_2 , що задовольняють нерівність $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq 2r_1(1+d)\frac{r_1}{V(r_1)}$ виконується умова

$$\frac{r_2}{V(r_2)} \leq K_2 \frac{r_1}{V(r_1)}. \quad (7)$$

Позначимо $a_n = r_n e^{i\theta_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Нехай $r_j > r_i$. Якщо $r_j \geq 2\left(r_i + d\frac{r_i}{V(r_i)}\right)$, то $C\left(a_i, d\frac{r_i}{V(r_i)}\right)$ і $C\left(a_j, \frac{r_j}{2}\right)$ не перетинаються, бо у цьому випадку для всіх точок $z \in C\left(a_j, \frac{r_j}{2}\right)$ виконується нерівність $|z - a_i| \geq |a_j - a_i| - |z - a_j| \geq r_j - r_i - \frac{r_j}{2} = \frac{r_j}{2} - r_i \geq d\frac{r_i}{V(r_i)}$. Отже, $z \notin C\left(a_i, d\frac{r_i}{V(r_i)}\right)$. Оскільки $V(r_j) \geq 1$, то $C\left(a_i, d\frac{r_i}{V(r_i)}\right)$ і $C\left(a_j, d\frac{r_j}{2V(r_j)}\right)$ не перетинаються.

Якщо $r_j \leq 2\left(r_i + d\frac{r_i}{V(r_i)}\right)$, то із (7) випливає нерівність $d\frac{r_j}{2K_2V(r_j)} \leq d\frac{r_i}{2V(r_i)}$. З умови (C) одержуємо, у цьому випадку, що круги $C\left(a_j, d\frac{r_j}{K_2V(r_j)}\right)$ і $C\left(a_i, d\frac{r_i}{2V(r_i)}\right)$ не перетинаються, оскільки

$$d\frac{r_j}{2K_2V(r_j)} + d\frac{r_i}{2V(r_i)} \leq d\frac{r_i}{V(r_i)}.$$

Означення 5. Нехай послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ – слабо регулярна відносно уточненого порядку $\rho(r)$. Тоді виняткові круги називаються $C_R(\rho(r))$ -кругами.

Означення 6. Нехай послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ – слабо регулярна відносно порядку ρ . Тоді виняткові круги називаються $C_R(\rho)$ -кругами.

Лема 3. Нехай послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ – слабо регулярна відносно уточненого порядку $\rho(r)$. Якщо виконується умова (C), то виконується нерівність

$$\Phi_z(\alpha) \leq K\alpha, \quad (8)$$

а якщо виконується нерівність (C'), то виконується нерівність

$$\Phi_z(\alpha) \leq K\alpha^2, \quad (9)$$

при деякому $K > 0$.

Доведення. Припустимо, що виконується умова (C), а точка z не належить жодному $C_R(\rho(r))$ -кругу виняткової множини. Побудуємо круг $C(z, \alpha|z|)$ з центром в точці z радіуса $\alpha|z|$. Якщо точка $a_n = r_n e^{i\theta_n}$ належить кругу $C(z, \alpha|z|)$, то позначимо через $[\alpha_n, \beta_n]$ кругову проекцію сегмента $[a_n, a_n + e^{i\theta_n}d|a_n|^{1-\rho(|a_n|)}]$ на промінь $\arg \xi = \arg z$. Оскільки точка z не належить винятковому кругу, що відповідає точці a_n , то $[\alpha_n, \beta_n]$ належить кругу $C(z, 2\alpha|z|)$. З умови (C) випливає, що всі такі сегменти не перетинаються. Отже,

$$\sum_{a_n \in C(z, \alpha|z|)} d|a_n|^{1-\rho(|a_n|)} \leq 4\alpha|z|.$$

З останньої нерівності і леми 1 одержуємо для всіх $\alpha \leq 1/2$,

$$n(C(z, \alpha|z|)) \leq K_3\alpha V(|z|), \quad (10)$$

для деякого $K_3 > 0$. Нерівність (6) справедлива для всіх точок z , які не належать винятковим кругам. Якщо точка z належить винятковому кругу, тоді ліва частина нерівності (6) може збільшитися не більше ніж на одиницю, оскільки виняткові круги не перетинаються. Отже, для будь якої точки $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність

$$\Phi_z(\alpha) \leq K_4\alpha.$$

Оцінка (4) може бути одержана з умови (C'), порівнянням площ виняткових кругів методами, запропонованими в роботі [1].

Для повноти викладення, наведемо ці міркування. Нехай виконується умова (C') і точка z не належить винятковій множині, а точка a_n належить кругу $C(z, \alpha|z|)$. Тоді, винятковий круг $C(a_n, d|a_n|^{1-\frac{\rho(|a_n|)}{2}})$ належить кругу $C(z, 2\alpha|z|)$. Оскільки, виняткові круги не перетинаються, тоді сума площ таких кругів, центри яких попали в круг $C(z, \alpha|z|)$, не більша площі круга $C(z, 2\alpha|z|)$, тобто

$$\sum_{a_n \in C(z, \alpha|z|)} d^2 |a_n|^{2-\rho(|a_n|)} \leq 4\alpha^2 |z|^2.$$

Використовуючи лему 1, звідси можна одержати нерівність:

$$n(C(z, \alpha|z|)) \leq K_5 \alpha^2 V(|z|). \quad (11)$$

Якщо точка z належить винятковій множині, то ліва частина нерівності (7) може збільшитися не більш ніж на одиницю. Таким чином, доведено, що оцінка (4) виконується.

Теорема 3. *Нехай послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ слабо регулярна при уточненому порядку $\rho(r)$. Тоді A – інтерполяційна послідовність в класі $[\rho(r), \infty)$.*

Доведення. Доведення впливає з леми 3 і теореми 2.

Теорема 4. *Нехай послідовність $A = \{a_n, n = 1, 2, \dots\}$ слабо регулярна при порядку $\rho > 0$. Тоді A інтерполяційна послідовність в класі $[\rho, \infty]$.*

Доведення. Ця теорема є наслідком теореми 3.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.
2. Леонтьев А.Ф.. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
3. Гришин А.Ф. О множествах регулярного роста целых функций. III // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1984. – 44. – С. 32-42.
4. Малютин К.Г. О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. I // Известия РАН: Математика, 1995. – 59, № 4. – С. 785-814.
5. Малютин К.Г. О множествах регулярного роста функций в полуплоскости. II // Известия РАН: Математика, 1995. – 59, № 5. – С. 983-1006.

6. Виноградов С.А., Хавин В.П. Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций. II // Исследования по линейным операторам и теории функций. VI, Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1976. – 56. – С. 12-56.

7. Малютин К.Г. Интерполяция голоморфными функциями. – Харьков: Дис. канд. физ.-мат. наук, 1980. – 104 с.