УДК 517.988.523

©2017 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

ТЕОРЕМИ ПРО НЕРУХОМУ ТОЧКУ ДЛЯ РОЗТЯГУВАЛЬНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Наведено нові теореми про нерухому точку для неперервних відображень.

Are given new fixed point theorems for continuous maps.

1. Теореми Банаха, Едельштейна та Красносельського про нерухому точку. Наведемо відомі та важливі для подальшого твердження про стискаючі відображення метричного простору.

Нехай $\mathcal{M}$ – метричний простір з метрикою $d(x,y)$. Відображення $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ називається *k-стискаючим відображенням*, де $k \in [0,1)$ [1], якщо для будь-яких точок $x, y \in \mathcal{M}$ справджується нерівність

$$d(Fx, Fy) \le k\, d(x,y).$$

Відображення F називається *стискаючим відображенням* [1], якщо

$$d(Fx, Fy) < d(x,y)$$

для $x, y \in \mathcal{M}$ і $x \ne y$. Нарешті, відображення F називається *узагальненим стисканням* [2], якщо

$$d(Fx, Fy) \le$$

$$\le q(\alpha,\beta)\, d(x,y) \quad (\alpha \le d(x,y) \le \beta),$$

причому при $0 < \alpha \le \beta < \infty$

$$q(\alpha,\beta) < 1.$$

Точка $x^* \in \mathcal{M}$ називається *нерухомою точкою* відображення F, якщо

$$Fx^* = x^*.$$

Очевидно, що k-стискаюче відображення і узагальнене стискання є стискаючими відображеннями.

Важливими для розв'язавання багатьох задач є наступні твердження.

Теорема 1 (Принцип стискаючих відображень) [3]. *Нехай $\mathcal{M}$ – повний метричний простір. Тоді k-стискаюче відображення $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ має єдину нерухому точку x^* і для кожного $x_0 \in \mathcal{M}$ послідовність $(F^n x_0)_{n\ge 0}$ збігається до x^*.*

Теорема 2 (Принцип узагальненого стискання) [2]. *Нехай $\mathcal{M}$ – повний метричний простір і відображення $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ є узагальненим стисканням. Тоді F має єдину нерухому точку x^* і для кожного $x_0 \in \mathcal{M}$ послідовність $(F^n x_0)_{n\ge 0}$ збігається до x^*.*

Теорема 3 [4]. *Нехай F – стискаюче відображення метричного простору $\mathcal{M}$ і x_0 – така точка простору $\mathcal{M}$, що послідовність $(x_n)_{n\ge 1}$ ітерацій $x_n = F^n x_0$, $n \ge 1$, містить збіжну до деякої точки $\xi \in \mathcal{M}$ підпослідовність. Тоді ξ – єдина нерухома точка відображення F.*

Зауваження 1. У [4] показано, що якщо

$$\lim_{i\to\infty} F^{n_i} x_0 = \xi$$

для деякої зростаючої послідовності $(n_i)_{i\ge 1}$ натуральних чисел, то збіжною є і послідовність $(F^n x_0)_{n\ge 1}$.

У теоремі 3 вимога існування збіжної до деякої точки простору $\mathcal{M}$ підпослідовності є суттєвою, оскільки виконання лише однієї вимоги, щоб відображення F було стискаючим, недостатньо для існування нерухомої точки цього відображення. Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад 1. Використаємо повний метричний простір $\mathcal{M} = [0, +\infty)$ з метрикою

$d(x, y) = |x - y|$. Відображення $H : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, що визначається рівністю

$$Hx = x + e^{-x},$$

є стискаючим і для цього відображення множина нерухомих точок є порожньою, оскільки

$$0 \leq \frac{d\left(x + e^{-x}\right)}{dx} = 1 - e^{-x} < 1$$

і

$$x + e^{-x} \neq x$$

для всіх $x \in \mathcal{M}$.

2. Основні об'єкт досліджень і результати. Основною метою статті є знаходження умов існування та єдиності нерухомих точок розтягувальних відображень.

Аналогічно, як і в п. 1, відображення $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ будемо називати *k-розтягувальним відображенням*, де $k \in (1, +\infty)$, якщо для будь-яких точок $x, y \in \mathcal{M}$ справджується нерівність

$$d(Fx, Fy) \geq k\, d(x, y). \tag{1}$$

Відображення F будемо називати *розтягувальним відображенням*, якщо

$$d(Fx, Fy) > d(x, y) \tag{2}$$

для $x, y \in \mathcal{M}$ і $x \neq y$. Нарешті, відображення F будемо називати *узагальненим розтягуванням*, якщо

$$d(Fx, Fy) \geq$$

$$\geq q(\alpha, \beta)\, d(x, y) \quad (\alpha \leq d(x, y) \leq \beta), \tag{3}$$

причому при $0 < \alpha \leq \beta < \infty$

$$q(\alpha, \beta) > 1. \tag{4}$$

Очевидно, що k-розтягувальне відображення і узагальнене розтягування є розтягувальними відображеннями.

При з'ясуванні умов існування нерухомих точок відображення F, що діє у метричному просторі $\mathcal{M}$, важливе значення буде грати множина $\mathcal{M}_F$.

Позначимо через $R(F^n)$, де $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел), множину значень відображення $F^n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, тобто множину $\{F^n x : x \in \mathcal{M}\}$, і розглянемо множину

$$\mathcal{M}_F = \bigcap_{n=1}^{\infty} R(F^n). \tag{5}$$

Наступний приклад показує, що множина $R(F)$ може не збігатися з $\mathcal{M}$, а множина $\mathcal{M}_F$ може бути порожньою.

Приклад 2. Використаємо повний метричний простір $\mathcal{M} = [1, +\infty)$ з метрикою $d(x, y) = |x - y|$. Відображення $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, що визначається формулою

$$Fx = 2x,$$

неперервне, 2-розтягувальне, для нього $R(F^n) = [2^n, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}$, і, очевидно,

$$\mathcal{M}_F = \emptyset.$$

Зауваження 2. Для того, щоб множина нерухомих точок відображення $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ не була порожньою, необхідно, щоб $\mathcal{M}_F \neq \emptyset$.

У випадку розтягувальних відображень справджуються наступні твердження, аналогічні теоремам 1, 2 і 3.

Теорема 4. *Нехай:*
1) $\mathcal{M}$ – повний метричний простір;
2) $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ – неперервне і k-розтягувальне відображення;
3) $\mathcal{M}_F \neq \emptyset$.

Тоді відображення F має єдину нерухому точку $x^* \in \mathcal{M}_F$.

Теорема 5. *Нехай:*
1) $\mathcal{M}$ – повний метричний простір;
2) відображення $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ є узагальненим розтягуванням і неперервним;
3) $\mathcal{M}_F \neq \emptyset$.

Тоді F має єдину нерухому точку $x^* \in \mathcal{M}_F$.

Теорема 6. *Нехай:*
1) $\mathcal{M}$ – метричний простір;
2) $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ – неперервне розтягувальне відображення;
3) $(x_n)_{n \geq 0}$ і $(n_i)_{i \geq 1}$ – такі послідовності точок простору $\mathcal{M}$ і натуральних чисел відповідно, що $F^{n_i} x_i = x_{i-1}$ для всіх $i \geq 1$ і x_n збігається до деякої точки $\xi \in \mathcal{M}$.

Тоді ξ – єдина нерухома точка відображення F.

Окремим випадком теорем 4 є наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай:*
1) $\mathcal{M}$ – повний метричний простір;
2) $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ – неперервне, сур'єктивне і k-розтягувальне відображення.

Тоді F має єдину нерухому точку $x^* \in \mathcal{M}$.

Зазначимо, що вимога неперервності відображення F у теоремах 4, 5 і 6 є суттєвою, що видно з доведень цих теорем (див. п. 3, 4 і 5), і розтягувальне відображення може бути розривним, що підтверджується наступним прикладом.

Приклад 3. Використаємо метричний простір $\mathcal{M}$, що і в прикладі 2. Визначимо відображення $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ за допомогою формули

$$Fx = \begin{cases} 6x, & \text{якщо } \ x \geq 1 \ \text{ і } \ x \neq 2, \\ 4, & \text{якщо } \ x = 2. \end{cases}$$

Це відображення, очевидно, є розривним у точці $x = 2$ і розтягувальним.

Також суттєвою в теоремі 6 є вимога про існування таких послідовності $(x_n)_{n \geq 0}$ точок простору $\mathcal{M}$ і послідовності $(n_i)_{i \geq 1}$ натуральних чисел, для яких $F^{n_i} x_i = x_{i-1}$ для всіх $i \geq 1$ і x_n збігається до деякої точки $\xi \in \mathcal{M}$. Однієї вимоги, щоб відображення було розтягувальним, недостатньо для існування нерухомих точок, що підтверджується наступним прикладом.

Приклад 4. Використаємо метричний простір $\mathcal{M}$, що і в прикладі 1. Відображення $H : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, що визначається рівністю

$$Hx = e^x,$$

є розтягувальним і множина нерухомих точок цього відображення є порожньою, оскільки

$$\frac{d\, e^x}{dx} = e^x > 1$$

для всіх $x > 0$ і

$$e^x \neq x$$

для всіх $x \in \mathcal{M}$.

Зауваження 3. У теоремах 3 і 6 метричний простір $\mathcal{M}$ може не бути повним.

3. Доведення теореми 4. Спочатку наведемо два важливих для подальшого твердження.

Лема 1. *Нехай для відображення $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ для деякого додатного числа k виконується співвідношення*

$$d(Fx, Fy) \geq k\, d(x, y) \tag{6}$$

або

$$d(Fx, Fy) > k\, d(x, y) \tag{7}$$

для $x, y \in \mathcal{M}$ і $x \neq y$.

Тоді:
1) відображення F є ін'єктивним;
2) множина значень $R(F)$ відображення F замкнена, якщо це відображення неперервне і метричний простір $\mathcal{M}$ повний.

Доведення. Ін'єктивність відображення F, очевидно, випливає з кожного із співвідношень (6) і (7).

Покажемо, що множина $R(F)$ є замкненою, якщо метричний простір $\mathcal{M}$ повний і відображення F неперервне. Розглянемо довільну фундаментальну послідовність $(y_n)_{n \geq 1}$ елементів множини $R(F)$, тобто послідовність, для якої

$$\lim_{n,m \to \infty} d(y_n, y_m) = 0.$$

Використаємо послідовність $(x_n)_{n \geq 1}$ елементів простору $\mathcal{M}$, для якої $Fx_n = y_n$, $n \geq 1$. Якщо виконується співвідношення (6), то

$$\lim_{n,m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0,$$

тобто послідовність $(x_n)_{n \geq 1}$ є фундаментальною. У випадку виконання співвідношення (7), очевидно, послідовність $(x_n)_{n \geq 1}$ також є фундаментальною. Тому на підставі повноти простору $\mathcal{M}$ існує елемент $x_0 \in \mathcal{M}$, для якого $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Тоді в силу неперервності відображення F справджується рівність $\lim_{n \to \infty} Fx_n = Fx_0$, тобто $\lim_{n \to \infty} y_n = Fx_0$.

Отже, множина $R(F)$ замкнена, якщо метричний простір $\mathcal{M}$ повний і відображення F неперервне.

Лему 1 доведено.

У випадку неперервного відображення F і виконання умов леми 1 усі відображення $F^n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $n \geq 1$, є неперервними і для них виконуються співвідношення, аналогічні (6) і (7), множини $R(F^n)$, $n \geq 1$, є замкненими, якщо метричний простір $\mathcal{M}$ повний, для них, очевидно, $R(F^n) \supset R\left(F^{n+1}\right)$, $\quad n \geq 1$, і множина $\mathcal{M}_F$, що визначається рівністю (5), є замкненою, якщо простір $\mathcal{M}$ повний.

Ми вважатимемо, що множина $\mathcal{M}_F$ не є порожньою.

Очевидно, що

$$F\mathcal{M}_F = \mathcal{M}_F. \tag{8}$$

Позначимо через $F|_{\mathcal{M}_F}$ звуження відображення F на множину $\mathcal{M}_F$.

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1 і* $\mathcal{M}_F \neq \emptyset$.

Тоді відображення $F|_{\mathcal{M}_F} : \mathcal{M}_F \to \mathcal{M}_F$ *має обернене неперервне відображення* $(F|_{\mathcal{M}_F})^{-1}$, *що задовольняє співвідношення*

$$d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, (F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} y\right) \leq \frac{1}{k}\, d(x,y), \tag{9}$$

якщо виконується нерівність (6), *або співвідношення*

$$d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, (F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} y\right) < \\ < \frac{1}{k}\, d(x,y), \tag{10}$$

якщо виконується нерівність (7) *(у цих співвідношеннях* $x, y \in \mathcal{M}_F$ *і* $x \neq y$*).*

Доведення. Завдяки лемі 1 відображення $F|_{\mathcal{M}_F} : M_F \to \mathcal{M}_F$ ін'єктивне, а завдяки рівності (8) – сур'єктивне. Тому це відображення має обернене відображення $(F|_{\mathcal{M}_F})^{-1}$. Нерівність (9) випливає з (6), нерівність (10) випливає з (7), а неперервність відображення $(F|_{\mathcal{M}_F})^{-1}$ – з (9) та (10).

Лему 2 доведено.

Доведення теореми 4. Оскільки $\mathcal{M}$ – повний метричний простір і $\mathcal{M}_F \neq \emptyset$, то завдяки лемі 2 для неперервного k-розтягувального відображення $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ відображення $(F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} : \mathcal{M}_F \to \mathcal{M}_F$ є $\dfrac{1}{k}$-стискаючим відображенням. На підставі теореми 1 та того, що $\mathcal{M}_F$ є підпростором простору $\mathcal{M}$ (є повним метричним простором з метрикою d), оператор $(F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} : \mathcal{M}_F \to \mathcal{M}_F$ має нерухому точку $x^* \in \mathcal{M}_F$, тобто $(F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x^* = x^*$. Тому $F|_{\mathcal{M}_F} x^* = x^*$ і, отже, $Fx^* = x^*$.

Інших нерухомих точок у відображення $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ немає. Справді, якщо $Fy^* = y^*$ і $y^* \neq x^*$, то завдяки (1)

$$0 < d(x^*, y^*) = d(Fx^*, Fy^*) \geq k\, d(x^*, y^*),$$

що неможливо, оскільки $k > 1$.

Теорему 4 доведено.

Зауваження 4. Завдяки теоремі 1 та доведенню теореми 4 нерухома точка x^* відображення F (у теоремі 4) збігається з границею $\lim\limits_{n\to+\infty} \left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1}\right)^n x_0$, де x_0 – довільна точка з $\mathcal{M}_F$.

4. Доведення теореми 5. Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in \mathcal{M}_F$.

Завдяки умовам теореми та твердженню леми 2 відображення $F|_{\mathcal{M}_F} : \mathcal{M}_F \to \mathcal{M}_F$ має обернене неперервне відображення $(F|_{\mathcal{M}_F})^{-1}$. Тому можна розглянути послідовність $(x_n)_{n\geq 0}$, для якої

$$x_{n+1} = (F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x_n, \quad n \geq 0. \tag{11}$$

Очевидно, що

$$Fx_{n+1} = x_n, \quad n \geq 0. \tag{12}$$

Покажемо, що послідовність $(x_n)_{n\geq 0}$ є збіжною до деякої точки $x^* \in \mathcal{M}_F$.

Розглянемо послідовність $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, де $\alpha_n = d(x_n, x_{n+1})$. Завдяки (3), (4) і (12) ця послідовність монотонна й обмежена і, отже, збігається до деякого числа $\alpha^* \geq 0$.

Припустимо, що $\alpha^* > 0$. Тоді існує таке натуральне число n_0, що

$$\frac{\alpha^*}{2} \leq d(x_n, x_{n+1}) \leq 2\alpha^*, \quad n \geq n_0. \tag{13}$$

Звідси та (3), (4) і (12) випливає, що

$$d(x_{n-1}, x_n) \geq q\left(\frac{\alpha^*}{2}, 2\alpha^*\right) d(x_n, x_{n+1})$$

для всіх $n \geq n_0$, що суперечить (13), оскільки $q\left(\frac{\alpha^*}{2}, 2\alpha^*\right) > 1$. Отже, припущення, що $\alpha^* > 0$, хибне.

Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Зафіксуємо довільне достатньо мале число $\varepsilon > 0$. Виберемо таке натуральне число n, щоб

$$\alpha_n \leq \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{q\left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right)}\right), \qquad (14)$$

і покажемо, що $(F|_{\mathcal{M}_F})^{-1}$ відображає кулю

$$B = \{x \in \mathcal{M}_F : d(x, x_n) \leq \varepsilon\}$$

в себе.

Справді, якщо $x \in B$ і $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, то завдяки (14), нерівності трикутника та нерівності

$$d(Fx, Fy) \geq d(x, y), \quad x, y \in \mathcal{M}_F, \qquad (15)$$

що випливає з (3) і (4), отримуємо

$$\begin{gathered} d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, x_n\right) \leq \\ \leq d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, (F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x_n\right) + \\ + d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x_n, x_n\right) = \\ = d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, (F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x_n\right) + \\ + d\left(x_{n+1}, x_n\right) \leq d(x, x_n) + \alpha_n < \\ < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{q\left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right)}\right) < \varepsilon. \end{gathered}$$

У випадку $x \in B$ і $\frac{\varepsilon}{2} \leq d(x, x_n) \leq \varepsilon$ також виконується аналогічна нерівність. Справді, як і в попередньому випадку

$$\begin{gathered} d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, x_n\right) \leq \\ \leq d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, (F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x_n\right) + \\ + d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x_n, x_n\right) = \\ = d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, (F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x_n\right) + \alpha_n. \qquad (16) \end{gathered}$$

Зазначимо, що на підставі (15)

$$d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, (F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x_n\right) \leq d(x, x_n) \leq \varepsilon.$$

Розглянемо множини

$$D_1 = \Big\{x \in \mathcal{M}_F : \frac{\varepsilon}{2} \leq d(x, x_n) \leq \varepsilon,$$

$$0 \leq d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, (F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}\Big\},$$

$$D_2 = \Big\{x \in \mathcal{M}_F : \frac{\varepsilon}{2} \leq d(x, x_n) \leq \varepsilon,$$

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, (F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x_n\right) \leq \varepsilon\Big\}.$$

Якщо у співвідношенні (16) $x \in D_1$, то завдяки (14)

$$d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, x_n\right) < \varepsilon,$$

якщо ж $x \in D_2$, то завдяки (3)

$$q\left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right) d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, (F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x_n\right) \leq$$

$$\leq d(x, x_n).$$

Тому

$$d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, (F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x_n\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{q\left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right)} d(x, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{q\left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right)}$$

і на підставі (16) та (14)

$$d\left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x, x_n\right) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{q\left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right)} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{1}{q\left(\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon\right)}\right) < \varepsilon.$$

Отже, куля B інваріантна по відношенню до відображення $(F|_{\mathcal{M}_F})^{-1}$. Оскільки $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$, $n \geq 0$, то $d(x_{n+m}, x_n) \leq \varepsilon$ для кожного натурального числа m. Звідси та довільності вибору числа ε випливає, що послідовність $(x_n)_{n\geq 0}$ фундаментальна. Із замкненості множини $\mathcal{M}_F$ випливає, що ця послідовність збігається до деякої точки $x^* \in \mathcal{M}_F$, а із неперервності $(F|_{\mathcal{M}_F})^{-1}$ на $\mathcal{M}_F$ та співвідношення (11) випливає рівність

$$x^* = (F|_{\mathcal{M}_F})^{-1} x^*.$$

Точка x^* для F, очевидно, нерухома. Інших нерухомих точок немає. Справді, якщо $Fy^* = y^*$ і $y^* \neq x^*$, то завдяки (3) і (4)

$$d(x^*, y^*) = d(Fx^*, Fy^*) > d(x^*, y^*),$$

що неможливо.

Теорему 5 доведено.

Зауваження 5. Завдяки теоремі 2 та доведенню теореми 5 нерухома точка x^* відображення F (у теоремі 5) збігається з границею $\lim\limits_{n\to+\infty} \left((F|_{\mathcal{M}_F})^{-1}\right)^n x_0$, де x_0 – довільна точка з $\mathcal{M}_F$.

5. Доведення теореми 6. Припустимо, що $F\xi \neq \xi$.

Розглянемо послідовність $(Fx_n)_{n\geq 0}$, що завдяки неперервності F збігається до $F\xi$. Визначимо відображення $\lambda : Y \to (0, +\infty)$ рівністю

$$\lambda(p,q) = \frac{d(Fp,Fq)}{d(p,q)}, \tag{17}$$

де $Y = (\mathcal{M} \times \mathcal{M}) \setminus \{(x,x) : x \in \mathcal{M}\}$. Завдяки (2) і неперервності λ на Y існують такі окіл U точки $(\xi, F\xi) \in Y$ і число

$$R > 1, \tag{18}$$

що

$$R < \lambda(p,q) \tag{19}$$

для всіх $p, q \in U$.

Використаємо відкриті кулі

$$S_1 = \{x \in \mathcal{M} : d(x,\xi) < \rho\}$$

і

$$S_2 = \{x \in \mathcal{M} : d(x,F\xi) < \rho\},$$

де число ρ є настільки малим, що

$$3\rho < d(\xi, F\xi) \tag{20}$$

і $S_1 \times S_2 \subset U$.

Оскільки функція $d(x,y)$ неперервна на Y і послідовності $(x_i)_{i\geq 0}$ та $(Fx_i)_{i\geq 0}$ збігаються відповідно до ξ та $F\xi$, то завдяки (20) існує таке натуральне число m, що для всіх $i > m$

$$x_i \in S_1, \tag{21}$$

$$Fx_i \in S_2 \tag{22}$$

і

$$d(x_i, Fx_i) > \rho, \quad i > m. \tag{23}$$

Завдяки нерівності трикутника та (20), (21) і (22) для $i > m$

$$d(x_i, Fx_i) \leq d(x_i, \xi) + d(\xi, F\xi) + d(F\xi, Fx_i) <$$
$$< 2\rho + d(\xi, F\xi) < 2d(\xi, F\xi). \tag{24}$$

З іншого боку для таких i із (17) та (19) випливає, що

$$d(Fx_i, F^2x_i) > Rd(x_i, Fx_i), \quad i > m. \tag{25}$$

Розглянемо довільні числа $l, j \in \mathbb{N}$, для яких $l > j > m$. Застосовуючи (2), (25) і враховуючи рівності $F^{n_i}x_i = x_{i-1}$, $i \geq 1$, а також те, що $n_i \in \mathbb{N}$ для $i \geq 1$, отримаємо

$$\begin{gathered}
d(x_j, Fx_j) = d\left(F^{n_{j+1}}x_{j+1}, FF^{n_{j+1}}x_{j+1}\right) \geq \\
\geq d(Fx_{j+1}, F^2x_{j+1}) > \\
> Rd(x_{j+1}, Fx_{j+1}) = \\
= Rd\left(F^{n_{j+2}}x_{j+2}, FF^{n_{j+2}}x_{j+2}\right) \geq \\
\geq Rd(Fx_{j+2}, F^2x_{j+2}) > \\
> R^2d(x_{j+2}, Fx_{j+2}) = \\
= R^2d\left(F^{n_{j+3}}x_{j+3}, FF^{n_{j+3}}x_{j+3}\right) \geq \\
\geq R^2d(Fx_{j+3}, F^2x_{j+3}) > \\
\vdots \\
> R^{l-j-1}d(x_{l-1}, Fx_{l-1}) = \\
= R^{l-j-1}d\left(F^{n_l}x_l, FF^{n_l}x_l\right) \geq \\
\geq R^{l-j-1}d(Fx_l, F^2x_l) > \\
> R^{l-j}d(x_l, Fx_l).
\end{gathered}$$

Тому завдяки (24)

$$2d(\xi, F\xi) > R^{l-j}d(x_l, Fx_l),$$

якщо $l > j > m$. Звідси та з (18) випливає, що

$$\lim_{l\to\infty} d(x_l, Fx_l) = 0.$$

Ця рівність суперечить (23).

Отже, припущення, що $F\xi \neq \xi$, хибне.

У відображення $F: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ інших нерухомих точок немає. Справді, якщо $F\eta = \eta$ і $\eta \neq \xi$, то завдяки (2)

$$d(\eta,\xi) = d(F\eta, F\xi) > d(\eta,\xi),$$

що неможливо.

Теорему 6 доведено.

Зауваження 6. Якщо виконується третя умова теореми 6, то послідовність $(y_n)_{n\geq 1}$, для якої

$$Fy_n = y_{n-1}, \quad n \geq 2, \tag{26}$$

і

$$Fy_1 = x_0, \tag{27}$$

є збіжною і

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \xi. \tag{28}$$

Послідовність $(y_n)_{n\geq 1}$, що задовольняє (26) і (27), існує і єдина.

Справді, розглянемо множину

$$\mathbb{P} = \{n_1, n_1+n_2, n_1+n_2+n_3, \ldots,$$

$$n_1+n_2+n_3+\ldots+n_i, \ldots\},$$

де n_i, $i \geq 1$, – натуральні числа, що й у третій умові теореми 6.

Визначимо y_n для $n \in \mathbb{P}$ за допомогою рівностей

$$y_{n_1} = x_1,\ y_{n_1+n_2} = x_2,\ y_{n_1+n_2+n_3} = x_3,\ \ldots,$$

$$y_{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_i} = x_i,\ \ldots\ ,$$

а для $n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{P}$ за допомогою рівностей

$$y_1 = F^{n_1-1}x_1,\ y_2 = F^{n_1-2}x_1,\ \ldots,$$

$$y_{n_1-1} = Fx_1,$$

$$y_{n_1+1} = F^{n_2-1}x_2,\ y_{n_1+2} = F^{n_2-2}x_2,\ \ldots,$$

$$y_{n_1+n_2-1} = Fx_2,$$

$$y_{n_2+1} = F^{n_3-1}x_3,\ y_{n_2+2} = F^{n_3-2}x_3,\ \ldots,$$

$$y_{n_1+n_2+n_3-1} = Fx_3,$$

$$\vdots\ .$$

Легко перевірити, що так побудована послідовність задовольняє (26) і (27). Її єдиність випливає з ін'єктивності відображення F (див. лему 1).

Далі покажемо, що виконується співвідношення (28). За теоремою 6 маємо

$$\lim_{i\to\infty} F^{n_i}x_i = \xi.$$

Зафіксуємо довільне число $\delta > 0$. Існує таке натуральне число N_δ, що, якщо $i > N_\delta$, то

$$d(F^{n_i}x_i, \xi) < \delta.$$

Тому на підставі (2) для кожного $i > N_\delta$ справджуються співвідношення

$$\begin{aligned}\delta > d(F^{n_i}x_i,\xi) = d(F^{n_i}x_i, F\xi) \geq\\ \geq d(F^{n_i-1}x_i,\xi) = d(F^{n_i-1}x_i, F\xi) \geq\\ \geq d(F^{n_i-2}x_i,\xi) = d(F^{n_i-2}x_i, F\xi) \geq\\ \vdots\qquad\qquad\\ \geq d(Fx_i,\xi) = d(Fx_i, F\xi) \geq d(x_i,\xi).\end{aligned}$$

Отже,

$$d(y_n,\xi) < \delta,$$

якщо $n > n_1+n_2+\ldots+n_i$ і $i > N_\delta$. Звідси та з довільності вибору числа δ випливає (28).

6. Застосування теореми 4. Нехай E – довільний банаховий простір з нормою $\|\cdot\|_E$ і $\mathbb{Z}$ – множина всіх цілих чисел. Позначимо через $\mathfrak{M}$ банаховий простір усіх обмежених двосторонніх послідовностей $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ векторів $x_n \in E$, $n \in \mathbb{Z}$, з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|_E.$$

Розглянемо різницеве рівняння

$$x_n = f(x_{n-1}) + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{29}$$

де $f: E \to E$ – неперервне відображення і $\mathbf{h} = (h_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$.

Теорема 7. *Нехай відображення f рівномірно неперервне на кожній обмеженій замкненій підмножині простору E, сюр'єктивне і k-розтягувальне.*

Тоді для кожної послідовності $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ рівняння (29) має єдиний розв'язок $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$.

Доведення. Кожному $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ поставимо у відповідність відображення $F_{\mathbf{h}}: \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається рівністю

$$(F_{\mathbf{h}}\mathbf{y})_n = f(y_{n-1}) + h_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{30}$$

де $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$.

Позначимо через $R(\mathbf{x})$ множину значень елемента $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{R}} \in \mathfrak{M}$, тобто множину $\{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Нехай $\mathbf{x}_0 = (x_{0,n})_{n\in\mathbb{R}}$ – довільний елемент простору $\mathfrak{M}$. Розглянемо довільні обмежену замкнену множину $\Omega \subset E$ і послідовність $(\mathbf{x}_m)_{m\geq 1}$ елементів $\mathbf{x}_m = (x_{m,n})_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, $m \geq 1$, для яких

$$R(\mathbf{x}_m) \subset \Omega, \ \ m \geq 0,$$

і

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\|_{\mathfrak{M}} =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x_{m,n} - x_{0,n}\|_E = 0.$$

Завдяки (30) та рівномірній неперервності f на Ω для кожного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$

$$\lim_{m\to\infty} \|F_{\mathbf{h}}\mathbf{x}_m - F_{\mathbf{h}}\mathbf{x}_0\|_{\mathfrak{M}} =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|(f(x_{m,n})+h_n)-(f(x_{0,n})+h_n)\|_E =$$
$$= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|f(x_{m,n}) - f(x_{0,n})\|_E = 0.$$

Звідси та з довільності вибору точки $\mathbf{x}_0 \in \mathfrak{M}$ випливає неперервність відображення $F_{\mathbf{h}}$ на $\mathfrak{M}$ для кожного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$.

Покажемо, що для кожного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ відображення $F_{\mathbf{h}}$ є сур'єктивним. Із сур'єктивності відображення f випливає, що для всіх $x \in E$

$$\|f(x) - f(0)\|_E \geq k\|x\|_E.$$

Тому для кожного елемента $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{R}} \in \mathfrak{M}$ існує елемент $\mathbf{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{R}} \in \mathfrak{M}$, для яких

$$f(v_n) = u_n, \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Звідси та рівності (30) отримуємо, що відображення $F_{\mathbf{h}}$ для кожного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ є сур'єктивним.

Якщо відображення f є k-розтягувальним, то на підставі (30) для всіх $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$, $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{R}} \in \mathfrak{M}$ і $\mathbf{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{R}} \in \mathfrak{M}$

$$\|F_{\mathbf{h}}\mathbf{y} - F_{\mathbf{h}}\mathbf{z}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|f(y_n) - f(z_n)\|_E \geq$$
$$\geq \sup_{n\in\mathbb{Z}} k\|y_n - z_n\|_E = k\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|_{\mathfrak{M}}.$$

Тому відображення $F_{\mathbf{h}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ для кожного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ є k-розтягувальним.

Отже, для кожного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ відображення $F_{\mathbf{h}} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є неперервним, сур'єктивним і k-розтягувальним. Тому на підставі теореми 4 оператор $F_{\mathbf{h}}$ для кожного $\mathbf{h} \in \mathfrak{M}$ має єдину залежну від $\mathbf{h}$ нерухому точку $\mathbf{x}^* = (x^*_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathfrak{M}$, тобто

$$x^*_n \equiv f(x^*_{n-1}) + h_n.$$

Теорему 7 доведено.

Зауваження 7. До дослідження рівняння (29) також можна застосовувати теорему 5. У цьому випадку k-розтягувальні відображення f і F є узагальненими розтягуваннями, причому в (3) і (4) $q(\alpha, \beta) = k$ для всіх α і β, для яких $0 < \alpha \leq \beta < \infty$.

7. Застосування теореми 6. Наведемо один окремий випадок теореми 6.

Наслідок 2. *Нехай:*
1) $\mathcal{M}$ – метричний простір;
2) $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ – неперервне розтягувальне відображення;
3) існує непорожня компактна множина $K \subset \mathcal{M}$, для якої $K \subset F(K)$.

Тоді відображення F має єдину нерухому точку $\xi \in K$.

Доведення. Завдяки третій умові

$$K \subset F(K) \subset F^2(K) \subset F^3(K) \subset \ldots$$
$$\ldots \subset F^n(K) \subset \ldots . \qquad (31)$$

Нехай x_0 – довільна точка множини K. На підставі (31) існує послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$, для якої

$$Fx_n = x_{n-1}, \ n \geq 1,$$

і

$$x_n \in K, \ n \geq 1.$$

В силу компактності множини K існують такі точка $\xi \in K$ і строго зростаюча послідовність $(n_i)_{i\geq 1}$ натуральних чисел, що підпослідовність $(x_{n_i})_{i\geq 1}$ послідовності $(x_n)_{n\geq 1}$ збігається до ξ. Очевидно, що

$$F^{m_i}x_{n_i} = x_{n_{i-1}}, \ \ i \geq 2,$$

де $m_i = n_i - n_{i-1}$.

Отже, виконується третя умова теореми 6. Тому за цією теоремою ξ – єдина нерухома точка відображення F.

Наслідок 2 доведено.

8. Додаток до теорем 4, 5 і 6. Розглянемо відображення $G : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, що не задовольняє умови жодної з теорем 4, 5 і 6. Вимагатимемо, щоб для відображення $G^n : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ для деякого $n \in \mathbb{N}$ виконувалися умови хоча б однієї з цих теорем. У цьому випадку справджується наступне твердження.

Теорема 8. *Нехай:*
1) для відображення $F = G^n$ *для деякого* $n \in \mathbb{N}$ *виконуються умови хоча б однієї з теорем 4, 5 і 6;*
2) x^* *– нерухома точка відображення* G^n.

Тоді x^* *– єдина нерухома точка відображення* G.

Доведення. Точка x^* є нерухомою точкою для G^n, тобто

$$G^n x^* = x^*.$$

Тоді точка Gx^* є нерухомою точкою для G^n, що випливає з рівностей

$$G^n(Gx^*) = G(G^n x^*) = Gx^*.$$

Оскільки нерухома точка відображення G^n єдина (див. теореми 4, 5 і 6), то

$$x^* = Gx^*.$$

Нерухома точка відображення G є нерухомою точкою відображення G^n і, отже, у відображення G не може бути двох різних нерухомих точок.

Теорему 8 доведено.

Зазначимо, що теорема 8 аналогічна відповідному твердженню для стискаючих відображень (див. [5, с. 116]).

Зауваження 8. Множина відображень, що не є розтягувальними і деякі степені яких є розтягувальними відображеннями, непорожня, що підтверджується наступним прикладом.

Приклад 5. В якості метричного простору $\mathcal{M}$ використаємо множину всіх дійсних чисел із метрикою $d(x, y) = |x - y|$. Розглянемо довільну неперервно диференційовну функцію $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, для якої:
1) $f(x) = x + 2$ для всіх $x \in [0, 1]$;
2) $f'(x) > 1$ для всіх $x \in \mathcal{M} \setminus [0, 1]$.

Визначимо відображення $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ і $F^2 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, за допомогою рівностей

$$Fx = f(x)$$

і

$$F^2 x = f(f(x)),$$

де $x \in \mathcal{M}$. Відображення F не є розтягувальним, оскільки

$$|Fx_1 - Fx_2| = |x_1 - x_2|,$$

якщо $x_1, x_2 \in [0, 1]$, а відображення F^2 є розтягувальним, оскільки на підставі умов 1) і 2) для всіх $x \in \mathcal{M}$

$$\frac{df(f(x))}{dx} = \frac{d(f(y)}{dy}\Big|_{y=f(x)} \frac{d(f(x)}{dx} > 1.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Zeidler E.* Nonlinear Functional Analysis and its Applications, 1. Title: Fixed-Point Theorems. – New York Berlin Heidelberg Tokyo: Springer-Verlag, 1986. – 921 p.

2. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.

3. *Banach S.* Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales // Fund. Math. – 1922. – **3**. – P. 133–181.

4. *Edelstein M.* On fixed and periodic points under contractive mappings // J. London Math. Soc. – 1962. – **37**. – P. 74–79.

5. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения. – Минск: Изд-во «Университетское», 1984. – 352 с.