УДК 517.555

©2017 р. А.І. Бандура[1], О.Б. Скасків[2]

[1]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
[2]Львівський національний університет імені Івана Франка

МЕТРИЧНИЙ ПРОСТІР ІЄРА, ТЕОРЕМА ІСНУВАННЯ ТА ЦІЛІ ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОГО L-ІНДЕКСУ ЗА СУКУПНІСТЮ ЗМІННИХ

Досліджуються метричні властивості простору цілих функцій обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних. Доведено, що він є простором першої категорії у топології, породженій метрикою Ієра. У цій статті також доведено теорему про існування додатної неперервної вектор-функції $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ для заданої цілої функції $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ з обмеженою кратністю нульових точок такої, що F має обмежений **L**-індекс за сукупністю змінних. Вона є узагальненням відповідного одновимірного результату.

The metric properties of a space of entire functions of bounded **L**-index in joint variables are considered. It is proved that the space of entire functions is of the first category in the topology generated by Iyer's metric. In the article, it is also proved existence theorem of a positive continuous vector-function $\mathbf{L} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ for a given entire function $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ with bounded multiplicities of its zero points such that F has bounded **L**-index in joint variables. This is a generalization of corresponding one-dimensional result.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, а $l : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ — фіксована неперервна функція. Ціла функція $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ називається функцією обмеженого $l-$індексу [16], якщо існує $m \in \mathbb{Z}_+$, незалежне від z, таке, що для усіх $p \in \mathbb{Z}_+$ та $z \in \mathbb{C}$ $\frac{|f^{(p)}(z)|}{l^p(z)p!} \le \max\{\frac{|f^{(s)}(z)|}{l^s(z)s!} : 0 \le s \le m\}$. Найменше число з таких цілих чисел m називають $l-$індексом функції $f(z)$ та позначають через $N(f, l)$. У випадку $l(z) \equiv 1$ ми отримаємо означення функції *обмеженого індексу* [17]. Зокрема, ціла функція $f(z) = e^z$ має індекс $N(f, 1) = 0$.

Функції обмеженого індексу мають цікаві аналітичні та метричні властивості.

Зокрема, К. Екблау [14] досліджував метричний простір цілих функцій обмеженого індексу. Ним доведено, що у топології, породженій метрикою

$$d(f, g) = \sup\{|f_0 - g_0|, |f_p - g_p|^{1/p} : p \in \mathbb{N}\},$$

де f_p, g_p – тейлорові коефіцієнти функцій f, g, відповідно, такий простір є простором першої категорії. У статті [12] цей результат узагальнено на клас цілих функцій декількох комплексних змінних. Подібну властивість встановлено в [5] для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком. Ширша бібліографія про цей клас цілих функцій наявна у [1,6,26].

Нещодавно у [1,2] означення цілої функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних узагальнене заміною вектор-функції $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \dots, l_n(|z_n|))$ на вектор-функцію загальнішого вигляду $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, де $l_j(z) = l_j(z_1, \dots, z_n)\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ — неперервна функція, $j \in \{1, \dots, n\}$. Зазначимо, що ціла функція $F(z) = e^{z_1+\dots+z_n}$ є функцією обмеженого індексу за сукупністю змінних, тобто, обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних з $\mathbf{L}(z) \equiv (1, \dots, 1)$. Проте вже ціла функція $F(z) = e^{z_1 \cdots z_n}$ є функцією необмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних для будь-якої функції вигляду $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \dots, l_n(|z_n|))$. Але при цьому дана функція F має (див. [2,3]) обмежений **L**-індекс за сукупністю змінних для функції $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, де $l_j(z) = |z_1 \cdots z_{j-1} z_{j+1} \cdots z_n| + 1$. Тобто, навіть цей простий приклад показує, що загальніша функція **L** дозволяє вивчати властивості ширшого класу цілих функцій від декількох комплексних змінних (у цьому зв'язку див. також [1]-[4]).

З огляду на [12,14] виникає таке питання: *Чи є простором першої категорії простір цілих функцій обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних для* $\mathbf{L}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$? У цій статті дано ствердну відповідь на це питання. Зауважимо, що доведені у даній статті теореми 1, 2 та 3, отримані при $n = 1$ та $l(z) \equiv 1$ у статті [14], а у випадку $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \dots, l_n(|z_n|))$ в статті [12].

Наведемо деякі потрібні позначення.

Для $R = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in [0, 2\pi]^n$ та $K = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ позначимо $\|K\| = k_1 + \dots + k_n$, $Re^{i\Theta} = (r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})$, $K! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$. Для $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $B = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ використовуватимемо такі формальні позначення: $|A| = \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{1/2}$, $A \pm B = (a_1 \pm b_1, \dots, a_n \pm b_n)$, $AB = (a_1 b_1, \cdots, a_n b_n)$, $A/B = (a_1/b_1, \dots, a_n/b_n)$, $A^B = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{b_n}$. Відношення $A < B$ означає, що $a_j < b_j$ для усіх $j \in \{1, \dots, n\}$; подібно визначається відношення $A \leq B$.

Полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - z_j^0| < r_j, \ j \in \{1, \dots, n\}\}$ позначаємо через $\mathbb{D}^n(z^0, R)$, його кістяк $\{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - z_j^0| = r_j, \ j \in \{1, \dots, n\}\}$ через $\mathbb{T}^n(z^0, R)$, а замкнений полікруг $\{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - z_j^0| \leq r_j, \ j \in \{1, \dots, n\}\}$ через $\mathbb{D}^n[z^0, R]$. Для частинної похідної цілої функції $F(z) = F(z_1, \dots, z_n)$ вживаємо такий запис

$$F^{(K)}(z) = \frac{\partial^{\|K\|} F}{\partial z^K} = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}},$$

де $K = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n_+$.

Нехай $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, де $l_j(z)$ — додатні неперервні функції змінної $z \in \mathbb{C}^n$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ціла функція $F(z)$ називається *функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу за сукупністю змінних* ([1]-[3]), якщо існує $m \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для кожного $z \in \mathbb{C}^n$ та $J = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n_+$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J! \mathbf{L}^J(z)} \leq \max_{\|K\| \leq m} \frac{|F^{(K)}(z)|}{K! \mathbf{L}^K(z)} \tag{1}$$

Якщо $l_j = l_j(|z_j|)$, то отримуємо поняття цілої функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу в сенсі означення, даного у статтях [8,12]. Якщо ж $l_j(z_j) \equiv 1$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то ціла функція називається *функцією обмеженого індексу за сукупністю змінних* ([15]-[19]). Нарешті, для $n = 1$ це означення збігається з означенням цілої функції обмеженого l-індексу [16].

Найменше таке m, для якого нерівність (1) виконується, називається $\mathbf{L}$*-індексом за сукупністю змінних функції* F та позначається через $N(F, \mathbf{L})$. Крім того, через $N(F, z^0, \mathbf{L})$ позначатимемо $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних функції F у точці z^0, тобто найменше ціле m, для якого нерівність (1) справджується із z^0 замість z. Зрозуміло, що $N(F, \mathbf{L}) = \sup\{N(F, \mathbf{L}, z^0) \colon z^0 \in \mathbb{C}^n\}$.

Для $R \in \mathbb{R}^n_+$, $j \in \{1, \dots, n\}$ та $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$ визначимо

$$\lambda_{1,j}(z_0, R) = \inf_{z \in \mathbb{D}^n[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)]} l_j(z)/l_j(z^0)$$

$$\lambda_{2,j}(z_0, R) = \sup_{z \in \mathbb{D}^n[z^0, R/\mathbf{L}(z^0)]} l_j(z)/l_j(z^0),$$

$$\lambda_{1,j}(R) = \inf_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \lambda_{1,j}(z_0, R),$$

$$\lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \lambda_{2,j}(z_0, R),$$

$$\Lambda_k(R) = (\lambda_{k,j}(R), \dots, \lambda_{k,n}(R)) \quad (k \in \{1, 2\}).$$

Через Q^n позначимо клас функцій $\mathbf{L}(z)$, які для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$ задовольняють умову

$$0 < \Lambda_1(R) \leq \Lambda_2(R) < +\infty. \tag{2}$$

Відзначимо також, що інший підхід до введення поняття цілої чи аналітичної функції обмеженого індексу у багатовимірному випадку використовує похідну за напрямком, див., наприклад, [1,5,9,10,11,25,26].

2. Простори цілих функцій обмеженого L-індексу за сукупністю змінних. Для цілих у $\mathbb{C}^n$ функцій

$$F(z) = \sum_{J \geq \mathbf{0}} f_J z^J, \quad G(z) = \sum_{J \geq \mathbf{0}} g_J z^J$$

покладемо

$$d(F, G) = \sup\{|f_{\mathbf{0}} - g_{\mathbf{0}}|, |f_J - g_J|^{1/\|J\|} : J \in \mathbb{Z}^n_+\},$$

а простір усіх цілих функцій з такою метрикою позначимо E^n. Також позначимо через $B^n(\mathbf{L})$ множину усіх цілих в $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, а через $B^n_\nu(\mathbf{L})$ — множину функцій із $B^n(\mathbf{L})$ таких, що $N(F,\mathbf{L}) \le \nu$. Зрозуміло, що

$$B^n(\mathbf{L}) = \bigcup_{\nu=0}^{+\infty} B^n_\nu(\mathbf{L}).$$

Нам потрібне таке твердження.

Лема 1 ([12]). *] Нехай $F \in E^n$. Тоді для будь-яких $\nu_0 \in \mathbb{N}$ та $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що для $G \in E^n$ такої, що $d(F,G) < \delta$ виконується $d(F^{(K)}, G^{(K)}) < \varepsilon$ для всіх $K \in \mathbb{Z}^n_+$, $\|K\| \le \nu_0$.*

Теорема 1. *Нехай $F \in E^n$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$ та $N(F,\mathbf{L}) > \nu$. Тоді існує $\delta > 0$ таке, що для кожної функції $G \in E^n$ з нерівності $d(F,G) < \delta$ випливає, що $N(G,\mathbf{L}) > \nu$.*

Доведення. Оскільки $N(F,\mathbf{L}) > \nu$, то знайдуться $z^0 \in \mathbb{C}^n$ та $\nu_0 > \nu$, для яких $N(F,\mathbf{L},z^0) = \nu_0 > \nu$. Водночас для всіх $\|K\| \le \nu_0 - 1$ та деякого K^0, $\|K^0\| = \nu_0$ справджується нерівність

$$\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} < \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}.$$

Тоді існує $\delta^* > 0$ таке, що

$$\frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} + \delta^* < \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)}. \qquad (3)$$

Використовуючи нерівність $a - b \ge c - d - |a-c| - |b-d|$, ми отримуємо

$$\frac{|G^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} - \frac{|G^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} \ge$$
$$\ge \frac{|F^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} - \frac{|F^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} -$$
$$-\frac{\big||G^{(K^0)}(z^0)| - |F^{(K^0)}(z^0)|\big|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} -$$
$$-\frac{\big||G^{(K)}(z^0)| - |F^{(K)}(z^0)|\big|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)}. \qquad (4)$$

Звідси випливає, що

$$||G^{(K)}(z^0)| - |F^{(K)}(z^0)|| \le$$
$$\le |G^{(K)}(z^0) - F^{(K)}(z^0)| \le |K!(f_K - g_K)| +$$
$$+ \sum_{J \ne \mathbf{0}} \frac{(K+J)!}{J!} |f_{J+K} - g_{J+K}||(z^0)^J| \le$$
$$\le d(F^{(K)}, G^{(K)}) + \sum_{J\ne\mathbf{0}} d(F^{(K)}, G^{(K)})^{\|J\|}|(z^0)^J|. \qquad (5)$$

За лемою 1 число δ можна вибрати так, що при $d(F,G) < \delta$ також виконуються нерівності $d(F^{(K)}, G^{(K)}) < \varepsilon < 1$ та $d(F^{(K)}, G^{(K)})|z^0_i| < \varepsilon < 1$ для всіх $i \in \{1,\ldots,n\}$ та $\|K\| \le \nu_0$. З нерівності (5) випливає, що

$$\Big||G^{(K)}(Z^0)| - |F^{(K)}(Z^0)|\Big| \le \varepsilon + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\|J\|=k} \varepsilon^{\|J\|} =$$
$$= \varepsilon - 1 + \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k\Big)^n = \frac{1-(1-\varepsilon)^{n+1}}{(1-\varepsilon)^n} \qquad (6)$$

Підставляючи (3) та (6) в (4), для $\|K\| \le \nu_0 - 1$ маємо

$$\frac{|G^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} - \frac{|G^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)} > \delta^* -$$
$$-\left\{\frac{1-(1-\varepsilon)^{n+1}}{(1-\varepsilon)^n}\left(\frac{1}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{K!\mathbf{L}^K(z^0)}\right)\right\}.$$

З огляду на довільність ε, це означає, що

$$\frac{|G^{(K^0)}(z^0)|}{K^0!\mathbf{L}^{K^0}(z^0)} > \frac{\delta^*}{2} + \frac{|G^{(K)}(z^0)|}{K!\mathbf{L}^K(z^0)},$$

тобто $N(G,\mathbf{L}) \ge N(G,\mathbf{L},z^0) \ge \nu_0 > \nu$. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Множина $B^n_\nu(\mathbf{L})$ замкнена у E^n.*

Через K^n позначимо клас додатних неперервних функцій $\mathbf{L}(z)$, для яких існує $c > 0$ таке, що для кожного $R \in \mathbb{R}^n_+$ та $j \in \{1,\ldots,n\}$

$$\max_{\Theta_1,\Theta_2\in[0,2\pi]^n} \frac{l_j(Re^{i\Theta_2})}{l_j(Re^{i\Theta_1})} \le c.$$

Нам знадобиться така лема.

Лема 2 ([7]). *Якщо* $\mathbf{L} \in Q^n \cap K^n$, $\min\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n} l_j(Re^{i\Theta})$ *неспадна за кожною змінною* r_k, $k, j \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq j$ *та ціла функція* F *має обмежений* $\mathbf{L}$*-індекс за сукупністю змінних, то*

$$\ln \max\{|F(z)|\colon z \in T^n(\mathbf{0}, R)\} = = O\left(\min_{\Theta\in[0,2\pi]^n} \sum_{j=1}^{n} \int_0^{r_j} l_j(R^{(j)}e^{i\Theta})dt\right)$$

при $|R| \to \infty$, *де* $R^{(j)} = (r_1, \dots, r_{j-1}, t, r_{j+1}, \dots, r_n)$.

Теорема 2. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n \cap K^n$, $\min\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n} l_j(Re^{i\Theta})$ *неспадна за кожною змінною* r_k, $k, j \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq j$. *Тоді* $B^n(\mathbf{L})$ *є простором першої категорії.*

Доведення. Нам потрібно показати, що для будь-якого $\nu \in \mathbb{Z}_+$ множина $B^n_\nu(\mathbf{L})$ ніде не щільна в $B^n(\mathbf{L})$. З огляду на $B^n(\mathbf{L}) = \bigcup_\nu B^n_\nu(\mathbf{L})$ це означатиме справедливість твердження теореми.

Покладемо

$$\psi(r) = \max_{j\in\{1,\dots,n\},\Theta\in[0,2\pi]^n} \left\{\int_0^r l_j(r^{i\theta_1}, \dots, re^{i\theta_j - 1}, te^{i\theta_j}, re^{i\theta_{j+1}} \dots, re^{i\theta_n})dt\right\}.$$

Нехай $\Phi(r)$ буде додатною, опуклою, неспадною на $(-\infty, +\infty)$ функцією такою, що $\psi(r) = o(\Phi(\ln r))$, $r \to \infty$. За теоремою Клуні [13] існує ціла функція $F(z_1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_1^k$ із $c_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$ така, що

$$\ln M(r, F) \sim \Phi(\ln r), \quad r \to \infty,$$

де

$$M(r, F) = \max\{|F(z_1)|: |z_1| = r\}.$$

Виберемо $R = (r, \dots, r)$. Тоді

$$\frac{\ln M(r, F)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\int\limits_0^r l_j(r^{i\theta_1}, ..., re^{i\theta_j - 1}, te^{i\theta_j}, re^{i\theta_{j+1}}, ..., re^{i\theta_n})dt} \geq$$

$$\geq \frac{\ln M(r, F)}{n\psi(r)} \to \infty, \tag{7}$$

при $|R| \to \infty$. За лемою 2, якщо $N(F, \mathbf{L}) < \infty$ то ліва частина в (7) обмежена. Тому це означає, що функція F необмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Навіть більше, така функція

$$\widetilde{F}_j(z) = P_j(z_1, \dots, z_n) + \sum_{k=j+1}^{\infty} c_k z_1^k$$

також є необмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, де P_j довільний многочлен степеня j за усіма змінними.

Множина $B^n_\nu(\mathbf{L})$ ніде не щільна в $B^n(\mathbf{L})$, якщо доповнення її замикання щільне в $B^n(\mathbf{L})$, тобто $\overline{B^n(\mathbf{L}) \setminus \overline{B^n_\nu(\mathbf{L})}} = B^n(\mathbf{L})$. Отже, слід довести, що будь-яка фунція з $B^n_\nu(\mathbf{L})$ може бути апроксимована функціями із $B^n(\mathbf{L}) \setminus B^n_\nu(\mathbf{L})$.

Нехай $f(z) = \sum\limits_{K\geq\mathbf{0}} f_K z^K$ — функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних $\nu(f, L) = \nu_o < \infty$. Покладемо

$$f_j(z) = \sum_{||K||\leq j} f_K z^K + \sum_{k=j+1}^{\infty} c_k z_1^k$$

та

$$f_{j,m}(z) = \sum_{||K||\leq j} f_K z^K + \sum_{k=j+1}^{m} c_k z_1^k \quad (m > j).$$

Очевидно, що $d(f, f_j) \to 0$ при $j \to \infty$ та $d(f_j, f_{j,m}) \to 0$ при $m \to \infty$. Але ця функція f_j необмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, тобто $N(f_j, \mathbf{L}) > \nu_0$. Тоді за теоремою 1 отримуємо, що $N(f_{j,m}, \mathbf{L}) > \nu_0$ для всіх досить великих m. Отже, $f_{j,m} \in B^n(\mathbf{L}) \setminus B^n_{\nu_o}(\mathbf{L})$, бо $N(f_{j,m}, \mathbf{L}) \leq m$ та $d(f, f_{j,m}) \leq d(f, f_j) + d(f_j, f_{j,m}) \to 0$ при $m, j \to \infty$. Звідси маємо, що $B^n_{\nu_o}(L)$ ніде не щільна в $B^n(L)$. Тому простір $B^n(L)$ є простором першої категорії.

Теорема 3. *Нехай* $\mathbf{L} \in Q^n \cap K^n$, $\min\limits_{\Theta\in[0,2\pi]^n} l_j(Re^{i\Theta})$ *неспадна за кожною змінною* r_k, $k, j \in \{1, \dots, n\}$, $k \neq j$. *Тоді для будь-якого* $\nu \in \mathbb{Z}_+$ $B^n(\mathbf{L}) \setminus B^n_\nu(\mathbf{L})$ *та* $E^n \setminus B^n(\mathbf{L})$ *щільні в* E^n.

Доведення. Для будь-якої функції $f \in B^n(\mathbf{L})$ будуємо функцію $f_j \in E^n \setminus B^n(\mathbf{L})$ таку ж, як у доведенні теореми 2. Тоді $d(f, f_j) \to 0$ $(j \to \infty)$. А це й означає, що $E^n \setminus B^n(\mathbf{L})$ щільна в E^n.

Нехай $f \in E^n \setminus (B^n(\mathbf{L}) \setminus B^n_\nu(\mathbf{L}))$, тобто або f необмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, або $N(f, \mathbf{L}) \le \nu$. Доведемо, що в кожному з цих двох випадків f є границею функцій f_j, $\nu < N(f_j, \mathbf{L}) < \infty$.

Нехай f – функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Тоді покладемо $f_j(z) = \sum_{0 \le \|K\| \le j} f_K z^K$. Очевидно, що $\lim\limits_{j\to\infty} d(f, f_j) = 0$. Звідси, за лемою 1, $N(f_j, \mathbf{L}) > \nu$ для всіх досить великих j.

Нехай $f \in B^n_\nu(\mathbf{L})$. Тоді можна вибрати $f_{j,m} \in B^n(\mathbf{L}) \setminus B^n_{\nu_o}(\mathbf{L})$, як у доведенні теореми 2. Звісно, $d(f, f_{j,m}) \to 0$ $(m, j \to \infty)$. Теорему 3 доведено.

3. Існування неперервної функції $\mathbf{L}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ такої, що ціла функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних. У одновимірному випадку М.М. Шеремета [20] (див. також [21]) висунув гіпотезу, що якщо ціла функція f має обмежену кратність нулів, то існує додатна неперервна функція l така, що f обмеженого l-індексу. Згодом М. Т. Бордуляк [22] довела цю гіпотезу. Інші цікаві проблеми, пов'язані з існуванням цілої функції обмеженого l-індексу для заданої l, розглянуті в [23,24].

У багатовимірному випадку відомий аналог згаданого твердження для цілих функцій обмеженого L-індексу за напрямком [25].

Для цілих функцій обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних аналог такого твердження не був відомий. Це обумовлено тим фактом, що означення [8] спершу було дане для $\mathbf{L}(z) = (l_1(|z_1|), \ldots, l_n(|z_n|))$. Навіть більше, функції з цього класу мають властивість: $\ln\max\{|F(z)| : z \in \mathbb{T}^n(\mathbf{0}, R)\} = O(\sum_{j=1}^n l_j(r_j))$ при $r_1 + \ldots + r_n \to +\infty$. Останнє співвідношення, зокрема є свідченням того, що функція обмеженого $\mathbf{L}$-індексу в сенсі означення Бордуляк-Шеремети у певному сенсі має властивості схожі на властивості функції з відокремленими змінними.

Водночас, це означення[1,2] перенесено на ширший клас вектор-функцій $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$, де $l_j : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ неперервна функція, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Тому виникає таке природне питання: *Чи існує неперервна вектор-функція $\mathbf{L}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ для будь-якої цілої функції F із обмеженою кратністю нульової множини така, що F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних?*

Нижче ми дамо ствердну відповідь на це запитання.

Нехай F — ціла функція, $\mathbb{Z}_F$ — нульова множина функції F. Якщо $z^0 \in Z_F$, то через $p_F(z^0)$ позначимо "кратність" нульової точки z^0 функції F, тобто, таке ціле число, що для всіх J, $\|J\| < p_F(z^0)$, $F^{(J)}(z^0) = 0$, але, принаймні для одного J, $\|J\| = p_F(z^0)$, виконується $F^{(J)}(z^0) \ne 0$.

Теорема 4. *Для того, щоб для цілої функції F існувала додатна неперервна вектор-функція $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$ така, що $F(z)$ є функцією обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних необхідно та досить, щоби існувало $p \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $p_F(z^0) \le p$ для всіх $z^0 \in Z_F$.*

Доведення.

Необхідність. Для спрощення запису ми скрізь у доведенні вживаємо позначення $p_0 := p_F(z^0)$. Необхідність слідує безпосередньо з означення обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних. Справді, припустимо від супротивного, що

$$(\forall p \in \mathbb{Z}_+)(\exists z^0 \in Z_F): \quad p_0 > p.$$

Це означає, що для деякого $J^0 \in \mathbb{Z}^+_n$, $\|J^0\| = p_0$, справджується $F^{(J^0)}(z^0) \ne 0$ та $F^{(J)}(z^0) = 0$ для всіх J, $\|J\| \le p_0 - 1$ та $z^0 \in Z_F$. Тому, $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних в точці z^0 не менший за $p_0 > p$, тобто

$$N(F, \mathbf{L}, z^0) \ge p_0 > p.$$

Якщо $p \to +\infty$, то ми отримуємо $N(F, \mathbf{L}, z^0) \to +\infty$. А це суперечить обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних функції F.

Достатність. Нехай p — найменше натуральне число таке, що $(\forall z^0 \in Z_F)\colon \ p_0 \le p$. Для A, $B \in \mathbb{R}^n_+$ позначимо

$$\max\{A, B\} = (\max\{a_1, b_1\}, \ldots, \max\{a_n, b_n\}).$$

Визначимо $K_R = \{z \in \mathbb{C}^n \colon z \in \mathbb{D}^n[\mathbf{0}, R+\mathbf{1}] \setminus \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, \max\{\mathbf{0}, R-\mathbf{1}\})\}$ для всіх $R \geq \mathbf{0}$ та

$$m_1(R) = \min_{z^0 \in K_R \cap Z_F} \left\{ \frac{1}{J^0!} |F^{(J^0)}(z^0)| \right.$$
$$\left. \|J^0\| = p_0, F^{(J^0)}(z^0) \neq 0 \right\}.$$

Позаяк F — ціла функція, то існує $E = E(R) = (\varepsilon_1(R), \ldots, \varepsilon_n(R)) > \mathbf{0}$ така, що

$$\frac{\left|F^{(J^0)}(z)\right|}{J^0!} \geq \frac{m_1(R)}{2}$$

для всіх

$$z \in K_R \cap G_E, \quad G_E = \bigcup_{z^0 \in Z_F} \mathbb{D}^n(z^0, E(R)),$$

і для кожного J^0, що $\|J^0\| = p_0$ та $F^{(J^0)}(z^0) \neq 0$.

Введемо позначення

$$m_2(R) = \min\{|F(z)| \colon z \in \mathbb{D}^n[\mathbf{0}, R+\mathbf{1}], z \notin G_E\},$$
$$Q(R) = \min\{m_1(R)/2, m_2(R)\}.$$

Для довільного $z \in \mathbb{C}^n$ покладемо $R = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$. Тоді бодай одне з чисел $|F(z)|$, $\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!}$ при $\|J\| \leq p$ не менше, ніж $Q(R)$ (відповідно, $\frac{|F^{(J^0)}(z)|}{J^0!}$ для $z \in K_R \cap G_E$ та $|F(z)|$ для $z \in K_R \setminus G_E$). Звідси випливає, що

$$\max\left\{\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!} \colon \|J\| \leq p\right\} \geq Q(R, z^0). \quad (8)$$

Застосовуючи формулу Коші для полікруга $\mathbb{D}^n(z, \mathbf{1})$, встановлюємо, що для всіх J, $\|J\| \geq p+1$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!} = \left|\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n(z,\mathbf{1})} \frac{F(\tau)}{(\tau - z)^{J+\mathbf{1}}} d\tau\right| \leq$$
$$\leq \max\{|F(\tau)| \colon \tau \in \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R+\mathbf{1})\}. \quad (9)$$

Додатну неперервну вектор-функцію $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \ldots, l_n(z))$ виберемо так

$$l_1(z) = \ldots = l_n(z) :=$$
$$= \max\left\{\frac{\max\{|F(\tau)| \colon \tau \in \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R+\mathbf{1})\}}{Q(R)}, 1\right\}.$$

Враховуючи (8) та (9), отримуємо, що для всіх $\|J\| \geq p+1$

$$\frac{|F^{(J)}(z)|/(J!\mathbf{L}^J(z))}{\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \leq p\right\}} \leq \frac{l_1^{-\|J\|}(z)}{Q(R) l_1^{-p}(z)} \times$$
$$\times \max\{|F(\tau)| \colon \tau \in \mathbb{D}^n(\mathbf{0}, R+\mathbf{1})\} \leq$$
$$\leq l_1^{p+1-\|J\|}(z) \leq 1.$$

Звідси маємо, що

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J!\mathbf{L}^J(z)} \leq \max\left\{\frac{|F^{(K)}(z)|}{K!\mathbf{L}^K(z)} \colon \|K\| \leq p\right\}.$$

З огляду на довільність z ціла функція F має обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних.

Через $\mathcal{B}^n$ позначимо множину цілих функцій з рівномірно обмеженою кратністю нульових точок. З доведеної теореми, а також того, що коли $\mathbf{L}_1(z) \leq \mathbf{L}_2(z)$ для всіх $z \in \mathbb{C}^n$ і $F \in B^n(\mathbf{L}_1)$, то $F \in B^n(\mathbf{L}_2)$ (див. [2]), як наслідок випливає таке твердження

Наслідок 2. *Нехай* $\mathbf{L}_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^n_+$ *по-компонентно монотонно зростаюча до* $+\infty$ *послідовність неперервних вектор-функцій. Тоді* $\bigcup_k B^n(\mathbf{L}_k) = \mathcal{B}^n$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bandura A., Skaskiv O.* Entire functions of several variables of bounded index. – Lviv, Chyslo, Publisher I. E. Chyzhykov, 2016. – 128 p.

2. *Bandura A. I., Bordulyak M. T., Skaskiv O. B.* Sufficient conditions of boundedness of **L**-index in joint variables // Mat. Stud. – 2016. – **45**, N1. – P. 12-26.

3. *Бандура А.* Нові критерії обмеженості L-індексу за сукупністю змінних для цілих функцій // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Шевченка. – 2016. – **13**. – С. 58-67.

4. *Бандура А., Петречко Н.* Властивості степеневого розвинення цілої функції обмеженого **L**-індексу за сукупністю змінних // Вісник Львів. ун-тету. Серія мех.-мат. – 2016. – Вип. 82. – С. 27-33.

5. *Bandura A. I.* The metric properties of a space of entire functions of bounded L-index in direction // Prykarpatskyi Visn. Nauk. Tov. Im. Shevchenka. Chyslo, – 2012. – N1(17). – P. 46-52.

6. *Бандура А. І., Скасків О. Б.* Логарифмічна похідна за напрямком та розподіл нулів цілої функції обмеженого L-індексу за напрямком // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, N3. – С. 426-432.

7. *Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Asymptotic estimates of entire functions of bounded **L**-index in joint variables // https://arxiv.org/abs/1701.08276 (submitted to Revista Matematica Complutense).

8. *Бордуляк М. Т., Шеремета М. М.* Обмеженість **L**-індексу цілої функції декількох змінних // Доп. АН України – 1993. – N9. – С. 10-13.

9. *Bandura A. I., Skaskiv O. B.* Open problems for entire functions of bounded index in direction // Mat. Stud. – 2015. – **43**, N1. – P. 103–109. dx.doi.org/10.15330/ms.43.1.103-109.

10. *Bandura A. I.* Sum of entire functions of bounded L-index in direction // Mat. Stud. – 2016. – **45**, N2. – P. 149–158. dx.doi.org/10.15330/ms.42.2.149-158

11. *Bandura A., Skaskiv O.* Analytic in the unit ball functions of bounded L-index in direciton // (submitted in Rocky Mountain Journal of Mathematics) https://arxiv.org/abs/1501.04166

12. *Бордуляк М. Т.* Простір цілих в $\mathbb{C}^n$ функцій обмеженого **L**-індексу // Мат. Студ. – 1995. – **4**. – С. 53-58.

13. *Clunie J.* On entire functions having prescribed growth // Canad. J. Math. – 1965. – **17**. – P. 396-404.

14. *Ekblaw K. A.* The functions of bounded index as a subspace of a space of entire functions // Pacific J. Math. – 1971. – **37**. – P. 353-355.

15. *Krishna G. J., Shah S. M.* Functions of bounded indices in one and several complex variables // In: Mathematical essays dedicated to A.J. Macintyre, Ohio Univ. Press, Athens, Ohio, 1970, P. 223-235.

16. *Kuzyk A. D., Sheremeta M. M.* Entire functions of bounded l-distribution of values // Math. notes. – 1986. – **39**, N1. – P. 3-8.

17. *Lepson B.* Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index // Proc. Sympos. Pure Math. – 1968. – **2**. – P. 298-307.

18. *Nuray F., Patterson R.F.* Multivalence of bivariate functions of bounded index // Le Matematiche. – 2015. – **70**, N2. – P. 225-233. dx.doi.org/10.4418/2015.70.2.14

19. *Salmassi M.* Functions of bounded indices in several variables // Indian J. Math. – 1989. – **31**, N3. – P. 249-257.

20. *Sheremeta M.M.* Five open problems in the theory of entire functions // Mat. Stud. – 1996. – **6**. – P. 157-159.

21. *Bordulyak M.T., Sheremeta M.M.* On the existence of entire functions of bounded l-index and l-regular growth // Ukrainian Math. J. – 1996. – **48**, N9. – P. 1322-1340.

22. *Bordulyak M.T.* A proof of Sheremeta conjecture concerning entire function of bounded l-index // Mat. Stud. – 1999. – **12**, N1. – P. 108-110.

23. *Goldberg A.A., Sheremeta M.M.* Existence of an entire transcendental function of bounded l-index // Math. Notes. – 1995. – **57**, N1-2. – P. 88-90.

24. *Sheremeta M.M.* Remark to existence theorem for entire function of bounded l-index // Mat. Stud. – 2000. – **13**, N1. – P. 97-99.

25. *Bandura A.I., Skaskiv O.B.* Boundedness of L-index in direction of functions of the form $f(\langle z, m\rangle)$ and existence theorems // Mat. Stud. – 2014. – **41**, N1. – P. 45-52.

26. *Bandura A., Skaskiv O.* Entire functions of several variables of bounded L-index in direction and of bounded index in joint variables // arXiv: 1508.07486v1 [math.CV] 29 Aug 2015, 231 p.