УДК 519.21

©2017 р. М.П. Моклячук, В.І.Остапенко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ГАРМОНІЗОВАНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ З ШУМОМ

Досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_T^{int}\xi = \int_0^T a(t)\xi(t)dt$, що залежить від невідомих значень стохастичного процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t)$ у моменти часу $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$, де $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ взаємно незалежні гармонізовані α-стійкі стохастичні процеси. Встановлені формули для обчислення величини похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала $A_T^{int}\xi$ за умови спектральної визначеності коли відомі спектральні щільності процесів. У тому випадку коли спектральні щільності невідомі, а вказані лише класи допустимих щільностей, застосовано мінімаксний підхід до задачі оцінювання. Вказані співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мініміксні спектральні характеристики оцінок для деяких класів спектральних щільностей.

The problem of optimal linear estimation of the functional $A_T^{int}\xi = \int_0^T a(t)\xi(t)dt$ that depends on the unknown values of a harmonizable $\alpha-$stable stochastic processes $\xi(t)$ from observations of the process $\xi(t)+\eta(t)$ at points $t \in R \setminus [0;T]$, where $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ and $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ are mutually independent harmonizable $\alpha-$stable processes, is considered. Formulas for calculating the error and the spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A_T^{int}\xi$ are proposed in the case of spectral certainty where spectral densities of the processes are exactly known. Formulas that determine the least favorable spectral densities and the minimax (robust) spectral characteristics are proposed in the case of spectral uncertainty for some classes of admissible spectral densities.

Вступ

Задачі оцінювання невідомих значень процесів є важливою складовою теорії стохастичних процесів. Ефективні методи пошуку оцінок (інтерполяції, екстраполяції та фільтрації) для стаціонарних стохастичних послідовностей та процесів розроблені у роботах А. М. Колмогорова [7], Н. Вінера [26], А. Яглома [27] – [29]. Задачі оцінювання невідомих значень гармонізованих стохастичних послідовностей та процесів досліджувались у роботах А. Верона [25], М. Поурахмаді [19], С. Камбаніса [1], С. Камбаніса та Е. Масрі [2], С. Камбаніса та Р. Солтані [3], Й. Хосойа [5], С. Райпута та С. Сундверга [20]. Запропоновані методи досліджень ґрунтуються на припущенні, що спектральні щільності процесів відомі. На практиці, однак, спектральні щільності процесів у більшості випадків невідомі. Щоб подолати таке ускладнення спочатку оцінюють спектральні щільності процесів, а потім застосовують класичні методи пошуку оцінок. Проте такий підхід може привезти до значного росту величини похибки, як показали на конкретних прикладах К. Вастола та Х. Пур [24]. Одним із способів подолання такого ускладнення це знаходження мінімаксних оцінок, які є оптимальними одночасно для всіх щільностей із деякого класу допустимих спектральних щільностей. Такі оцінки називаються мінімаксними, оскільки вони мінімізують максимальне значення похибки. Огляд результатів з мінімаксних (робастних) методів аналізу даних зробили у свій час К. Кассам та Х. Пур [6]. У. Гренадер [4] першим запропонував мінімаксний підхід до розв'язання задачі екстраполяції стаціонарних стохастичних процесів. У роботах М. Моклячука [11] – [14] досліджені мінімакстні(робастні) оцінки функціоналів від стаціонарних стохастичних послідовностей та процесів. У книзі М. Моклячука та І. Голіченко [15] досліджені мінімакстні(робастні) оцінки функціоналів від періодично корельованих стохастичних послідовностей та процесів. У книзі М. Моклячука та О. Масютки [16] наведені результати досліджень мінімаксних оцінкок функціонплів від стаціонарних векторнозначних стохастичних послідовностей та процесів. У роботах М. Луза та М. Моклячука [8] – [10] вивчаються мінімаксні(робастні) оцінки для задач інтерполяції, екстраполяції, фільтрації для стохастичних процесів із стаціонарними приростами. У статтях М. Моклячука та В. Остапенка [17], [18] досліджуються оцінки невідомих значень функціоналів від невідомих значень гармонізованих α-стійких послідовностей.

У даній роботі досліджується задача оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_T^{int}\xi = \int\limits_0^T a(t)\xi(t)dt$, що залежить від невідомих значень гармонізованого α-стійкого процесу $\xi(t), t \in [0,T]$, за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t)$ у моменти часу $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$, де $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ – взаємно незалежні гармонізовані α-стійкі процеси. Задача досліджується за умови спектральної визначеності коли відомі спектральні щільності процесів та за умови спектральної невизначеності коли спектральні щільності процесів невідомі, проте задані класи допустимих значень спектральних щільностей. У тому випадку коли спектральні щільності процесів відомі отримані формули для обчислення величини похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала $A_T^{int}\xi$. У випадку спектральної невизначеності знайдено співвідношення, що визначають найменш сприятливі спекральні щільності на мінімаксні спектральні характеристики опримальних оцінок функціоналів для деяких класів допустимих спектральних щільностей.

Гармонізовані α-стійкі процеси. Основні властивості

Означення 1 (Симетрична α-стійка випадкова величина)**.** *Дійсна випадкова величина ξ називається симетричною α-стійкою, $S\alpha S$, якщо її характеристична функція має вигляд $Eexp(it\xi) = exp(-c|t|^\alpha)$, для деякого $c \geq 0$, $0 < \alpha \leq 2$.*

Означення 2 (Симетричний α-стійкий стохастичний процес)**.** *Стохастичний процес $\{\xi = \xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ називається симетричним α-стійким, якщо будь-які скінченновимірні розподіли $(\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_d)), t_1, t_2, \ldots, t_d \in \mathbb{R}, d \geq 1$ мають симетричний α-стійкий розподіл.*

Коваріація $S\alpha S$ величин $X = X_1 + iX_2$ та $Y = Y_1 + iY_2$ $(1 < \alpha \leq 2)$ визначається за формулою

$$[X,Y]_\alpha = \int\limits_{S_4} (x_1 + ix_2) \times \\ \times (y_1 + iy_2)^{<\alpha-1>} d\Gamma_{X_1,X_2,Y_1,Y_2}(x_1,x_2,y_1,y_2), \quad (1)$$

де $z^{<\beta>} = |z|^{\beta-1}\bar{z}, \beta > 0$. Коваріація не є симетричною та не є лінійною за другим аргументом. Для сумісно $S\alpha S$ розподілених випадкових величин ξ, ξ_1, ξ_2, η маємо:

$$[\xi(t_1) + \xi(t_2), \eta]_\alpha = [\xi(t_1), \eta]_\alpha + [\xi(t_2), \eta]_\alpha,$$

$$|[\xi, \eta]_\alpha| \leq ||\xi||_\alpha ||\eta||_\alpha^{\alpha-1} \quad (2)$$

де $||\xi||_\alpha = [\xi,\xi]_\alpha^{1/\alpha}$ є нормою у лінійному просторі породженому $S\alpha S$ випадковими величинами, яка еквівалентна збіжності за ймовірністю. Зауважимо, що $||\cdot||_\alpha$ може не співпадати зі стандартною нормою в L_α.

Означення 3 (Гармонізований симетричний α-стійкий процес)**.** *Стохастичний SaS-процес $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ є гармонізованим $HS\alpha S$ процесом, якщо існує такий SaS стохастичний процес $Z = \{Z(\theta); \theta \in (-\infty, \infty)\}$ з незалежними приростами та* *скінченою спектральною мірою* μ, *що процес* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ *допускає спектральне зображення*

$$\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\theta} dZ(\theta), t \in \mathbb{R}.$$

Коваріація процесу допускає спектральне зображення

$$[\xi(t), \xi(s)]_\alpha = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-s)\theta} d\mu(\theta),\ t, s \in \mathbb{R}.$$

Будемо вивчати гармонізовані симетричні α-стійкі процеси $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ за умови $1 < \alpha \leq 2$. Побудуємо спектральну міру $S\alpha S$ процесу із незалежними приростами $Z = \{Z(\theta) : -\infty < \theta < \infty\}$ у наступний спосіб $\mu\{(s,t]\} = \|Z(t) - Z(s)\|_\alpha^\alpha$. Для всіх $f \in L_\alpha(\mu)$ можна визначити інтеграл $\int f(\theta)dZ(\theta)$, що має такі властивості [1]:

$$\left\| \int f(\theta)dZ(\theta) \right\|_\alpha^\alpha = \int |f(\theta)|^\alpha d\mu(\theta), \quad (3)$$

$$\left[\int f(\theta)dZ(\theta), \int g(\theta)dZ(\theta) \right]_\alpha = \\ = \int f(\theta) \left(g(\theta)\right)^{<\alpha-1>} d\mu(\theta). \quad (4)$$

Для замкнутого лінійного підпростору $M \subseteq L_\alpha(\mu)$ та $f \in L_\alpha(\mu)$ існує єдиний елемент з M, який мінімізує відстань до f і називається проекцією f на M або найкращою апроксимацією f на M, що позначається $P_M f$. Проекція $P_M f$ єдиним чином визначається співвідношенням [23]

$$\int g(\theta) \left(f(\theta) - P_M f(\theta)\right)^{<\alpha-1>} d\mu(\theta) = 0, g \in M. \quad (5)$$

Позначимо через $H(\xi)$ замкнутий за нормою $||\cdot||_\alpha$ лінійний многовид, породжений всіма значеннями процесу $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$.

Для $HS\alpha S$ стохастичного процесу $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ і замкнутої підмножини $N \subseteq H(\xi)$ існує єдиний елемент $\hat{\xi}(t) \in N$, який мінімізує відстань до $\xi(t)$ і визначається співвідношенням

$$\left[\eta, \xi(t) - \hat{\xi}(t)\right]_\alpha = 0, \forall \eta \in N. \quad (6)$$

Інтерполяція гармонізованих процесів. Класичний підхід

Розглянемо задачу оптимальної лінійної оцінки функціонала

$$A_T^{int}\xi = \int\limits_0^T a(t)\xi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_T^{int}(\theta)dZ^\xi(\theta),$$

$$A_T^{int}(\theta) = \int\limits_0^T a(t)e^{it\theta}dt,$$

що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ стохастичного процесу $\xi(t), t \in [0;T]$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$, де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ взаємно незалежні $HS\alpha S$ стохастичні процеси.

Задачу вивчатимемо у тому випадку коли взаємно незалежні $HS\alpha S$ стохастичні процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta)$ та $\nu(\theta)$ відповідно, та спектральні щільності $f(\theta) > 0$, $g(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(f(\theta) + g(\theta))^{\frac{1}{\alpha-1}}} d\theta < \infty \quad (7)$$

для деякої ненульової функції експоненційного типу $\gamma(\theta) = \int\limits_0^T \alpha(t)e^{it\theta}dt$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\theta < \infty$.

Позначимо через $H^T(\xi + \eta)$ замкнуту за нормою $||\cdot||_\alpha$ лінійну оболонку породжену всіма значеннями випадкових величин $\{\xi(t) + \eta(t); t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]\}$.

Виходячи із співвідношення ізоморфізму між $H(\xi + \eta)$ та $L_\alpha(f + g)$ будемо шукати оцінку функціонала у вигляді

$$\hat{A}_T^{int}\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \left(dZ^\xi(\theta) + dZ^\eta(\theta)\right). \quad (8)$$

Така оцінка визначається спектральною характеристикою $h(\theta)$, що належить підпростору $L_\alpha^T(f+g)$ простору $L_\alpha(f+g)$, породженому функціями $e^{it\theta}$ при $t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$. Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$ мінімізує значення $||A_T^{int}\xi - \hat{A}_T^{int}\xi||_\alpha$.

Найкращим наближенням величини $A_T^{int}\xi$ у просторі $H^T(\xi+\eta)$ є проекція $\hat{A}_T^{int}\xi$ на цей простір, що визначається наступним чином:

$$[\xi(t)+\eta(t), A_T^{int}\xi - \hat{A}_T^{int}\xi]_\alpha = 0, \forall t \in \mathbb{R}\setminus[0;T].$$

Із зазначених міркувань отримуємо такі співвідношення, що визначають спектральну характеристику оптимальної оцінки функціонала

$$\begin{aligned}(A_T(\theta)-h(\theta))^{<\alpha-1>} f(\theta) - \\ -(h(\theta))^{<\alpha-1>} g(\theta) = \overline{C_T^{int}(\theta)},\end{aligned} \tag{9}$$

$$C_T^{int}(\theta) = \int_0^T c(t)e^{it\theta}dt,$$

де $c(t), t \in [0;T]-$ невідома функція, яка визначається з умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t}h(\theta)d\theta = 0, t \in [0;T]. \tag{10}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\begin{aligned}&\left\|\hat{A}_T^{int}\xi - A_T^{int}\xi\right\|_\alpha^\alpha = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |A_T(\theta)-h(\theta)|^\alpha f(\theta)d\theta + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} |h(\theta)|^\alpha g(\theta)d\theta.\end{aligned} \tag{11}$$

Отже, маємо наступну теорему

Теорема 1. *Нехай $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ взаємно незалежні гармонізовані α-стійкі, $HS\alpha S$, стохастичні процеси, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta), \nu(\theta)$ та спектральні щільності $f(\theta) > 0$, $g(\theta) > 0$ відповідно, що задовольняють умову мінімальності* (7). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t), t \in \mathbb{R}\setminus[0;T]$ обчислюється за формулою* (8). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається із рівнянь* (9), (10). *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (11).

Інтерполяція гармонізованих процесів. Спостереження без шуму

Дослідимо задачу оптимальної лінійної оцінки функціонала

$$A_T^{int}\xi = \int_0^T a(t)\xi(t)dt,$$

що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t), t \in [0;T]$ за спостереженнями процесу $\xi(t), t \in \mathbb{R}\setminus[0;T]$ без шуму.

Розглядатимемо $HS\alpha S$ процес із абсолютно неперервною спектральною мірою $\mu(\theta)$, яка має спектральну щільність $f(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(f(\theta))^{\frac{1}{\alpha-1}}}d\theta < \infty, \tag{12}$$

для деякої ненульової функції експоненціального типу $\gamma(\theta)$.

Оптимальна оцінка функціонала має вигляд

$$\hat{A}_T^{int}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)dZ^\xi(\theta). \tag{13}$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки обчислюється за формулою

$$h(\theta) = A_T(\theta) - \left(\overline{C_T^{int}(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \tag{14}$$

$$C_T^{int}(\theta) = \int_0^T c(t)e^{i\theta}d\theta,$$

де $c(t), t \in [0;T]-$ невідома функція, що знаходиться з умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t}h(\theta)d\theta = 0, t \in [0;T]. \tag{15}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}_T^{int}\xi - A_T^{int}\xi\right\|_\alpha^\alpha =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\overline{C_T^{int}(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^\alpha f(\theta)d\theta. \tag{16}$$

Маємо наступну теорему

Теорема 2. *Нехай гармонізований $\alpha-$стійкий, $HS\alpha S$, стохастичний процес $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ має абсолютно неперервну спектральну міру $\mu(\theta)$, яка має спектральну щільність $f(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності* (12). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ - процесу $\xi(t), t \in [0;T]$ за спостереженнями процесу $\xi(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$ обчислюється за формулою* (13). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається рівняннями* (14), (15). *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (16).

Інтерполяція гармонізованих процесів, $\alpha = 2$. Класичний підхід

Розглянемо задачу у спеціальному випадку $\alpha = 2$. У цьому випадку взаємно незалежні $HS\alpha S$ процеси $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ є стаціонарними. Розглянемо задачу оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t), t \in [0;T]$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$.

Маємо, що спектральна характеристика задовольняє співвідношення

$$\left(A_T^{int}(\theta) - h(\theta)\right)^{<1>} f(\theta) - (h(\theta))^{<1>} g(\theta) =$$
$$\overline{C_T^{int}(\theta)}, \quad C_T^{int}(\theta) = \int_0^T c(t)e^{it\theta}dt.$$

Отже її можна обчислити за однією із формул

$$h(\theta) = \frac{A_T^{int}(\theta)f(\theta) - C_T^{int}(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)}, \tag{17}$$

$$h(\theta) = A_T^{int}(\theta) - \frac{A_T^{int}(\theta)g(\theta) + C_T^{int}(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)}. \tag{18}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}_T^{int}\xi - A_T^{int}\xi\right\|_2^2$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A_T^{int}(\theta)g(\theta) + C_T^{int}(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} \right|^2 f(\theta)d\theta$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{A_T^{int}(\theta)f(\theta) - C_T^{int}(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} \right|^2 g(\theta)d\theta \tag{19}$$
$$= \langle \mathbf{B}_T\mathbf{c}, \mathbf{c}\rangle + \langle \mathbf{R}_T\mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle,$$

$$c(t) = \left(\mathbf{B}_T^{-1}\mathbf{D}_T\mathbf{a}\right)(t), 0 \le t \le T,$$

$$\left(\mathbf{B}_T\mathbf{c}\right)(t) = \int_0^T c(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{1}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta du,$$

$$\left(\mathbf{D}_T\mathbf{c}\right)(t) = \int_0^T c(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{f(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta du,$$

$$\left(\mathbf{R}_T\mathbf{c}\right)(t) = \int_0^T c(u) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-t)\theta} \frac{f(\theta)g(\theta)}{f(\theta) + g(\theta)} d\theta du.$$

Теорема 3. *Нехай $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі, $HS\alpha S$, $\alpha = 2$, стохастичні процеси, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta), \nu(\theta)$ та спектральні щільності $f(\theta) > 0, g(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності* (7). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$ обчислюється за формулою* (8). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається із рівнянь* (17), (18). *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (19).

Інтерполяція гармонізованих процесів, $\alpha = 2$. Спостереження без шуму

Розглянемо задачу оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$ при $\alpha = 2$. Спектральна характеристика приймає наступний вигляд

$$h(\theta) = A_T^{int}(\theta) - C_T^{int}(\theta) \left(f(\theta)\right)^{-1}, \quad C_T^{int}(\theta) = \int_0^T c(t)e^{i\theta} d\theta. \tag{20}$$

Похибка оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\| \hat{A}_T^{int}\xi - A_T^{int}\xi \right\|_2^2 = = \int_{-\infty}^{\infty} \left| C_T^{int}(\theta) \left(f(\theta)\right)^{-1} \right|^2 f(\theta) d\theta, \tag{21}$$

де $c(t)$ визначається із наступного рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t} \left(A_T^{int}(\theta) - C_T^{int}(\theta) \left(f(\theta)\right)^{-1} \right) d\theta = 0, \quad t \in [0;T], \tag{22}$$

$$c(t) = \left(\mathbf{B}_T^{-1}\mathbf{a}\right)(t), 0 \le t \le T, \tag{23}$$

$$(\mathbf{B}_T\mathbf{c})(t) = \int_0^T c(u) \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t)\right)^{-1} dtdu.$$

Отже маємо наступну теорему

Теорема 4. *Нехай стаціонарний стохастичний процес $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ має абсолютно неперервну спектральну міру $\mu(\theta)$, яка має спектральну щільність $f(\theta) > 0, \alpha = 2$, що задовольняє умову мінімальності* (12). *Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]$ обчислюється за формулою* (13). *Спектральна характеристика $h(\theta)$ має вигляд* (20), *де невідома функція $c(t), t \in [0;T]$, визначається рівнянням* (23). *Похибка оцінки обчислюється за формулою* (21).

Інтерполяція гармонізованих процесів. Мінімаксний підхід

Величина похибки

$$\Delta(h(f,g); f,g) := \left\| \hat{A}_T^{int}\xi - A_T^{int}\xi \right\|_\alpha^\alpha$$

та спектральна характеристика $h(f,g) := h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T^{int}\xi$ обчислюються за вказаними формулами за умови, що нам відомі спектральні щільності f та g. Якщо ж щільності f та g невідомі, проте можна вказати класи допустимих спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ використаємо мінімаксний підхід до задачі оцінювання функціонала і знайдемо оцінку, яка мінімізує величину похибки одночасно для всіх спектральних щільностей з даного класу $D = D_f \times D_g$ [13].

Означення 4. *Для заданого класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральні щільності $f_0 \in D_f$, $g_0 \in D_g$ називаються найменш сприятливими в $D = D_f \times D_g$ для оптимальної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, якщо виконується наступне співвідношення:*

$$\triangle(f_0, g_0) = \triangle(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = = \max_{(f,g)\in D=D_f\times D_g} \triangle(h(f,g); f,g). \tag{24}$$

Означення 5. *Для заданого класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$ спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$ називається мінімаксною (робастною), якщо виконуються співвідношення*

$$h^0 \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D_f\times D_g} L_\alpha(f+g),$$

$$\min_{h\in H_D} \max_{(f,g)\in D_f\times D_g} \triangle(h; f,g) = \max_{(f,g)\in D} (h^0; f,g).$$

Найменш сприятливі щільності $f_0(\theta)$, $g_0(\theta)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f,g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; f_0, g_0) \ge \Delta\left(h^0; f_0, g_0\right) \ge \Delta\left(h^0; f, g\right)$$

$$\forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

справджуються при умові, що $h^0 = h(f_0, g_0)$ і $h(f_0, g_0) \in H_D$, де (f_0, g_0) - розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\tilde{\triangle}(f,g) \to \inf, \quad (f,g) \in D = D_f \times D_g, \tag{25}$$

$$\tilde{\triangle}(f,g) = -\triangle(h(f_0,g_0); f, g) = \\ -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^T a(t) e^{it\theta} dt - h^0(\theta) \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta \\ -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| h^0(\theta) \right|^{\alpha} g(\theta) d\theta.$$

Зауважимо, що задача на умовний екстремум еквівалентна до задачі на безумовний екстремум [20]

$$\tilde{\triangle}_D(f,g) = \tilde{\triangle}(f,g) + \delta(f, g | D_f \times D_g) \to \inf,$$

де $\delta(f, g | D_f \times D_g)$ – індикаторна функція множини D. Розв'язок характеризується умовою $0 \in \partial \tilde{\triangle}_D(f_0, g_0)$, де $\partial \tilde{\triangle}_D(f_0, g_0)$ - субдиференціал опуклого функціонала $\tilde{\triangle}(f_0, g_0)$ [21], [22].

Підсумуємо наведені формули та означення у наступних лемах.

Лема 1. *Нехай $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ та $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ взаємно незалежні гармонізовані симетричні α-стійкі стохастичні процеси, які мають абсолютно неперервні спектральні міри і спектральні щільності $f_0(\theta) > 0$ та $g_0(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності (7). Нехай спектральні щільності $(f_0, g_0) \in D_f \times D_g$ є розв'язком екстрамальної задачі (25). Спектральні щільності (f_0, g_0) є найменш в класі $D_f \times D_g$ і $h^0 = h(f_0, g_0)$ є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $\xi(t), t \in [0;T]$, процесу $\xi(t)$ за спостереженнями $\{\xi(t) + \eta(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]\}$, якщо $h^0 = h(f_0, g_0) \in H_D$.*

Лема 2. *Нехай $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ гармонізований симетричний α-стійкий стохастичний процес, який має абсолютно неперервну спектральну міру і спектральну щільність $f_0(\theta) > 0$, що задовольняє умові мінімальності (12). Нехай спектральна щільність $f_0 \in D_f$ є розв'язком екстремальної задачі*

$$\max_{f \in D_f} \Delta\left(h(f_0); f\right) = \Delta\left(h(f_0); f_0\right), \tag{26}$$

$$\Delta\left(h(f_0); f\right) = \frac{1}{2\pi} \left\| A_T^{int}\xi - \hat{A}_T^{int}\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\overline{C^0{}_T(\theta)} \right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta. \tag{27}$$

Спектральна щільність f_0 є найменш сприятливою в класі D_f і $h^0 = h(f_0)$ є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $\xi(t), t \in [0;T]$ процесу за спостереженнями $\{\xi(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]\}$, якщо $h^0 = h(f_0) \in H_D$.

Лема 3. *Нехай $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ та $\{\eta(t), t \in \mathbb{R}\}$ взаємно незалежні стаціонарні процеси, що мають абсолютно неперервні міри із спектральними щільностями $f_0(\theta) > 0$, $g_0(\theta) > 0$ відповідно, які задовольняють умову мінімальності (7) при $\alpha = 2$. Нехай $(f_0, g_0) \in D_f \times D_g$ розв'язок екстрамальної задачі*

$$\max_{(f,g) \in D_f \times D_g} \Delta\left(h(f_0, g_0); f, g\right) = \\ = \Delta\left(h(f_0, g_0); f_0, g_0\right), \tag{28}$$

$$\Delta\left(h(f_0, g_0); f, g\right) = \frac{1}{2\pi} \times \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| A_T^{int}(\theta) g_0(\theta) + \int_0^T ((\mathbf{B}_T^0)^{-1} \mathbf{D}_T^0 \mathbf{a})(t) e^{it\theta} dt \right|^2}{(f_0(\theta) + g_0(\theta))^2} \\ \times f(\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \times \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left| A_T^{int}(\theta) f_0(\theta) - \int_0^T ((\mathbf{B}_T^0)^{-1} \mathbf{D}_T^0 \mathbf{a})(t) e^{it\theta} dt \right|^2}{(f_0(\theta) + g_0(\theta))^2} \\ \times g(\theta) d\theta. \tag{29}$$

Спектральні щільності (f_0, g_0) *є найменш сприятливими в класі* $D_f \times D_g$ *і* $h^0 = h(f_0, g_0)$ *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}_T^{int}\xi$ *функціонала* $A_T^{int}\xi$*, що залежить від невідомих значень* $\xi(t), t \in [0;T]$ *процесу* $\xi(t)$ *за спостереженнями* $\{\xi(t)+\eta(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]\}$*, якщо* $h^0 = h(f_0, g_0) \in H_D$.

Лема 4. *Нехай* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R}\}$ *стаціонарний випадковий процес, що має абсолютно неперервну спектральну міру та спектральну щільність* $f_0(\theta) > 0$*, що задовольняє умові мінімальності* (12) *при* $\alpha = 2$*. Нехай* $f_0 \in D_f$ *- розв'язок екстрамальної задачі*

$$\max_{f \in D_f} \Delta\left(h(f_0); f\right) = \Delta\left(h(f_0); f_0\right), \tag{30}$$

$$\Delta\left(h(f_0); f\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^T ((\mathbf{B}_T^0)^{-1}\mathbf{a})(t)e^{it\theta}dt\right|^2 f_0^{-2}(\theta)f(\theta)d\theta. \tag{31}$$

Спектральна щільність f_0 *є найменш сприятливою в класі* D_f *та* $h^0 = h(f_0)$ *є спектральною характеристикою оптимальної оцінки* $\hat{A}\xi$ *функціонала* $A\xi$*, що залежить від невідомих значень* $\xi(t), t \in [0;T]$ *процесу за спостереженнями* $\{\xi(t), t \in \mathbb{R} \setminus [0;T]\}$ *якщо* $h^0 = h(f_0) \in H_D$.

Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_u^v \times D_\epsilon$

Розглянемо задачу для класу $D_u^v \times D_\epsilon$.

$$D_u^v = \Big\{f(\theta) | v(\theta) \le f(\theta \le u(\theta)), \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) = P_1\Big\},$$

$$D_\epsilon = \Big\{g(\theta) | g(\theta) = (1-\epsilon)g_1(\theta) + \epsilon\omega(\theta), \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) = P_2\Big\},$$

де спектральні щільності $v(\theta), u(\theta), g_1(\theta)$ відомі та фіксовані, а щільності $v(\theta), u(\theta)$ обмежені.

Нехай $f_0(\theta) \in D_u^v, g_0(\theta) \in D_\epsilon$. Припустимо, що функції

$$h_f(f_0, g_0) = \left|\int_0^T a(t)e^{it\theta}dt - h^0(\theta)\right|^\alpha, \tag{32}$$

$$h_g(f_0, g_0) = \left|h^0(\theta)\right|^\alpha \tag{33}$$

обмежені. За таких умов функціонал

$$\tilde{\triangle}(f,g) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^T a(t)e^{it\theta}dt - h^0(\theta)\right|^\alpha \times f(\theta)d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|h^0(\theta)\right|^\alpha g(\theta)d\theta$$

обмежений у просторі $L_1 \times L_1$.

Із умови $0 \in \partial\triangle_D(f_0, g_0), D = D_u^v \times D_\epsilon$, отримуємо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$\left|\int_0^T a(t)e^{it\theta}dt - h^0(\theta)\right|^\alpha = (f_0(\theta)+g_0(\theta))(\gamma_1(\theta)+\gamma_2(\theta)+\alpha_1^{-1}) \tag{34}$$

$$\left|h^0(\theta)\right|^\alpha = (f_0(\theta)+g_0(\theta))(\phi(\theta)+\alpha_2^{-1}), \tag{35}$$

де $\gamma_1(\theta) \ge 0$, $\gamma_1(\theta) = 0$, якщо $f_0(\theta) \ge v(\theta)$; $\gamma_2(\theta) \le 0$, $\gamma_2(\theta) = 0$, якщо $f_0(\theta) \le u(\theta)$; $\phi(\theta) \le 0, \phi(\theta) = 0$, якщо $g_0(\theta) \ge (1-\epsilon)g_1(\theta)$.

Теорема 5. *Нехай* $f_0(\theta) \in D_f^0, g_0(\theta) \in D_g^0$ *задовольняють умову мінімальності* (7)*. Нехай функції* h_f, h_g*, що визначені за формулами* (32), (33) *обмежені. Спектральні щільності* $f_0(\theta), g_0(\theta)$ *найменш сприятливі в класі* $D = D_u^v \times D_\epsilon$ *для оптимальної інтерполяції функціонала* $A_T^{int}\xi$*, якщо* $f_0(\theta), g_0(\theta)$ *є розв'язком рівнянь* (34), (35) *та визначають розв'язок екстремальної задачі* (25)*. Спектральна характеристика* $h(f_0, g_0)$ *оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}_T^{int}\xi$ *функціонала* $A_T^{int}\xi$ *визначається рівняннями* (9), (10).

Найменш сприятливі спектральні щільності в класі D_β. Спостереження без шуму

Розглянемо задачу для множини спектральних щільностей

$$D_\beta = \left\{ f(\theta) : \int_{-\infty}^{\infty} (f(\lambda))^\beta \, d\lambda = \gamma \right\},$$

де $\beta-$ деяке фіксоване дійсне число,

$$\beta \neq \frac{-1}{\alpha - 1}, \beta \neq 1.$$

Скористаємося методом невизначених множників Лагранжа. Матимемо

$$\left| \overline{C^{0}{}^{int}_{T}(\theta)} \right|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (f_0(\theta))^{\frac{-\alpha}{\alpha-1}} = \lambda \left(f_0(\theta) \right)^{\beta - 1}.$$

Отже найменш сприятлива щільність має вигляд

$$f_0(\theta) = \lambda^{\frac{\alpha-1}{-\alpha-(\alpha-1)(\beta-1)}} \left| \overline{C^{0}{}^{int}_{T}(\theta)} \right|^{\frac{-\alpha}{-\alpha-(\alpha-1)(\beta-1)}}. \quad (36)$$

Теорема 6. *Нехай спектральна щільність $f_0 \in D_\beta$ задовольняє умову мінімальності* (12) *при $\alpha = 2$. Найменш сприятливою щільністю в класі D_β для оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_T^{int}\xi$ є щільність* (36) *яка визначає розв'язок екстремальної задачі* (26). *Спектральна характеристика $h(f_0)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$ визначається із співвідношень* (14) *та* (15).

Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_f^0 \times D_g^0$. Стаціонарні процеси

Розглянемо задачу для класу $D_f^0 \times D_g^0$.

$$D_f^0 = \{f(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda \leq P_1\},$$

$$D_g^0 = \{g(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d\lambda \leq P_2\}.$$

Припустимо, що функції

$$h_f(f_0, g_0) = \frac{\left| A(e^{i\theta}) g_0(\theta) + \int_0^T \left((\mathbf{B}_T^0)^{-1} \mathbf{D}_T^0 \mathbf{a} \right)(t) e^{it\theta} dt \right|^2}{(f_0(\theta) + g_0(\theta))^2}, \quad (37)$$

$$h_g(f_0, g_0) = \frac{\left| A(e^{i\theta}) f_0(\theta) - \int_0^T \left((\mathbf{B}_T^0)^{-1} \mathbf{D}_T^0 \mathbf{a} \right)(t) e^{it\theta} dt \right|^2}{(f_0(\theta) + g_0(\theta))^2}, \quad (38)$$

обмежені.

Із умови $0 \in \partial \triangle_D(f_0, g_0), D = D_f^0 \times D_g^0$, отримуємо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$\left| A(\theta) g_0(\theta) + \int_0^T \left((\mathbf{B}_T^0)^{-1} \mathbf{D}_T^0 \mathbf{a} \right)(t) e^{it\theta} dt \right| = \\ = \alpha_1 (f_0(\theta) + g_0(\theta)), \quad (39)$$

$$\left| A(\theta) f_0(\theta) - \int_0^T \left((\mathbf{B}_T^0)^{-1} \mathbf{D}_T^0 \mathbf{a} \right)(t) e^{it\theta} dt \right| = \\ = \alpha_2 (f_0(\theta) + g_0(\theta)), \quad (40)$$

де $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$. Зауважимо, що $\alpha_1 \neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\theta) d\theta = P_1,$$

а також $\alpha_2 \neq 0$, якщо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\theta) d\theta = P_2.$$

Теорема 7. *Нехай $f_0(\theta) \in D_{2\epsilon_1}, g_0(\theta) \in D_{1\epsilon_2}$ задовольняють умову мінімальності* (7). *Нехай функції h_f, h_g, що визначені рівняннями* (37), (38) *обмежені. Спектральні щільності $f_0(\theta), g_0(\theta)$ найменш сприятливі в класі $D = D_f^0 \times D_g^0$ для оптимальної інтерполяції функціонала $A_T^{int}\xi$, якщо*

$f_0(\theta), g_0(\theta)$ *є розв'язком системи рівнянь* (39), (40) *та визначають розв'язок розв'язок екстремальної задачі* (28). *Спектральна характеристика* $h(f_0, g_0)$ *оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}_T^{int}\xi$ *функціонала* $A_T^{int}\xi$ *визначається рівнянням* (18).

Найменш сприятливі спектральні щільності в класі $D_{2\epsilon_1}$. Спостереження без шуму

Розглянемо задачу для класу $D_{2\epsilon_1}$.

$$D_{2\epsilon_1} = \{f(\theta) | \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda \leq \epsilon_1\},$$

Із умови $0 \in \partial \triangle_D(f_0), D = D_{2\epsilon_1}$, отримуємо, що найменш сприятливі щільності задовольняють рівняння

$$|C_T^0(\theta)|^2 = \alpha_1 f_0^2(\theta) \left(f_0(\theta) - f_1(\theta)\right). \qquad (41)$$

Теорема 8. *Нехай спектральна щільність* $f_0 \in D_{2\epsilon_1}$ *задовольняє умову мінімальності* (12) *при* $\alpha = 2$. *Найменш сприятливою щільністю в класі* $D_{2\epsilon_1}$ *для оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A_T^{int}\xi$ *є щільність, що задовольняє рівняння* (41) *та визначає розв'язок екстремальної задачі* (30). *Мінімаксна спектральна характеристика* $h(f_0)$ *визначається рівнянням* (20).

Висновки

У даній роботі запропоновані методи пошуку оцінок функціоналів від невідомих значень гармонізованих α - стійких процесів $\xi(t)$ за спостереженнями процесів $\xi(t) + \eta(t)$ у точках $t \in \mathbb{R} \setminus [0; T]$, де $\xi(t), t \in \mathbb{R}$ та $\eta(t), t \in \mathbb{R}$ взаємно незалежні гармонізовані α - стійкі стохастичні процеси. Встановлені формули для обчислення величини похибки та спектральної характеристики оптимальної оцінки функціонала $A_T^{int}\xi$ за умови спектральної визначеності. У тому випадку коли спектральні щільності невизначені, а задані лише класи допустимих щільностей, вказані співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мініміксні спектральні характеристики оцінок для деяких класів спектральних щільностей.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Cambanis, S.* Complex stable variables and processes // Contributions to Statistics: Essays in Honour of Norman L. Johnson, P. K. Sen, ed., North-Holland, New York – 1983. – P. 63-79.

2. *Cambanis, S., Masry, E.* Spectral density estimation for stationary stable processes // Stoch. Process. Applications. – 1984. – **18**, N.1. – P. 1-31.

3. *Cambanis, S., Soltani, R.* Prediction of stable processes: Spectral and moving average representations// Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. – 1984. – **66**, – P. 593-612.

4. *Grenander, U.* A prediction problem in game theory // Ark. Mat. – 1957. – **3**, – P. 371-379.

5. *Hosoya, Y.* Harmonizable stable processes.// Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. – 1982. – **60**, – P. 517-533.

6. *Kassam S. A., Poor H. V.* Robust techniques for signal processing: A survey// Proceedings of the IEEE. – 1985. – **73**, N.3. – P. 433-481.

7. *Колмогоров А. Н* Сборник статей. Том. II: Теория вероятностей и математическая статистика. Ред. А. Н. Ширяев. Математика и ее приложения. — М.: Наука, 1986. — 535 с.

8. *Luz M., Moklyachuk M.* Robust extrapolation problem for stochastic processes with stationary increments// Mathematics and Statistics. – 2014. – **1**, N.2. – P. 78-88.

9. *Luz M., Moklyachuk M.* Minimax interpolation problem for random processes with stationary increments// Statistics, Optimization & Information Computing. – 2015. –**3**, – P. 30-41.

10. *Luz M., Moklyachuk M.* Filtering problem for random processes with stationary increments// Contemporary Mathematics and Statistics. – 2015. – **3**, N.1. – P. 8-27.

11. *Moklyachuk M. P.* Robust procedures in time series analysis// Theory of Stochastic Processes. – 2000. – **6**, N.3-4. – P. 127-147.

12. *Moklyachuk M. P.* Game theory and convex optimization methods in robust estimation problems// Theory of Stochastic Processes. – 2001. – **7**, N.1-2. – P. 253-264.

13. *Моклячук М. П.* Робастні оцінки функціоналів від стохастичних процесів. — К.:ВПЦ "Київський університет 2008. — 320 с.

14. *Moklyachuk M. P.* Minimax-robust estimation problems for stationary stochastic sequences// Statistics, Optimization & Information Computing. – 2015. – **3**, N.4. – P. 348-419.

15. *Moklyachuk M., Golichenko I.* Periodically correlated processes estimates. — LAP Lambert Academic Publishing, 2016. — 308 p.

16. *Moklyachuk M., Masyutka O.* Minimax-robust estimation technique for stationary stochastic processes. — LAP Lambert Academic Publishing, 2012. — 296 p.

17. *Moklyachuk M. P., Ostapenko V. I.* Minimax interpolation problem for harmonizable stable sequences with noise observations// J. Appl. Math. Stat. – 2015. – **2**, N.1. – P. 21-42.

18. *Moklyachuk M. P., Ostapenko V. I.* Minimax interpolation of harmonizable sequences// Theor. Probability and Math. Statist. – 2016. – N.92. – P. 135–146.

19. *Pourahmadi, M.* On minimality and interpolation of harmonizable stable processes. // SIAM J. Appl. Math. – 1984. – **44**, N.5. – P. 1023-1030.

20. *Rajput, S., Sundberg, C.* On some extremal problems in H^p and the prediction of L^p - harmonizable stochastic processes // Probability Theory and Related Fields. – 1994. – **99**, N.2. – P. 197-210.

21. *Rockafellar, R. T.* Convex Analysis. — Princeton: University Press, 1997. — 451 p.

22. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. — М.: Наука, 1982. — 144 с.

23. *Singer, I.* Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1980 — 415 p.

24. *Vastola, K. S., Poor, H. V.* An analysis of the effects of spectral uncertainty on Wiener filtering // Automatica. – 1983. – **28**, – P. 289-293.

25. *Weron, A.* Harmonizable stable processes on groups: spectral, ergodic and interpolation properties. // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete – 1985. – **68**, N.4. – P. 473-491.

26. *Wiener, N.* Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. With engineering applications. — The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1966. — 163 p.

27. *Яглом А.М.* Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью // Труды Московского математического общества – 1955. – N.4 – P. 333-374.

28. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 1: Basic results. — Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987. — 526 p.

29. *Yaglom A. M.* Correlation theory of stationary and related random functions. Vol. 2: Supplementary notes and references. — Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York etc., 1987. — 258 p.