УДК 517.956

©2017 р. А.О. Широковських

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗМІННИМИ СИМВОЛАМИ

Даються означення та властивості фундаментального розв'язку нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами, побудованими за змінними символами. Встановлюється розв'язність багатоточкової задачі в просторах типу W, дається інтегральне зображення розв'язку.

There are given definitions and properties of fundamental solution for nonlocal multipoint with respect to time problem for evolution equations with pseudo-differential operators constructed at variable symbols. The solvability of multipoint problem in the W type spaces is installed and the integral image interpretation of solution is given.

Одним із узагальнень задачі Коші для рівнянь з частинними похідними є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0$, $\{t_1, ..., t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m\} \subset R$, $m \in N$ - фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші). Нелокальні за часом задачі відносяться до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Нелокальні задачі виникають при моделюванні різних процесів і задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами (див., напр., [1, 2]).

Дослідженням нелокальних крайових задач займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (див., напр., [3–11]). Отримані важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, сформульовані умови регулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У цій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами, побудованими за змінними символами за допомогою перетворення Фур'є. Аналітичність функції-символа псевдодиференціального оператора дозволяє розуміти такий оператор як оператор диференціювання "нескінченного порядку"із змінними коефіцієнтами, який діє у певному просторі аналітичних функцій. При цьому дається означення фундаментального розв'язку зазначеної задачі та досліджуються властивості такого розв'язку, встановлюється розв'язність багатоточкової задачі. Знайдено інтегральне зображення розв'язку.

1. Простори типу W та типу S. Розглянемо функцію $\omega : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, яка є неперервною і зростаючою, причому $\omega(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \omega(x) = +\infty$. Для $x \geq 0$ покладемо $\Omega(x) = \int\limits_0^x \omega(\xi)d\xi$. Функція Ω володіє властивостями: 1) Ω - диференційовна, зростаюча на $[0,+\infty)$ функція, причому $\Omega(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \Omega(x) = +\infty$; 2) Ω є опуклою донизу функцією [12, с. 8], тобто

$$\forall\{x_1, x_2\} \subset [0,+\infty) :$$

$$\Omega(x_1) + \Omega(x_2) \leq \Omega(x_1 + x_2).$$

Довизначимо функцію Ω на $(-\infty, 0]$ парним чином. Поруч розглянемо функцію $\mu : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$, яка володіє такими ж властивостями, що і функція ω.

Для $x \geq 0$ покладемо $M(x) = \int\limits_0^x \mu(\xi)d\xi$, $M(-x) = M(x)$. За допомогою функцій M і Ω Б.Л. Гуревич [13] увів серію просторів, названих ним просторами типу W. Наведемо означення деяких із цих просторів.

Простір W_M^Ω будується за функціями Ω та M і визначається як сукупність цілих функцій $\varphi : C \to C$, які задовольняють нерівність $|\varphi(z)| \leq \tilde{c}\exp\{M(\tilde{a}x) + \Omega(\tilde{b}y)\}$, $z = x + iy$, з деякими додатними сталими $\tilde{c}, \tilde{a}, \tilde{b}$, залежними лише від функції φ. W_M^Ω можна подати як об'єднання зліченно-нормованих просторів $W_{M,a}^{\Omega,b}$, де $W_{M,a}^{\Omega,b}$ складається з тих функцій $\varphi \in W_M^\Omega$, для яких правильними є нерівності $|\varphi(x + iy)| \leq$ $\leq \tilde{c}\exp\{-M(\bar{a}x) + \Omega(\bar{b}y)\}$, $z = x + iy \in C$, де $\bar{a}$ - довільна додатна стала, менша за $\tilde{a}$, $\bar{b}$ - довільна стала, більша за $\tilde{b}$. Якщо для $\varphi \in W_{M,a}^{\Omega,b}$ покласти

$$||\varphi||_{\delta\rho} = \sup_{z\in\mathbb{C}}[|\varphi(z)|\times$$

$$\times \exp\{-\Omega((\tilde{b} + \rho)y) + M(\tilde{a}(1 - \delta)x)\}],$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \{1/n, n \geq 2\},$$

то з цими нормами простір $W_{M,a}^{\Omega,b}$ стає повним досконалим зліченно-нормованим простором [12, с. 16]. Об'єднання просторів $W_{M,a}^{\Omega,b}$ за всіма $a = 1, \frac{1}{2}, ...$ та $b = 1, 2, ...$ співпадає з простором W_M^Ω.

Простори типу W перетворення Фур'є відображаються в простори типу W. Для того, щоб сформулювати відповідні твердження, наведемо означення функцій, двоїстих за Юнгом. Нехай функції $M(x)$ та $\Omega(y)$ визначаються за допомогою функцій $\mu(\xi)$ та $\omega(\eta)$ відповідно. Якщо функції μ та ω взаємно обернені, тобто $\mu(\omega(\eta)) = \eta$, $\omega(\mu(\xi)) = \xi$, то функції $M(x)$ та $\Omega(y)$ називаються двоїстими за Юнгом. Прикладами взаємно двоїстих функцій є функції $M(x) = x^p/p$, $\Omega(y) = y^q/q$, $1/p + 1/q = 1$.

Символом $W_M^\Omega(R)$ позначимо сукупність функцій, заданих на R, які є звуженням функцій з простору W_M^Ω на R. Правильною є формула [12, с. 32]: $F[W_M^\Omega(R)] = W_{M_1}^{\Omega_1}(R)$, де F - перетворення Фур'є, Ω_1 та M_1 - функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M та Ω.

Для довільно фіксованих $\alpha, \beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta(R) \equiv S_\alpha^\beta := \{\varphi \in C^\infty(R)|\ \exists c, A, B > 0$$

$$\forall\{k, n\} \subset Z_+\ \forall x \in R :$$

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)| \leq cA^kB^nk^{k\alpha}n^{n\beta}\}.$$

Введені простори можна охарактеризувати так [14, с. 210]. Простори S_α^β нетривіальні при $\alpha + \beta \geq 1$ і утворюють щільні в $L_2(R)$ множини. S_α^β складається з тих й лише тих функцій $\varphi \in C^\infty(R)$, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq cB^nn^{n\beta}\exp(-a|x|^{1/\alpha}),$$

$$n \in Z_+,\ \ x \in R,$$

з деякими додатними сталими c, a, B, залежними від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій $\varphi \in C^\infty(R)$, які аналітично продовжуються в комплексну площину і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x + iy)| \leq c\exp(-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}),$$

$$c, a, b > 0.$$

Зазначимо, що $S_\alpha^\beta \equiv W_M^\Omega$, де $M(x) = x^{1/\alpha}$, $\Omega(y) = y^{1/(1-\beta)}$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta \geq 1$.

Простори S_α^β перетворенням Фур'є відображаються у простори такого ж типу, а саме, правильною є формула [14, с. 245]: $F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha$.

1. Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами, побудованими за змінними символами. Розглянемо функцію $a(t, x; \sigma)$, задану на $[0, T]\times R\times R$, яка задовольняє умови:

1) $a(t, x; \sigma)$ - неперервно диференційовна функція аргументу $t \in [0, T]$ (при фіксованих x, σ); $a(t, x; \sigma)$ - неперервно диференційовна обмежена на R функція аргументу x (при фіксованих t, σ);

2) при фіксованих t, x функція $a(t, x; \sigma)$, як функція змінної σ, допускає аналітичне

продовження у всю комплексну площину, при цьому

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists c_\varepsilon>0 \quad \forall\sigma+i\tau\in C:$$

$$|a(t,x;\sigma+i\tau)|\leq c_\varepsilon\exp\{M(\varepsilon\sigma)+\Omega(\varepsilon\tau)\},$$

$$\forall(t,x)\in\Pi_T\equiv[0,T]\times R$$

(тобто, $a(t,x;\cdot)$ -мультиплікатор у просторі W_M^Ω);

$$\exists c,a,b>0:$$

$$|\exp\{a(t,x;\sigma+i\tau)\}|\leq c\exp\{-M(a\sigma)+\Omega(b\tau)\},$$

$$\forall(t,x)\in\Pi_T$$

(тобто, $\exp\{a(t,x;\cdot)\}\in W_M^\Omega$).

Вважаємо також, що функція M задовольняє умову: $\exists c_0>0 \ \forall x\in R$: $M(x)\geq c_0|x|^\alpha$, де $\alpha>2$ - фіксований параметр.

Розглянемо псевдодиференціальний оператор A, побудований за символом $a(t,x;\sigma)$:

$$(A\psi)(x):=F^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)F_{x\to\sigma}[\psi(x)](\sigma)](x),$$

$$\forall\psi\in W_{M_1}^{\Omega_1}(R),$$

де M_1, Ω_1 - функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій Ω та M. Із властивостей функцій $a(t,x;\sigma)$ випливає, що $A\psi\in K(R)$ при кожному $t\in[0,T]$, де $K(R)$ - нормований простір, який складається з неперервних обмежених на R функцій φ з нормою $||\varphi||=\sup\limits_{x\in R}|\varphi(x)|$. Зазначимо також, що A можна розуміти як оператор диференціювання нескінченного порядку (див. [15]), тобто $A=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(t,x)(-iD_x)^k$, за умови, що $a(t,x;\sigma)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(t,x)\sigma^k$ - ряд Тейлора функції-символа a за змінною σ (при фіксованих t,x).

У смузі $\Pi'_T=\{(t,x):0\leq\tau<t\leq T,\ x\in R\}$ розглянемо задачу про знаходження розв'язку еволюційного рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t=Au(t,x),\ \ (t,x)\in\Pi'_T, \qquad (1)$$

який задовольняє умови:

$$u(t,x)=u_1(t,x)+u_2(t,x),$$

$$\mu\lim_{t\to\tau+0}u_1(t,x)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}u_1(t,x)=\varphi(x), \qquad (2)$$

$$\lim_{t\to\tau+0}u_2(t,x)=0, \qquad (3)$$

у кожній точці $x\in R$ для фіксованої функції $\varphi\in W_{M_1}^{\Omega_1}(R)$, де $m\in N$, $\{\mu,\mu_1,...,\mu_m\}\subset\subset(0,+\infty)$, $\{t_1,...,t_m\}\subset(\tau,T]$ - фіксовані числа, причому $\mu>m\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k$, $0\leq\tau<t_1<<...<t_m=T$. Задачу (1)-(3) називатимемо нелокальною за часом m-точковою (багатоточковою) задачею для рівняння (1).

Під фундаментальним розв'язком задачі (1)-(3) розумітимемо функцію

$$Z(t,x;\tau,\xi)=V(t,x;\tau,\xi)+\Gamma(t,x;\tau,\xi),$$

$$(t,x)\in\Pi'_T,\quad 0\leq\tau<t\leq T,\quad \xi\in R,$$

яка володіє властивостями:

1) $LZ(t,x;\tau,\xi)=0$, $L\equiv L(t,x;A,\partial/\partial t):=$ $:=\partial/\partial t-A$, тобто Z, як функція (t,x) (при фіксованих τ,ξ) є розв'язком рівняння (1);

2) $\mu\lim\limits_{t\to\tau+0}\int\limits_R V(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi-$

$$-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}\int_R V(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi=\varphi(x),$$

$$\lim_{t\to\tau+0}\int_R\Gamma(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi=0$$

у кожній точці $x\in R$ для довільної функції $\varphi\in W_{M_1}^{\Omega_1}(R)$.

Для побудови функції Z скористаємося методом Леві (методом параметрикса). З цією метою символ $a(t,x;\sigma)$ зафіксуємо у точці $(t,x)=(\chi,\xi)$, $\chi\in[\tau,T]$, $\xi\in R$ і розглянемо m-точкову задачу для еволюційного рівняння із сталим символом $a(\chi,\xi;\sigma)$:

$$L(\chi,\xi;A,\partial/\partial t)v(t,x)=0,\quad (t,x)\in\Pi'_T, \qquad (4)$$

$$\mu\lim_{t\to\tau+0}v(t,x)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\lim_{t\to t_k}v(t,x)=\varphi(x), \qquad (5)$$

$$\varphi\in W_{M_1}^{\Omega_1}(R).$$

Розв'язок $v\in C^1((\tau,T],W_{M_1}^{\Omega_1}(R))$ задачі (4), (5) шукатимемо за допомогою перетворення

Фур'є. Безпосередньо знаходимо, що

$$v(t,x) = \int\limits_R G(t-\tau, x-\omega; \chi, \xi)\varphi(\omega)d\omega =$$

$$= G(t-\tau, x; \chi, \xi) * \varphi(x),$$

де $G(t-\tau, x; \chi, \xi) = F^{-1}_{\sigma\to x}[Q(t-\tau, \chi; \xi, \sigma)]$,

$$Q(t-\tau, \chi; \xi, \sigma) = \exp\{(t_k - \tau)a(\chi, \xi; \sigma)\}\times$$

$$\times\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{(t_k-\tau)a(\chi,\xi;\sigma)\}\Big)^{-1}.$$

Властивості функції G залежать від властивостей функції Q, оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Використовуючи результати, одержані в [16, с. 192], прийдемо до твердження: існують сталі $c, a, b > 0$, не залежні від t, τ, χ, ξ такі, що для функції Q та її похідних (за змінною σ) справджуються оцінки

$$|D^n_\sigma Q(t-\tau, \chi; \xi, \sigma)| \le c\left(\frac{be}{\rho_n}\right)^n n! e^{-(t-\tau)M(a\sigma)}, \tag{6}$$

$$n \in Z_+, \quad \sigma \in R,$$

де ρ_n - розв'язок рівняння $\sigma\omega(\sigma) = n$, $n \in Z_+$, $\omega = \Omega'$.

Внаслідок формули Стірлінга $n! = \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}e^{\theta/(12n)}$, $0 < \theta < 1$. Тоді, використавши (6) та оцінку $M(\sigma) \ge c_0|\sigma|^\alpha$, $\sigma \in R$, знайдемо, що

$$|D^q_\sigma Q(t-\tau, \chi; \xi, \sigma)| \le$$

$$\le ce\sqrt{2\pi}\sqrt{q}\left(\frac{q}{e}\right)^q \left(\frac{be}{\rho_q}\right)^q \exp\{-(t-\tau)\tilde{c}_0|\sigma|^\alpha\} \le$$

$$\le c_2 b^q q^q \exp\{-\tilde{c}_0(t-\tau)|\sigma|^\alpha\}, \quad q \in Z_+,$$

де $c_2 = cc_1e\sqrt{2\pi}$ (тут враховані властивості послідовності $\{\rho_q, q \in Z_+\}$; див. [16, с. 168]). Безпосередньо переконуємося в тому, що справджуються нерівності

$$|\sigma^k \exp\{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha\}| \le (t-\tau)^{-k/\alpha}B^k k^{k/\alpha},$$

$$k \in Z_+,$$

де $c_0' = \tilde{c}_0/2$, $B = (\alpha\tilde{c}_0{}'e)^{-1/\alpha}$. З останньої нерівності випливають оцінки

$$|\sigma^k D^q_\sigma Q(t-\tau, \chi; \xi, \sigma)| \le$$

$$\le c_2 B^k (t-\tau)^{-k/\alpha} k^{k/\alpha} b^q q^q \times \tag{7}$$

$$\times \exp\{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha\}.$$

На підставі оцінок (7) робимо висновок, що при $t > \tau$ функція Q, як функція аргументу σ, є елементом простору $S^1_{1/\alpha}$.

Далі скористаємося співвідношеннями

$$x^q D^k_x F[\varphi](x) = i^{k+q}F[(\sigma^k\varphi(\sigma))^{(q)}] =$$

$$= i^{k+q}\int\limits_R (\sigma^k\varphi(\sigma))^{(q)} e^{ix\sigma}d\sigma,$$

$$\{k,q\} \subset Z_+, \quad \varphi \in S^1_{1/\alpha}.$$

Отже,

$$x^q D^k_x G(t-\tau, x; \chi, \xi) = (2\pi)^{-1}(-1)^q i^{k+q}\times$$

$$\times\int\limits_R (\sigma^k Q(t-\tau, \chi; \xi, -\sigma))^{(q)} e^{-ix\sigma}d\sigma.$$

Із результатів, наведених в [14, с. 243] випливає, що подвійна послідовність $m_{kq} = k^{k/\alpha}q^q$, $\{k, q\} \subset Z_+$, задовольняє нерівність

$$kq\frac{m_{k-1,q-1}}{m_{kq}} \le \gamma(k+q), \quad \gamma > 0.$$

Тоді, застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, оцінки (7) та останню нерівність знайдемо, що

$$|(\sigma^k Q(t-\tau, \chi; \xi, -\sigma))^{(q)}| =$$

$$= \left|\sum_{p=0}^{q} C^p_q (\sigma^k)^{(p)} Q^{(q-p)}(t-\tau, \chi; \xi, -\sigma)\right| \le$$

$$\le |\sigma^k Q^{(q)}(t-\tau, \chi; \xi, -\sigma)| +$$

$$+kq|\sigma^{k-1}Q^{(q-1)}(t-\tau, \chi; \xi, -\sigma)| + \frac{k(k-1)}{2}\times$$

$$\times q(q-1)|\sigma^{k-2}Q^{(q-2)}(t-\tau, \chi; \xi, -\sigma)| + ... \le$$

$$\le c_2\Big[B^k b^q m_{kq}(t-\tau)^{-k/\alpha} +$$

$$+kqB^{k-1}b^{q-1}m_{k-1,q-1}(t-\tau)^{-(k-1)/\alpha} +$$

$$+\frac{k(k-1)}{2}q(q-1)B^{k-2}b^{q-2}m_{k-2,q-2}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-(k-2)/\alpha} + ...\Big] e^{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha} \le$$

$$\le c_2 B^k b^q m_{kq}(t-\tau)^{-k/\alpha}\times$$

$$\times\Big[1+\frac{T^{1/\alpha}}{bB}kq\frac{m_{k-1,q-1}}{m_{kq}}+\frac{1}{2}\frac{T^{2/\alpha}}{b^2B^2}\times$$
$$\times kq\frac{m_{k-1,q-1}}{m_{kq}}(k-1)(q-1)\frac{m_{k-2,q-2}}{m_{k-1,q-1}}+....\Big]\times$$
$$\times e^{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha}\le$$
$$\le c_2B^kb^qm_{kq}(t-\tau)^{-k/\alpha}\Big[1+\frac{\gamma T^{1/\alpha}}{bB}(k+q)+$$
$$+\frac{\gamma^2T^{2/\alpha}}{1\cdot2\cdot b^2B^2}(k+q)^2+...\Big]e^{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha}\le$$
$$\le c_2B_1^kb_1^qm_{kq}(t-\tau)^{-k/\alpha}e^{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha}=$$
$$=c_2B_1^kb_1^q(t-\tau)^{-k/\alpha}k^{k/\alpha}q^qe^{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha},$$
де $B_1=Be^{\gamma T^{1/\alpha}/(bB)}$, $b_1=be^{\gamma T^{1/\alpha}/(bB)}$.

Отже,

$$|x^qD_x^kG(t-\tau,x;\chi,\xi)|\le$$
$$\le c_2(2\pi)^{-1}B_1^kb_1^q(t-\tau)^{-k/\alpha}k^{k/\alpha}q^q\times$$
$$\times\int_R\exp\{-c_0'(t-\tau)|\sigma|^\alpha\}d\sigma\le$$
$$\le c_3B_1^kb_1^q(t-\tau)^{-(k+1)/\alpha}k^{k/\alpha}q^q,\ \{k,q\}\subset Z_+.$$
Тоді
$$|D_x^kG(t-\tau,x;\chi,\xi)|\le$$
$$\le c_3B_1^k(t-\tau)^{-(k+1)/\alpha}k^{k/\alpha}\inf_q\frac{b_1^qq^q}{|x|^q}\le$$
$$\le c_4B_1^k(t-\tau)^{-(k+1)/\alpha}k^{k/\alpha}e^{-b_0|x|},\ x\in R,\ k\in Z_+,$$
де $b_0=b_1^{-1}$.Таким чином, правильним є наступне твердження.

Лема 1. *Функція G, як функція змінної x, є елементом простору $S_1^{1/\alpha}$. Для функції G та її похідних (за змінною x) справджуються нерівності*
$$|D_x^kG(t-\tau,x;\chi,\xi)|\le$$
$$\le c_4B_1^k(t-\tau)^{-(k+1)/\alpha}k^{k/\alpha}e^{-b_0|x|},\ k\in Z_+,\ x\in R,$$
сталі $c_4,B_1,b_0>0$ не залежать від $t-\tau$, χ,ξ.

Функція
$$G(t-\tau,x;\chi,\xi)=$$
$$=(2\pi)^{-1}\int_RQ(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)e^{-ix\sigma}\qquad(8)$$
є неперервною функцією аргументу $t\in(\tau,T]$. Справді, з (7) випливає, що для $t\ge t_0>\tau$ справджується оцінка
$$|Q(t-\tau,\chi;\xi,\sigma)|\le c\exp\{-(t_0-\tau)c_0'|\sigma|^\alpha\},$$
$$\sigma\in R.$$
Звідси вже дістаємо, що інтеграл (8) збігається рівномірно у довільній смузі $\{(t,\sigma):\tau<t_0\le t\le T,\ \sigma\in R\}$, тому функція G є неперервною у кожній точці проміжку $(\tau,T]$. Аналогічно доводиться диференційовність функції G за змінною t.

Нехай $G_0=G(t-\tau,x;\tau,0)$, $\varphi\in W_{M_1}^{\Omega_1}(R)\subset$ $\subset S_1^1$. Скориставшись властивістю неперервності перетворення Фур'є в просторах типу S та формулою
$$F[\varphi*G_0]=F[\varphi]\cdot F[G_0]=F[\varphi]\cdot Q_0,$$
$$Q_0=Q(t-\tau,\tau;0,\sigma)$$
знайдемо, що
$$\mu\lim_{t\to\tau+0}F[\varphi*G_0]-\sum_{k=1}^m\mu_k\lim_{t\to t_k}F[\varphi*G_0]=$$
$$=F[\varphi]\left(\mu\lim_{t\to\tau+0}Q_0-\sum_{k=1}^m\mu_k\lim_{t\to t_k}Q_0\right).$$
Зазначимо, що
$$\mu\lim_{t\to\tau+0}Q_0-\sum_{k=1}^m\mu_k\lim_{t\to t_k}Q_0=1.$$
Тоді
$$\mu\lim_{t\to\tau+0}F[\varphi*G_0]-$$
$$-\sum_{k=1}^m\mu_k\lim_{t\to t_k}F[\varphi*G_0]=F[\varphi].$$
Отже,
$$\mu\lim_{t\to\tau+0}(\varphi*G_0)-\sum_{k=1}^m\mu_k\lim_{t\to t_k}(\varphi*G_0)=\varphi.$$
Оскільки, з іншого боку,
$$\varphi*G_0=\int_RG(t-\tau,x-\xi;\tau,0)\varphi(\xi)d\xi,$$

то для довільної функції $\varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(R)$ справджується співвідношення

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} \int_R G(t-\tau, x-\xi; \tau, 0)\varphi(\xi)d\xi -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \int_R G(t-\tau, x-\xi; \tau, 0)\varphi(\xi)d\xi = \tag{9}$$

$$= \varphi(x)$$

у кожній точці $x \in R$. Зазначимо, що з (9) випливає співвідношення

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} \int_R G(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)\varphi(\xi)d\xi -$$

$$-\sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \int_R G(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)\varphi(\xi)d\xi = \tag{10}$$

$$= \varphi(x)$$

у кожній точці $x \in R$ для довільної функції $\varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(R)$.

Із наведених вище результатів дістаємо також, що $G(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)$, як функція t, x (при фіксованих τ, ξ), є розв'язком рівняння (1). Отже, за функцію $V(t, x; \tau, \xi)$ можна взяти $G(t-\tau, x-\xi; \tau, \xi)$.

Нехай

$$I(t, \tau, x) := \int_\tau^t d\mu \times$$

$$\times \int_R G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi)d\xi, \tag{11}$$

де $\varphi(t, x)$ - функція, задана на $[0, T] \times R$, неперервна по t, $\varphi(t, \cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(R)$ при кожному $t \in [0, T]$. У наступному твердженні дається формула застосування оператора $\partial/\partial t$ до інтеграла (11).

Лема 2. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial I(t, \tau, x)}{\partial t} = \int_\tau^t d\mu \int_R \frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi) \times$$

$$\times \varphi(\mu, \xi)d\xi + \varphi(t, x). \tag{12}$$

Доведення. Розглянемо сім'ю функцій $\{I_h(t, \tau, x),\ 0 < h < t-\tau\}$, де

$$I_h(t, \tau, x) = \int_\tau^{t-h} d\mu \int_R G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi) \times$$

$$\times \varphi(\mu, \xi)d\xi \equiv \int_\tau^{t-h} g(t, \mu, x)d\mu,$$

$$g(t, \mu, x) = \int_R G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi)d\xi.$$

Застосувавши правило Лопіталя диференціювання інтегралів, залежних від параметра, знайдемо, що

$$\frac{\partial I_h(t, \tau, x)}{\partial t} = \int_\tau^{t-h} \frac{\partial}{\partial t} g(t, \mu, x)d\mu + g(t, t-h, x) =$$

$$= \int_\tau^{t-h} d\mu \int_R \frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\varphi(\mu, \xi)d\xi +$$

$$+ \int_R G(h, x-\xi; t-h, \xi)\varphi(t-h, \xi)d\xi.$$

Доведемо, що $\{I_h,\ 0 < h < t-\tau\}$ збігається при $h \to 0$ до функції $I(t, \tau, x)$, а $\left\{\frac{\partial I_h}{\partial t},\ 0 < h < t-\tau\right\}$ збігається при $h \to 0$ рівномірно відносно t до правої частини (12). Тоді, скориставшись відповідною теоремою з математичного аналізу дістанемо, що функція $I(t, \tau, x)$ є диференційовною по t, при цьому справджується рівність (12).

З леми 1 випливає оцінка

$$|G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)| \leq$$

$$\leq c_0(t-\tau)^{-1/\alpha} \exp\{-b_0|x-\xi|\}.$$

Оскільки $\sup\limits_{\mu\in[0,T]} |\varphi(\mu, \xi)| \leq c$, $\forall \xi \in R$, то

$$\int_R |G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)| \cdot |\varphi(\mu, \xi)|d\xi \leq$$

$$\leq \tilde{c}(t-\mu)^{-1/\alpha} \int_R \exp\{-b_0|x-\xi|\}d\xi =$$

$$= c'(t-\mu)^{-1/\alpha},$$

$$c' = \tilde{c}\int\limits_R \exp\{-b_0|y|\}dy = 2\tilde{c}_0 b_0^{-1}.$$

Звідси дістаємо, що

$$|I_h(t,\tau,x) - I(t,\tau,x)| \le c' \int\limits_{t-h}^{\tau} (t-\mu)^{-1/\alpha} d\mu =$$

$$= \frac{h^{1-1/\alpha}}{1-1/\alpha}, \quad 1-1/\alpha > 0, \quad \alpha > 2,$$

тобто $\lim\limits_{h\to 0} I_h(t,\tau,x) = I(t,\tau,x)$. Нехай

$$\beta_h(t,x) :=$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t-h} d\mu \int\limits_R \frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\varphi(\mu,\xi)d\xi,$$

$$\beta(t,x) :=$$

$$= \int\limits_{\tau}^{t} d\mu \int\limits_R \frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\varphi(\mu,\xi)d\xi.$$

Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi) =$$

$$= (2\pi)^{-1}\int\limits_R a(\mu,\xi;\sigma)Q(t-\mu,\mu;\xi,\sigma)e^{-i\sigma(x-\xi)}d\xi,$$

то, врахувавши методику встановлення оцінки $|G|$ (див. доведення леми 1), а також властивості функції-символа a (див. умову 2)) знайдено, що

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\right| \le$$

$$\le c_0'(t-\mu)^{-1/\alpha}\exp\{-\bar{a}|x-\xi|\}, \qquad (13)$$

де сталі $c_0', \bar{a} > 0$ не залежать від μ, ξ; при цьому для підінтегрального виразу $\Lambda := |a(\mu,\xi;\sigma)Q(t-\mu,\mu;\xi,\sigma)|$ справджується нерівність

$$\Lambda \le \tilde{b}\exp\{M(\varepsilon\sigma) - M(a(t-\mu)\sigma)\},$$

де $\varepsilon > 0$ - довільно фіксований параметр. Із властивості опуклості функції M випливають нерівності

$$\exp\{M(\varepsilon\sigma) - M(a(t-\mu)\sigma)\} \le$$

$$\le \exp\{-M((a(t-\mu)-\varepsilon)\sigma)\} =$$

$$= \exp\left\{-M\left(\frac{a}{2}(t-\mu)\sigma\right)\right\} \le$$

$$\le \exp\{-d_0(t-\mu)|\sigma|^{\alpha}\},$$

якщо покласти $\varepsilon = a(t-\mu)/2$. Далі доведення оцінки (13) здійснюється за схемою доведення оцінки для $|G|$.

Урахувавши (13), а також нерівність $\sup\limits_{\mu,\xi}|\varphi(\mu,\xi)| \le c$ знайдемо, що

$$\int\limits_R \left|\frac{\partial}{\partial t} G(t-\mu, x-\xi; \mu, \xi)\right| \cdot |\varphi(\mu,\xi)|d\xi \le$$

$$\le L(t-\mu)^{-1/\alpha},$$

де стала $L > 0$ не залежать від t, μ, x. Звідси випливає, що

$$|\beta_h(t,x) - \beta(t,x)| \le L\int\limits_{t-h}^{t} (t-\mu)^{-1/\alpha}d\mu =$$

$$= \frac{Lh^{1-1/\alpha}}{1-1/\alpha} \longrightarrow 0$$

при $h \to 0$ рівномірно відносно t.

Із результатів, наведених у лемі 1 випливає, що для функції $G(h, x-\xi; t-h, \xi)$ правильною є оцінка

$$|G(h, x-\xi; t-h, \xi)| \le ch^{-1/\alpha}\exp\{-b_0|x-\xi|\},$$

яка є рівномірною відносно t. Звідси, із співвідношення (10) (у якому слід вважати $\mu = 1$, $\mu_1 = ... = \mu_m = 0$) та властивості неперервності функції $\varphi(t,x)$ за змінною t випливає, що

$$\int\limits_R G(h, x-\xi; t-h, \xi)\varphi(t-h,\xi)d\xi \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \varphi(t,x), \quad h \to 0,$$

рівномірно відносно t. Цим доведено, що сім'я функцій $\{\partial I_h/\partial t,\ 0 < h < t-\tau\}$ збігається при $h \to 0$ рівномірно відносно t до правої частини (12). Лема доведена.

Надалі оператор A у рівнянні (1) розумітимемо як оператор, який діє з простору X в $K(R)$, де символом X позначатимемо простір, який складається з функцій $\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(R)$ з нормою $||\psi|| = \sup\limits_{x\in R}|\psi(x)|$.

Лема 3. *1. Нехай $\varphi(t,x)$, $(t,x) \in [0,T]\times \times R$, - функція, неперервна за змінною t, $\varphi(t,\cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(R)$. Правильною є формула*

$$AI(t,\tau,x) = \int_\tau^t d\mu \times$$

$$\times \int_R AG(t-\mu, x-\xi;\mu,\xi)\varphi(\mu,\xi)d\xi. \quad (14)$$

2. Для функції AG правильною є оцінка

$$|AG(t-\mu, x-\xi;\mu,\xi)| \le$$

$$\le c(t-\mu)^{-1/\alpha}\exp\{-a|x-\xi|\}, \ t > \mu \ge 0,$$

сталі $c, a > 0$ не залежать від t, μ.

Доведення леми 3 здійснюється за схемою доведення леми 2.

На підставі лем 2, 3 робимо висновок, що при вказаних обмеженнях на функцію φ правильною є формула

$$LI(t,\tau,x) = \int_\tau^t d\mu \int_R LG(t-\mu, x-\xi;\mu,\xi)\times$$

$$\times\varphi(\mu,\xi)d\xi + \varphi(t,x),$$

при цьому функція LG задовольняє нерівність

$$|LG(t-\tau, x-\xi;\tau,\xi)| \le$$

$$\le c(t-\tau)^{-1/\alpha}\exp\{-a|x-\xi|\}, \quad (15)$$

де сталі $c, a > 0$ не залежать від t, τ, $t > \tau$.

Перейдемо до побудови фундаментального розв'язку багатоточкової задачі для рівняння (1); цей розв'язок шукаємо у вигляді суми:

$$Z(t,x;\tau,\xi) = G(t-\tau, x-\xi;\tau,\xi) + \Gamma(t,x;\tau,\xi), \quad (16)$$

$$(t,x) \in \Pi'_T,$$

де

$$\Gamma(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^t d\mu \times$$

$$\times \int_R G(t-\mu, x-\eta;\mu,\eta)\Phi(\mu,\eta;\tau,\xi)d\eta, \quad (17)$$

G - функція, визначена раніше. Функцію $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ підберемо так, щоб Z, як функція t, x, задовольняла рівняння (1). Застосувавши до Z оператор L та врахувавши при цьому формули (12), (14) знайдемо, що це буде тоді й лише тоді, коли

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = K(t-\tau, x;\tau,\xi) + \int_\tau^t d\mu \times$$

$$\times \int_R K(t-\mu, x;\mu,\eta)\Phi(\mu,\eta;\tau,\xi)d\eta, \quad (18)$$

де $K(t-\tau, x;\tau,\xi) = -LG(t-\tau, x-\xi;\tau,\xi)$. Ряд

$$\Phi(t,x;\tau,\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t-\tau, x;\tau,\xi), \quad (19)$$

$$K_1 = K,$$

$$K_m(t-\tau, x;\tau,\xi) = \int_\tau^t d\beta \times$$

$$\times \int_R K(t-\beta, x;\beta,\eta)K_{m-1}(\beta-\tau,\eta;\tau,\xi)d\eta,$$

є формальним розв'язком інтегрального рівняння (18). Ряд (19) дослідимо на абсолютну та рівномірну збіжність при $0 < \delta_0 \le \le t-\tau \le T$. Для обґрунтування збіжності цього ряду здійснимо оцінку повторних ядер K_m. Зазначимо, що для $|K_1| = |LG|$ справджується нерівність (15). Для оцінки ядра K_2 скористаємося наступним допоміжним твердженням.

Нехай

$$I(x,\xi) := \int_R \exp\{-a(|x-y|+|y-\xi|)\}dy, a > 0.$$

Для інтеграла I справджується нерівність

$$I(x,\xi) \le c(\varepsilon)\exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\}, \quad (20)$$

де $0 < \varepsilon < 1$ - фіксований параметр, $c(\varepsilon) = 2a^{-1}\varepsilon^{-1}$. Справді, розглянемо функцію $\varphi(y) = |x-y|+|y-\xi|$. Безпосередньо переконуємося в тому, що вона задовольняє нерівність $\varphi(y) \ge |x-\xi|$. Зафіксуємо $0 < \varepsilon < 1$. Тоді

$$I(x,\xi) = \exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\}\times$$

$$\times \int\limits_R \exp\{-a\varepsilon\varphi(y)\}dy =$$

$$= \exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\} \int\limits_R \exp\{-a\varepsilon|y-\xi|\}dy =$$

$$= c(\varepsilon)\exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\},$$

де $c(\varepsilon) = 2a^{-1}\varepsilon^{-1}$. Урахувавши (15) та (20), оцінимо ядро K_2. Отже,

$$|K_2(t-\tau, x; \tau, \xi)| \le \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_R |K(t-\beta, x; \beta, \eta)| \times$$

$$\times |K_1(\beta-\tau, \eta; \tau, \xi)|d\eta \le$$

$$\le c^2 \int\limits_\tau^t \Big(\int\limits_R (t-\beta)^{-\lambda}(\beta-\tau)^{-\lambda} \times$$

$$\times e^{-a(|x-\eta|+|\eta-\xi|)}\Big)d\beta \le$$

$$\le c^2 \int\limits_\tau^t (t-\beta)^{-\lambda}(\beta-\tau)^{-\lambda}d\beta \times$$

$$\times \int\limits_R e^{-a(|x-\eta|+|\eta-\xi|)}d\eta \le$$

$$\le c^2 c(\varepsilon)(t-\tau)^{1-2\lambda}B(1-\lambda, 1-\lambda) \times$$

$$\times \exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\}, \lambda = 1/\alpha; \qquad (21)$$

тут використана формула

$$\int\limits_a^b (t-a)^{x-1}(b-t)^{y-1}dt = (b-a)^{x+y-1}B(x,y),$$

$$\operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0,$$

$B(\cdot,\cdot)$ - бета-функція. Урахувавши (21), оцінимо ядро K_3:

$$|K_3(t-\tau, x; \tau, \xi)| \le \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_R |K(t-\beta, x; \beta, \eta)| \times$$

$$\times |K_2(\beta-\tau, \eta; \tau, \xi)|d\eta \le$$

$$\le c^3 c(\varepsilon)B(1-\lambda, 1-\lambda) \int\limits_\tau^t (t-\beta)^{-\lambda}(\beta-\tau)^{1-2\lambda} \times$$

$$\times \Big(\int\limits_R e^{-a(|x-\eta|+(1-\varepsilon)|\eta-\xi|)}d\eta\Big)d\beta.$$

Введемо позначення: $\varphi(\eta) = |x-\eta| + |\eta-\xi|$. Тоді

$$|K_3(t-\tau, x; \tau, \xi)| \le c^3 c(\varepsilon)B(1-\lambda, 1-\lambda) \times$$

$$\times \int\limits_\tau^t (t-\beta)^{-\lambda}(\beta-\tau)^{1-2\lambda}d\beta \times$$

$$\times \int\limits_R \exp\{-a(1-\varepsilon)\varphi(\eta) - a\varepsilon|x-\eta|\}d\eta.$$

Оскільки $\varphi(\eta) \ge |x-\xi|$, то

$$\int\limits_R e^{-a(1-\varepsilon)\varphi(\eta)-a\varepsilon|x-\eta|}d\eta \le c(\varepsilon)e^{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|},$$

де $c(\varepsilon) = \int\limits_R \exp\{-a\varepsilon|x-\eta|\}d\eta = 2(a\varepsilon)^{-1}$. Крім того,

$$\int\limits_\tau^t (t-\beta)^{-\lambda}(\beta-\tau)^{1-2\lambda}d\beta =$$

$$= (t-\tau)^{2-3\lambda}B(1-\lambda, 2-2\lambda).$$

Отже, $|K_3|$ оцінюється наступним чином:

$$|K_3(t-\tau, x; \tau, \xi)| \le c^3 c^2(\varepsilon)B(1-\lambda, 1-\lambda) \times$$

$$\times B(1-\lambda, 2-2\lambda)(t-\tau)^{2-3\lambda} \times$$

$$\times \exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\}.$$

З допомогою методу математичної індукції доводимо, що

$$|K_m(t-\tau, x; \tau, \xi)| \le$$

$$\le c^m c^{m-1}(\varepsilon)B(1-\lambda, 1-\lambda)B(1-\lambda, 2-2\lambda) \times$$

$$\times B(1-\lambda, 3-3\lambda)...B(1-\lambda, (m-1)-(m-1)\lambda) \times$$

$$\times (t-\tau)^{m-1-m\lambda}\exp\{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|\}, m \ge 2.$$

Урахувавши формули

$$B(z,\omega) = \Gamma(z)\Gamma(\omega)/\Gamma(z+\omega)$$

(Γ - гамма-функція), $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ знайдемо, що

$$B(1-\lambda, 1-\lambda)B(1-\lambda, 2-2\lambda) \times$$

$$\times B(1-\lambda,3-3\lambda)...B(1-\lambda,(m-1)-(m-1)\lambda) = = \frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(1-\lambda)\Gamma(1-\lambda)\Gamma(2-2\lambda)}{\Gamma(2(1-\lambda))\Gamma(3(1-\lambda))}\times \times\frac{\Gamma(1-\lambda)\Gamma(3-3\lambda)...\Gamma((m-1)(1-\lambda))}{\Gamma(4(1-\lambda))...\Gamma(m(1-\lambda))} = = \Gamma(1-\lambda)\frac{\Gamma^m(1-\lambda)}{\Gamma(m(1-\lambda))}, m \geq 2.$$

Таким чином, для ряду $\sum\limits_{m=0}^{\infty} K_m$ справджуються оцінки:

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)\right| \leq \leq \sum_{m=1}^{\infty}|K_m(t-\tau,x;\tau,\xi)| \leq$$

$$\leq c(t-\tau)^{-\lambda}e^{-a|x-\xi|} + c^{-1}(\varepsilon)\Gamma(1-\lambda)(t-\tau)^{-\lambda}\times \times\sum_{m=2}^{\infty} c^m c^m(\varepsilon)(t-\tau)^{m(1-\lambda)}\times \times\frac{\Gamma^m(1-\lambda)}{\Gamma(m(1-\lambda))}e^{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|} \leq$$

$$\leq c(t-\tau)^{-\lambda}e^{-a|x-\xi|} + c^{-1}(\varepsilon)\Gamma(1-\lambda)(t-\tau)^{-\lambda}\times \times\sum_{m=2}^{\infty} c^m c^m(\varepsilon)T^{m(1-\lambda)}\times \times\frac{\Gamma^m(1-\lambda)}{\Gamma(m(1-\lambda))}e^{-a(1-\varepsilon)|x-\xi|}.$$

Внаслідок формули Стірлінга

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}e^x x^{x-1/2}e^{\theta/(12x)}, x > 0, 0 < \theta < 1,$$

маємо, що

$$\frac{\Gamma^m(\omega_0)}{\Gamma(m\omega_0)} \leq \beta_0\frac{\theta_0^m}{m^{m\omega_0}},$$

$$\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \theta_0 = 2\sqrt{2\pi}e,\ \omega_0 = 1-\lambda.$$

З останньої оцінки випливає збіжність ряду

$$\sum_{m=2}^{\infty}\beta^m\frac{\Gamma^m(1-\lambda)}{\Gamma(m(1-\lambda))},\ \beta = c\cdot c(\varepsilon)T^{1-\lambda}.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} K_m$ при $0 < \delta_0 \leq t-\tau \leq T$ збігається абсолютно і рівномірно, а його сума - функція $\Phi(t,x;\tau,\xi)$ при $t > \tau$ є неперервною функцією аргументів x,ξ. Покладемо $\varepsilon = 1/2$; тоді для Φ справджується нерівність

$$|\Phi(t,x;\tau,\xi)| \leq d_0(t-\tau)^{-\lambda}\exp\left\{-\frac{a}{2}|x-\xi|\right\}. \tag{22}$$

Ця оцінка забезпечує збіжність інтегралів (17), (18). Звідси випливає, що інтеграл в (18) рівний

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\tau}^{t}d\mu\int_{R}K(t-\mu,x;\mu,\eta)\times \times K_m(\mu-\tau,\eta;\tau,\xi)d\eta = = \sum_{m=1}^{\infty}K_{m+1}(t-\tau,x;\tau,\xi).$$

Отже, Φ є розв'язком рівняння (18).

Нагадаємо, що для $|G|$ правильною є оцінка

$$|G(t-\tau,x-\xi;\tau,\xi)| \leq \leq c(t-\tau)^{-\lambda}\exp\{-a|x-\xi|\}, \tag{23}$$
$$\lambda = 1/\alpha,$$

де сталі $c, a > 0$ не залежать від t,τ (див. лему 1). На підставі нерівностей (23), (22), (20) здійснимо оцінку Γ; при цьому в (20) покладемо $\varepsilon = 1/2$. Отже,

$$|\Gamma(t,x;\tau,\xi)| \leq \int_{\tau}^{t}d\mu\int_{R}|G(t-\mu,x-\eta;\mu,\eta)|\times \times|\Phi(\mu,\eta;\tau,\xi)|d\eta \leq c\int_{\tau}^{t}(t-\mu)^{-\lambda}(\mu-\tau)^{-\lambda}\times \times\Big(\int_{R}e^{-a|x-\eta|-\frac{a}{2}|\eta-\xi|}d\eta\Big)d\mu \leq \leq \tilde{c}(t-\tau)^{1-2\lambda}\exp\left\{-\frac{a}{4}|x-\xi|\right\}. \tag{24}$$

Із оцінки (24) випливає, що для довільної неперервної обмеженої на R функції φ

$$\int_{R}|\Gamma(t,x;0,\xi)|\cdot|\varphi(\xi)|d\xi \leq$$

$$\leq \tilde{c}t^{1-2\lambda} \int\limits_R \exp\left\{-\frac{a}{4}|x-\xi|\right\} d\xi = d_1 t^{1-2\lambda},$$

$$1 - 2\lambda > 0.$$

Звідси вже дістаємо, що у кожній точці $x \in R$ справджується граничне співвідношення

$$\lim_{t \to +0} \int\limits_R \Gamma(t, x; 0, \xi)\varphi(\xi) d\xi = 0.$$

На підставі отриманих результатів твердимо, що функція

$$Z(t, x; \tau, \xi) = V(t, x; \tau, \xi) + \Gamma(t, x; \tau, \xi),$$

$$V(t, x; \tau, \xi) = G(t - \tau, x - \xi; \tau, \xi),$$

є фундаментальним розв'язком нелокальної за часом m-точкової задачі для рівняння (1), а функція

$$u(t, x) = \int\limits_R V(t, x; 0, \xi)\varphi(\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_R \Gamma(t, x; 0, \xi)\varphi(\xi) d\xi = u_1(t, x) + u_2(t, x), \tag{25}$$

$(t, x) \in (0, T] \times R$, $\varphi \in W^{\Omega_1}_{M_1}(R)$, - розв'язок цієї задачі при $\tau = 0$. Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема. *m-точкова задача для рівняння (1) з параметром $\tau = 0$ розв'язна в класі X, при цьому розв'язок дається формулою (25); $u(t, x)$ є неперервною обмеженою на R функцією змінної x при кожному $t \in (0, T]$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. –М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

2. *Белавин И.А.* Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения /И.А. Белавин, С.П. Капица, С.П. Курдюмов // Журн. вычислит. матем. и мат. физики. – 1988. – **Т.38**, N6. – С. 885-902.

3. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач / А.А. Дезин. –М.: Наука, 1980. – 208 с.

4.*Романко В.К.* Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов / В.К. Романко // Дифференц. уравнения. – 1974. – **Т. 10**, N11. – С. 117-131.

5. *Романко В.К.* Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений / В.К. Романко // Матем. заметки. – 1985. – **Т. 37**, N7. – С. 727-733.

6. *Макаров А.А.* Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений / А.А. Макаров // Дифференц. уравнения. – 1994. – **Т.30**, N1. – С. 144-150.

7. *Чесалин В.И.* Задача с нелокальными граничными условиями для абстрактных гиперболических уравнений / В.И. Чесалин // Дифференц. уравнения. – 1979. – **Т.15**, N11. – С. 2104-2106.

8. *Илькив В.С.* Некоторая нелокальная двухточечная задача для систем уравнений с частными производными / В.С. Илькив, Б.И. Пташник // Сиб. мат. журн. – 2005. – **Т.46**, N1. – С. 119-129.

9. *Lazetic N.L.* On classical solutions of mixed boundary problems for one-dimensional parabolic equation of second order / N.L. Lazetic // Pablications de Institut Mathematique. – 2000. – Vol.67. – Pp. 53-75.

10. *Chabrowski J.* On the non-local problems with a functional for parabolic equation / J. Chabrowski // Funkcialaj Ekvacioj. – 1984. – Vol.27. – Pp. 101-123.

11. *Bouziani A.* Probleme mixed avec conditions integrales pour une class d'equations paraboliques / A. Bouziani, N.E. Benouar // C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. J. – 1995. – Vol.321. – Pp. 1177-1182.

12. *Гельфанд И.М.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. –М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

13. *Гуревич Б.Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем / Б.Л. Гуревич // Докл. АН СССР. – 1954. – **Т.99**, N6. – С. 893-896.

14. *Гельфанд И.М.* Пространства основных и обобщеных финкций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. –М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

15. *Городецький В.В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з операторами диференціювання нескінченного порядку / В.В. Городецький, О.М. Ленюк // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2000. – Вип.4. – С. 65-70.

16. *Городецький В.В.* Еволюційні псевдодиференціальні рівняння в зліченно-нормованих просторах / В.В. Городецький, О.В. Мартинюк. –Чернівці: Технодрук, 2016. – 340 с.