УДК 517.929.7

©2017 р. М.П. Філіпчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДВОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ З БАГАТЬМА ПЕРЕТВОРЕНИМИ АРГУМЕНТАМИ

Чисельно-аналітичним методом досліджується питання існування та наближеної побудови розв'язку крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів у випадку лінійних двоточкових крайових умов.

The question of existence and approximate construction of a boundary value problem solution for a differential equations system with finite quantity of transformed arguments and linear two-point boundary conditions is investigated by the numerical-analytical method.

Одним із ефективних та універсальних методів дослідження різноманітних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь є чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка [1-3]. Поширення цього методу на нові класи крайових задач, зокрема, для рівнянь з відхиленим аргументом, є актуальною задачею [4].

У даній роботі розглядається крайова задача для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t))), \quad (1)$$

$$Ax(0) + Bx(T) = d, \quad (2)$$

де $t \in [0,T]$, $T = const > 0$; $x, f \in \mathbb{R}^n$; $\lambda_i : [0,T] \to [0,T]$ $(i = \overline{1,k})$ – довільні неперервні відображення, A і B – сталі $n \times n$ матриці, d – сталий n-вимірний вектор.

Функція $f(t, x, y_1, \dots, y_k)$ припускається визначеною та неперервною в області

$$(t, x, y_1, \dots, y_k) \in [0,T] \times D^{k+1}, \quad (3)$$

де D – замкнена обмежена область в $\mathbb{R}^n$, обмеженою вектором $M \in \mathbb{R}^n$, $M_i > 0$ $(i = \overline{1,n})$, і задовольняючою умову Ліпшіца по $x, y_1, \dots, y_k$ з матрицею $K = \{k_{ij} \geq 0;\ i,j = \overline{1,n}\}$:

$$|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| \leq M, \quad (4)$$

$$|f(t, \overline{x}, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_k}) - f(t, \overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y_1}}, \dots, \overline{\overline{y_k}})| \leq$$
$$\leq K \left(|\overline{x} - \overline{\overline{x}}| + \sum_{i=1}^{k} |\overline{y_i} - \overline{\overline{y_i}}| \right). \quad (5)$$

Тут

$$|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| =$$
$$= (|f_1(t, x, y_1, \dots, y_k)|, \dots, |f_n(t, x, y_1, \dots, y_k)|)$$

і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

Припустимо також, що для деяких фіксованих дійсних чисел $k_1 \neq k_2$ виконується співвідношення [3]

$$\det(k_1 A + k_2 B) \neq 0. \quad (6)$$

Позначимо через D_β множину точок $x_0 \in \mathbb{R}^n$, таких, що точки $x_0 + k_1 H d(x_0)$ містяться в області D разом зі своїм β-околом, де

$$H = (k_1 A + k_2 B)^{-1},$$
$$d(x_0) = d - (A + B)x_0,$$
$$\beta = \frac{T}{2} M + \beta_1(x_0),$$
$$\beta_1(x_0) = |(k_2 - k_1) H d(x_0)|.$$

Нехай

$$D_\beta \neq \varnothing \quad (7)$$

і найбільше власне значення $\lambda(Q)$ матриці $Q = \frac{k+1}{2} TK$ не перевищує одиниці:

$$\lambda(Q) < 1. \quad (8)$$

Розглянемо послідовність функцій, що визначаються рекурентним співвідношенням

$$x_0(t, x_0) = x_0 + k_1 H d(x_0),$$
$$x_m(t, x_0) = x_0 + k_1 H d(x_0) +$$

$$+\int_0^t \left[g_{m-1}(t,x_0) - \frac{1}{T}\int_0^T g_{m-1}(s,x_0)ds \right] dt+$$

$$+\frac{t}{T}(k_2-k_1)Hd(x_0), \quad m=1,2,\ldots, \qquad (9)$$

де

$$g_{m-1}(t,x_0) \equiv f(t, x_{m-1}(t,x_0), x_{m-1}(\lambda_1(t),x_0),$$

$$\ldots, x_{m-1}(\lambda_k(t),x_0)),$$

а параметр $x_0 \in D_\beta$.

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що для довільного $x_0 \in D_\beta$ всі функції цієї послідовності задовольняють крайові умови (2).

Має місце наступне твердження про збіжність послідовних наближень $x_m(t,x_0)$ вигляду (9).

Теорема 1. *Припустимо, що функція $f(t,x,y_1,\ldots,y_k)$ визначена та неперервна в області (3) і виконуються умови (4)-(8).*

Тоді послідовність функцій $x_m(t,x_0)$ вигляду (9), які для довільного $x_0 \in D_\beta$ задовольняють крайові умови (2), рівномірно збігається при $m \to \infty$ в області $(t,x_0) \in [0,T]\times D_\beta$ до граничної функції $x^*(t,x_0)$, яка задовольняє крайові умови (2) і є розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = x_0 + k_1 Hd(x_0)+$$

$$+\int_0^t \left[g(t) - \frac{1}{T}\int_0^T g(s)ds \right] dt+$$

$$+\frac{t}{T}(k_2-k_1)Hd(x_0), \qquad (10)$$

де

$$g(t) \equiv f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \ldots, x(\lambda_k(t))),$$

який при $t=0$ проходить через точку $x^*(0,x_0) = x_0 + k_1 Hd(x_0)$. Крім цього, $x^*(t,x_0)$ є розв'язком крайової задачі

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \ldots, x(\lambda_k(t))) + \Delta(x_0),$$

$$Ax(0) + Bx(T) = d, \qquad (11)$$

де

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}(k_2-k_1)Hd(x_0) -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \ldots, x(\lambda_k(t)))dt.$$

Для відхилення $x^*(t,x_0)$ від $x_m(t,x_0)$ при всіх $(t,x_0) \in [0,T]\times D_\beta$ і $m=1,2,\ldots$ вірна оцінка

$$|x^*(t,x_0) - x_m(t,x_0)| \le W_m(x_0), \qquad (12)$$

де

$$W_m(x_0) = Q^m(E-Q)^{-1}\left(\frac{T}{2}M + \beta_1(x_0)\right) =$$

$$= Q^m(E-Q)^{-1}\beta.$$

Д о в е д е н н я. Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (9) є фундаментальною, а отже, і рівномірно збіжною.

Встановимо спочатку, що при $x_0 \in D_\beta$ всі функції $x_m(t,x_0)$ містяться в D. На підставі (9), враховуючи (4) та лему 2.1 з [3], маємо:

$$|x_1(t,x_0) - (x_0 + k_1 Hd(x_0))| \le$$

$$\le 2t\left(1-\frac{t}{T}\right)M + |(k_2-k_1)Hd(x_0)| \le$$

$$\le \frac{T}{2}M + |(k_2-k_1)Hd(x_0)| =$$

$$= \frac{T}{2}M + \beta_1(x_0) = \beta. \qquad (13)$$

Тому $x_1(t,x_0) \in D$, як тільки $x_0 \in D_\beta$. Індукцією легко показати, що для всіх $m=1,2,\ldots,$ $t\in[0,T]$ і будь-якого $x_0 \in D_\beta$ функції $x_m(t,x_0)$ вигляду (9) не виходять за межі області D.

Покладаючи

$$r_{m+1}(t,x_0) = |x_{m+1}(t,x_0) - x_m(t,x_0)|,$$

на підставі (9) із врахуванням (5) маємо:

$$r_{m+1}(t,x_0) \le K\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t \omega_m(s,x_0)ds + \right.$$

$$\left. + \frac{t}{T}\int_t^T \omega_m(s,x_0)ds \right], \qquad (14)$$

де

$$\omega_m(s,x_0)=r_m(s,x_0)+\sum_{i=1}^{k} r_m(\lambda_i(s),x_0).$$

Згідно з (13),

$$r_1(t,x_0)\le\beta,$$

тому із (14) при $m=1$ знаходимо:

$$r_2(t,x_0)\le(k+1)K\beta\cdot 2t\left(1-\frac{t}{T}\right)\le$$
$$\le Q\beta.$$

Індукцією можна довести, що для всіх $(t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta$

$$r_{m+1}(t,x_0)\le Q^m\beta,\quad m=0,1,\ldots.$$

Тому для $j\ge 1$ маємо нерівність:

$$|x_{m+j}(t,x_0)-x_m(t,x_0)|\le$$
$$\le\sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t,x_0)\le\left(\sum_{i=0}^{j-1}Q^{m+i}\right)\beta=$$
$$=Q^m\left(\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\right)\beta. \tag{15}$$

Умова (8) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m\to\infty}Q^m=0,\quad \sum_{i=0}^{j-1}Q^i\le(E-Q)^{-1}. \tag{16}$$

Тоді з (15) та (16) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність функцій $x_m(t,x_0)$ вигляду (9) рівномірно збігається при $m\to\infty$ в області $(t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta$ і

$$\lim_{m\to\infty}x_m(t,x_0)=x^*(t,x_0). \tag{17}$$

Оскільки всі послідовні наближення $x_m(t,x_0)$ задовольняють крайові умови (2), то і гранична функція $x^*(t,x_0)$ також їх задовольняє.

При $j\to\infty$ із (15), враховуючи (17) та (16), для всіх $m=1,2,\ldots$, $(t,x_0)\in[0,T]\times D_\beta$ отримуємо оцінку (12). Крім цього, переходячи із врахуванням (17) у (9) до границі при $m\to\infty$, бачимо, що функція $x^*(t,x_0)$ є розв'язком інтегрального рівняння (10), який при $t=0$ проходить через точку $x^*(0,x_0)=x_0+k_1Hd(x_0)$. Отже, гранична функція $x^*(t,x_0)$ справді є розв'язком крайової задачі (11). Теорему доведено.

На підставі теореми 1, використовуючи стандартну техніку чисельно-аналітичного методу [3], нескладно отримати наведені далі твердження.

Необхідні і достатні умови для того, щоб гранична функція $x^*(t,x_0)$ послідовності (9) була розв'язком крайової задачі (1), (2), дає наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб розв'язок $x^*(t)$ початкової задачі*

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),x(\lambda_1(t)),\ldots,x(\lambda_k(t))),$$
$$x(0)=x_0+k_1Hd(x_0),$$

був одночасно розв'язком крайової задачі (1), (2), необхідно і досить, щоб x_0 було розв'язком визначального рівняння

$$\Delta(x_0)=0,$$

де

$$\Delta(x_0)=\frac{1}{T}(k_2-k_1)Hd(x_0)-$$
$$-\frac{1}{T}\int_0^T g^*(t,x_0)dt, \tag{18}$$
$$g^*(t,x_0)\equiv f(t,x^*(t,x_0),x^*(\lambda_1(t),x_0),\ldots,$$
$$x^*(\lambda_k(t),x_0)).$$

При цьому $x^*(t)=x^*(t,x_0)$ і для всіх $m=1,2,\ldots$, $t\in[0,T]$ щодо відхилення точного розв'язку $x^*(t)=x^*(t,x_0)$ крайової задачі (1), (2) від її наближеного розв'язку $x_m(t,x_0)$ вигляду (9) вірна оцінка (12).

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1, а також умови:*

1) існує опукла замкнена область $D_1\subset D_\beta$, в якій наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(x_0)=0, \tag{19}$$

де
$$\Delta_m(x_0)=\frac{1}{T}(k_2-k_1)Hd(x_0)-$$
$$-\frac{1}{T}\int\limits_0^T g_m(t,x_0)dt,$$
$$g_m(t,x_0)\equiv f(t,x_m(t,x_0),x_m(\lambda_1(t),x_0),\ldots,$$
$$x_m(\lambda_k(t),x_0)),$$
має для деякого фіксованого $m\geq 1$ *єдиний розв'язок* $x_0=x_{0m}$ *ненульового індексу;*

2) на межі S_1 *області* D_1 *виконується нерівність*
$$\inf_{x_0\in S_1}|\Delta_m(x_0)|>(k+1)KW_m(x_0).$$

Тоді крайова задача (1), (2) має розв'язок $x^*(t)$*, початкове значення*
$$x^*(0)=x_0^*+k_1Hd(x_0^*) \qquad (20)$$
якого визначається таким x_0^**, яке належить області* D_1.

Оцінку близькості граничних функцій $x^*(t,x_0')$ і $x^*(t,x_0'')$ для точок $x_0',x_0''\in D_\beta$ дає наступне твердження.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для будь-яких точок* $x_0',x_0''\in D_\beta$ *щодо відхилення граничних функцій* $x^*(t,x_0')$ *і* $x^*(t,x_0'')$ *послідовностей* $x_m(t,x_0')$ *і* $x_m(t,x_0'')$ *вигляду (9) відповідно вірна оцінка*
$$|x^*(t,x_0')-x^*(t,x_0'')|\leq(E-Q)^{-1}R_3\,|x_0'-x_0''|,$$
де
$$R_1=|E-k_1H(A+B)|,$$
$$R_2=|(k_2-k_1)H(A+B)|,$$
$$R_3=R_1+R_2.$$

Неперервну залежність визначальної функції $\Delta(x_0)$ вигляду (18) від x_0 дає наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді функція* $\Delta(x_0)$ *вигляду (18) визначена, неперервна в області* D_β *і для всіх* $x_0',x_0''\in D_\beta$ *задовольняє оцінку*
$$|\Delta(x_0')-\Delta(x_0'')|\leq$$
$$\leq\left[\frac{1}{T}R_2+(k+1)K(E-Q)^{-1}R_3\right]\times$$
$$\times|x_0'-x_0''|.$$

Необхідні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб деяка область* $D_2\subset D_\beta$ *містила точку* x_0^**, яка визначає при* $t=0$ *початкове значення (20) розв'язку* $x^*(t)$ *крайової задачі (1), (2), необхідно, щоб для всіх* m *і довільного* $\overline{x}_0\in D_2$ *виконувалась нерівність*
$$|\Delta_m(\overline{x}_0)|\leq$$
$$\leq\sup_{x_0\in D_2}\left[\frac{1}{T}R_2+(k+1)K(E-Q)^{-1}R_3\right]\times$$
$$\times|x_0-\overline{x}_0|+(k+1)KW_m(\overline{x}_0).$$

Оцінку відхилення наближеного розв'язку $x_m(t,x_{0m})$, де x_{0m} – розв'язок наближеного визначального рівняння (19), від точного розв'язку $x^*(t)=x^*(t,x_0^*)$ крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема 7. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді для відхилення наближеного розв'язку* $x_m(t,x_{0m})$*, де* x_{0m} *– розв'язок наближеного визначального рівняння (19), від точного розв'язку* $x^*(t)=x^*(t,x_0^*)$ *крайової задачі (1), (2) вірна оцінка*
$$|x^*(t,x_0^*)-x_m(t,x_{0m})|\leq$$
$$\leq(E-Q)^{-1}R_3\,|x_0^*-x_{0m}|+W_m(x_{0m}).$$

Аналогічно [3], при деяких додаткових умовах гладкості правої частини системи (1) можна показати, що
$$|x_0^*-x_{0m}|\to 0 \text{ при } m\to\infty$$
та довести рівномірну збіжність наближеного розв'язку $x_m(t,x_{0m})$ до точного $x^*(t)=x^*(t,x_0^*)$.

Зауваження 1. В наведеній вище схемі чисельно-аналітичного методу суттєвим є припущення, що умова (6) виконується для деяких фіксованих дійсних чисел $k_1\neq k_2$.

Справді, якщо умова (6) виконуватиметься при $k_1 = k_2$, тобто, якщо $\det(A + B) \neq 0$, то застосувати наведену схему у цьому випадку буде неможливо, оскільки послідовні наближення та визначальні функції взагалі не залежатимуть від x_0.

Зауваження 2. При $k = 1$ (у випадку наявності в системі лише одного перетвореного аргументу) отримані результати співпадають з результатами, наведеними в [5].

Вкажемо один цікавий частковий випадок крайової задачі (1), (2).

Нехай в крайових умовах (2)

$$A = E, \quad B = -E, \quad d = 0,$$

тоді вони перетворюються в періодичні крайові умови $x(0) = x(T)$, а задача (1), (2) зводиться до періодичної крайової задачі

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \ldots, x(\lambda_k(t))),$$

$$x(0) = x(T),$$

де функція $f(t, x, y_1, \ldots, y_k)$ припускається періодичною по t з періодом T.

Умова (6) виконується, наприклад, при $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. В цьому випадку

$$H = -E, \quad d(x_0) = 0, \quad \beta_1(x_0) = 0,$$

$$\beta = \frac{T}{2}M, \quad Q = \frac{k+1}{2}TK,$$

а D_β – множина точок $x_0 \in \mathbb{R}^n$, що містяться в області D разом зі своїм $\frac{T}{2}M$-околом.

Послідовні наближення $x_m(t, x_0)$ набувають вигляду

$$x_0(t, x_0) = x_0,$$

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int\limits_0^t [\, g_{m-1}(t, x_0) -$$

$$- \frac{1}{T} \int\limits_0^T g_{m-1}(s, x_0) ds \,] \, dt, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

де

$$g_{m-1}(t, x_0) \equiv f(t, x_{m-1}(t, x_0), x_{m-1}(\lambda_1(t), x_0),$$

$$\ldots, x_{m-1}(\lambda_k(t), x_0)).$$

Визначальні функції набувають вигляду

$$\Delta(x_0) = -\frac{1}{T} \int\limits_0^T g^*(t, x_0) dt,$$

$$\Delta_m(x_0) = -\frac{1}{T} \int\limits_0^T g_m(t, x_0) dt,$$

де

$$g^*(t, x_0) \equiv f(t, x^*(t, x_0), x^*(\lambda_1(t), x_0), \ldots,$$

$$x^*(\lambda_k(t), x_0)),$$

$$g_m(t, x_0) \equiv f(t, x_m(t, x_0), x_m(\lambda_1(t), x_0), \ldots,$$

$$x_m(\lambda_k(t), x_0)),$$

а корені x_0^* і x_{0m} відповідних визначальних рівнянь одразу задаватимуть точне та наближене початкові значення періодичного розв'язку.

В оцінках і нерівностях, наведених в теоремах 1-7, у цьому випадку

$$W_m(x_0) = \frac{T}{2} Q^m (E - Q)^{-1} M,$$

$$R_1 = E, \quad R_2 = 0, \quad R_3 = E.$$

На завершення відзначимо, що в праці [3] чисельно-аналітичним методом досліджено крайову задачу з умовами (2), (6) для системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – К.: Вища шк., 1976. – 180 с.

2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – К.: Наук. думка, 1985. – 224 с.

3. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.

4. *Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, N 7. – С. 960-979.

5. *Філіпчук М.П.* Метод усереднення в крайових задачах для диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1999. – 142 с.