УДК 517.53, 517.925.7

©2017 р. О.В. Шавала

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

ПРО НЕЛОГАРИФМІЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Ми досліджуємо деякі властивості нелогарифмічних розв'язків рівняння $f'' + Af = 0$ з мероморфним коефіцієнтом.

We investigate some properties of nonlogarithmic solutions of the equation $f" + Af = 0$ with meromorphic coefficient.

Питання, коли рівняння

$$f'' + Af = 0 \tag{1}$$

не має логарифмічних розв'язків розглядалось у працях [1], [2], [3], [4] при $x = \infty$, для рівняння з класу Фукса (див. [5, с.221]) в [6]. Необхідні факти для отримання цього результату можна знайти в роботах [7], [8, с. 534-549]. Зокрема, у цьому напрямку було отримано

Теорема A([2, с.124]). *Нехай функція A є мероморфною в однозв'язній області $G \subset \mathbb{C}$ з множиною полюсів $B \subset G$. Для того щоб кожен розв'язок рівняння (1) був функцією, мероморфною в області G, необхідно і достатньо, щоб в кожній точці $\lambda \in B$ функція A подавалась у вигляді*

$$A(z) = \frac{1-p^2}{4(z-\lambda)^2} + \frac{a_1}{z-\lambda} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z-\lambda)^{k-2}$$

і

$$\begin{vmatrix} 0 & \vdots & 0 & S(\alpha_2+1) & a_1 \\ 0 & \vdots & S(\alpha_2+2) & a_1 & a_2 \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ S(\alpha_2+p-1) & \vdots & a_{p-3} & a_{p-2} & a_{p-1} \\ a_1 & \vdots & a_{p-2} & a_{p-1} & a_p \end{vmatrix} = 0,$$

де $S(m) = m(m-1)+a_0$, $a_0 = (1-p^2)/4$, $\alpha_2 = (1-p)/2$ і $p = p(\lambda)$ – непарне натуральне число.

Відомо [9], що для будь-якої послідовності $\{\lambda_n\}$ різних комплексних чисел, яка не має скінченних точок скупчення існує ціла функція A така, що рівняння (1) має цілий розв'язок f з нулями в точках λ_n. Цей результат можна отримати з праці [10]. Шеда також довів [9], що для двох даних послідовностей $\{\lambda_n\}$ і $\{\mu_n\}$ різних комплексних чисел без скінченних точок скупчення і без спільних точок, тобто таких, що $\lambda_n \neq \mu_k$, $n, k \in \mathbb{N}$ існує ціла функція A така, що рівняння (1) має лінійно незалежні розв'язки f_1 і f_2 з нулями в точках λ_n і μ_n відповідно. Автор праці [11] розглянув це питання, використавши формулу Банка-Лайне. Огляд цих результатів можна знайти в [12].

Нами отримано наступний результат

Теорема 1. *Для будь-якої послідовності $\{\lambda_n\}$ різних комплексних чисел, яка не має скінченних точок скупчення існує мероморфна функція A з полюсами другого порядку в точках λ_n така, що рівняння (1) має фундаментальну систему розв'язків $f_1(z) = e^{g(z)}P(z)$ і $f_2(z) = e^{h(z)}R(z)$, де*

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)^{\alpha_n} e^{\alpha_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^k},$$

$$R(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)^{1-\alpha_n} e^{(1-\alpha_n) \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^k},$$

$\alpha_n \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1/2; 1\}$, p і h – цілі функції і p_n вибрано так, щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^{p_n+1}$ був рівномірно збіжним в будь-якому крузі $|z| \leq R$.

Для доведення теореми 1 нам знадобляться

Лема 1. *Добуток $P(z)$, який зазначено у теоремі 1 є збіжним.*

Справді, нехай $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3 \le ...$ У загальному випадку точки λ_n можна перегрупувати так, щоб остання нерівність виконувалась. Нехай $\tilde{\alpha}_2 = \alpha_2 - \alpha_1$, $\tilde{\alpha}_3 = \alpha_3 - \alpha_2$, $\ldots, \tilde{\alpha}_m = \alpha_m - \alpha_{m-1}$. Тоді твердження леми випливає з теореми Веєрштрасса [13, с.296] і наступної рівності

$$P(z) = \left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)e^{\sum\limits_{k=1}^{p_n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^k}\right)^{\alpha_1}\cdot$$

$$\cdot\left(\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)e^{\sum\limits_{k=1}^{p_n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^k}\right)^{\tilde{\alpha}_2}\cdot\ldots$$

$$\cdot\left(\prod_{n=m}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right)e^{\sum\limits_{k=1}^{p_n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^k}\right)^{\tilde{\alpha}_m}\cdot\ldots$$

Лема 2 ([13, с.300-301], [14, с.201]). *Для будь-якої послідовності $\{\lambda_n\}$ різних комплексних чисел без скінченних точок скупчення і для будь-якої послідовності $\{a_n\}$ комплексних чисел існує ціла функція J така, що $J(\lambda_n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення теореми 1. Скористаємось методом з праці [9, с.242-244]. Функції $f_1 = Pe^g$ та $f_2 = Re^h$ будуть розв'язками рівняння (1), якщо за формулою Абеля [15, с. 151] визначник Вронського $W(f_1; f_2) = c$, де $c \ne 0$ – деяка стала. Тому цілі функції g і h виберемо так, щоб

$$f_1 f_2' - f_2 f_1' = c \qquad (2)$$

або $e^{g+h}(PR' - P'R + (h' - g')PR) = c$,

$$e^J(PR' - P'R + IPR) = c, \qquad (3)$$

де $J = g + h$, $I = h' - g'$. Оскільки функції g і h є цілими, то функції J та I також є цілими. З рівності (3) маємо

$$I = \frac{ce^{-J} - (PR' - P'R)}{PR}.$$

Функція I є цілою тоді і лише тоді, коли кожен нуль цілої функції PR є нулем функції $ce^{-J} - (PR' - P'R)$, тобто

$$\left(ce^{-J} - (PR' - P'R)\right)\Big|_{z=\lambda_n} = 0, \qquad (4)$$

де λ_n – простий нуль функції PR, $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що

$$(PR' - P'R)|_{z=\lambda_n} \ne 0.$$

Справді, якщо $P(z) = (z-\lambda_n)^{\alpha_n}\varphi(z)$, $R(z) = (z - \lambda_n)^{1-\alpha_n}\psi(z)$, де φ і ψ – цілі функції без нулів і полюсів в точках λ_n, то

$$(PR' - P'R)|_{z=\lambda_n} = (1 - 2\alpha_n)\varphi(\lambda_n)\psi(\lambda_n) \ne 0.$$

Тоді з (4) випливає

$$J(\lambda_n) = \log\frac{c}{(PR' - P'R)|_{z=\lambda_n}},$$

де $\log v = \log|v| + i\theta$, $\theta = \arg v \in [-\pi; \pi)$ – головне значення логарифма. Користуючись лемою 2 отримаємо, що така функція J існує. Далі, оскільки $J' = g' + h'$, $I = h' - g'$, ми одержуємо $g' = \frac{1}{2}(J' - I)$, $h' = \frac{1}{2}(J' + I)$, або

$$g(z) = \frac{1}{2}\left(J(z) - \int\limits_{z_0}^{z}\frac{ce^{-J} - (PR' - P'R)}{PR}d\zeta\right) - \frac{J(z_0)}{2} + g(z_0),$$

$$h(z) = \frac{1}{2}\left(J(z) + \int\limits_{z_0}^{z}\frac{ce^{-J} - (PR' - P'R)}{PR}d\zeta\right) - \frac{J(z_0)}{2} + h(z_0).$$

Тоді $f_1 = Pe^g$ і $f_2 = Re^h$ – розв'язки рівняння (1). Відомо [2, с.16], [16, с.385], що знаючи два лінійно незалежні розв'язки f_1 і f_2 рівняння (1), функцію A можна обчислити безпосередньо з рівності

$$\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 \\ f' & f_1' & f_2' \\ f'' & f_1'' & f_2'' \end{vmatrix} = 0.$$

Таким чином, враховуючи (2), отримаємо, що $A(z) = \frac{1}{c}\begin{vmatrix} f_1'(z) & f_2'(z) \\ f_1''(z) & f_2''(z) \end{vmatrix}$. Тому A є мероморфною функцією з полюсами другого порядку в точках λ_n.

Зауваження 1. Враховуючи теорему А, в формулюванні теореми 1 можна зробити заміну $\alpha_n = (1+p_n)/2$. Тоді $1-\alpha_n = (1-p_n)/2$,

$n \in \mathbb{N}$, де $p_n = p_n(\lambda_n)$ – непарні натуральні числа.

Нехай $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – послідовність комплексних чисел λ_k, яка не має точок скупчення в $\mathbb{C}$ і $\mathrm{P} = \{p_n\}$ – послідовність натуральних чисел.

Аналогічними міркуваннями, як у теоремі 1 можна отримати

Теорема 2. *Для заданих послідовностей* Λ *і* P *існує мероморфна функція* A *з полюсами другого порядку в точках* λ_n *така, що рівняння (1) має фундаментальну систему розв'язків* f_1 *і* f_2*, де* f_1 *є цілою функцією з нулями в точках* λ_n *кратності* p_n+1*, а* f_2 *є мероморфною функцією без нулів полюсами в точках* λ_n *кратності* p_n*.*

Нехай $\mathrm{M} = \{\mu_k\}$ – послідовність комплексних чисел μ_n, яка не має точок скупчення в $\mathbb{C}$ і $\mathrm{Q} = \{q_n\}$ – послідовність натуральних чисел.

Теорема 3. *Для заданих послідовностей* Λ, P, M *і* Q, *таких, що* $\lambda_n \neq \mu_k$, $n, k \in \mathbb{N}$ *існує мероморфна функція* A *з полюсами другого порядку в точках* λ_n *і* μ_n *така, що рівняння (1) має фундаментальну систему розв'язків* f_1 *і* f_2*, де* f_1 *є мероморфною функцією з нулями в точках* λ_n *кратності* $p_n + 1$ *і полюсами в точках* μ_n *кратності* q_n*, а* f_2 *є мероморфною функцією з нулями в точках* μ_n *кратності* $q_n + 1$ *і полюсами в точках* λ_n *кратності* p_n*.*

Приклад. Функції $f_1(z) = -\sin^2(\pi z)e^{-i\pi z}/(3\pi^2)$ і $f_2(z) = \pi e^{2i\pi z}/\sin(\pi z)$ є лінійно незалежними розв'язками рівняння (1), де $A(z) = -\pi^2(-3 + 2\cot^2(\pi z) - 4i\cot(\pi z))$.

Зауваження 2. Поширення цих результатів на рівняння вищого порядку можна знайти в [17].

Автор висловлює щиру вдячність проф. А. Кондратюкові за корисні зауваження до цієї роботи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Латышева К.Я.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения (метод Фробениуса-Латышевой. — К.: Ин-т матем. АН УССР, 1970. —393 с.

2. *Laine I.* Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. — Berlin: Walter de Gruyter, 1993. — 341 p.

3. *Степин С.А.* Особые точки дифференциальных уравнений второго порядка: решения с логарифмическими членами // УМН. – 1999. – **54**, №1(325). – С. 265-266.

4. *Терещенко Н.И.* Об асимптотических логарифмических решениях линейных однородных дифференциальных уравнений // УМЖ. – 1958. – **10**, №1. – С. 82-83.

5. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1950. — 436 с.

6. *Григоренко Н.В.* Логарифмические особенности Фуксовых уравнений и критерий конечности группы монодромии // Математические заметки. – 1983. – **33**, №6. – С. 881–884.

7. *Frobenius G.* Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. – 1873. – **76**. – P. 214-235.

8. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные диференциальные уравнения. — Харьков: ОНТИ, 1939. — 719 с.

9. *Šeda V.* O niektorých vlastnostiach riešeni diferenciálnej rovnice $y'' = Q(z)y$, $Q(z) \not\equiv 0$ je celá funkcia // Acta F.R.N. Univ. Comen. Mathem. – 1959. – **4**. – P. 223–253.

10. *Bank S.* A note on the zero-sequences of solutions of linear differential equations // Results in Mathematics. – 1988. – **13**. – P. 1-11.

11. *Shen L.-C.* Construction of a differential equation $f'' + Af = 0$ with solutions having the prescribed zeros // Proceedings of the AMS. – 1985. – **95**, №4. – С. 544-546.

12. *Heittokangas J., Laine I.* Solutions of $f'' + A(z)f = 0$ with prescribed sequences of zeros // Acta Math. Univ. Comenianae. – 2005. – **74**, №2. – С. 287-307.

13. *Saks S., Zygmund A.* Analytic functions. — Warszawa-Wroclaw: Nakladem Polskiego towarzystwa matematycznego, 1952. — 451 p.

14. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967.

15. *Hille E.* Ordinary differential equations in the complex domain. — New York: John Wiley & Sons, 1976. — 484 p.

16. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1967. — 564 с.

17. *Шавала О.В.* Про деякі властивості мероморфних розв'язків лінійного диференціального рівняння третього порядку // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу». — Івано-Франківськ: 2016. – С. 147-148.