УДК 517.51

©2017 р. Маслюченко В.К., Фотій О.Г.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО СЕКВЕНЦІАЛЬНО НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ

Для топологічних просторів X, Y і точки $x_0 \in X$ відображення $f : X \to Y$ називається C_{x_0}-неперервним, якщо для кожної неперервної кривої $\omega : [0, 1] \to X$, у якої $\omega(0) = x_0$, композиція $f \circ \omega$ неперервна в точці 0. Показано, що для топологічного векторного простору X і топологічного простору Y відображення $f : X \to Y$ буде C_{x_0}-неперервним тоді і тільки тоді, коли воно є секвенціально неперервним у точці x_0. Наведено приклади топологічних векторних просторів, для яких з C_{x_0}-неперервності не випливає звичайна неперервність в точці x_0. Доведено аналог теореми про проміжне значення для секвенціально неперервних функцій $f : X \to Y$.

Given topological spaces X, Y and a point $x_0 \in X$, a function $f : X \to Y$ is said to be C_{x_0}-continuous if for every continuous curve $\omega : [0, 1] \to X$ with $\omega(0) = x_0$, the composition $f \circ \omega$ is continuous at 0. We prove that, for every topological vector space X and every topological space Y a function $f : X \to Y$ is C_{x_0}-continuous if and only if f is sequentially continuous at x_0. We provide examples of topological vector spaces for which the C_{x_0}-continuity does not imply the continuity at x_0. We also prove a version of the intermediate value theorem for sequentially continuous functions $f : X \to Y$.

1. Вступ. Відображення $f : X \to Y$, що діє з топологічного простору X у топологічний простір Y називається *секвенціально неперервним* (коротко: *s-неперервним*) *у точці* x_0, якщо для довільної послідовності точок x_n з X з умови $x_n \to x_0$ випливає, що $f(x_n) \to f(x_0)$, і просто *секвенціально неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці простору X. Добре відомо [1], [2], що з неперервності відображення f у точці x_0 випливає його s-неперервність у цій точці, але обернене твердження не справедливе. Таким чином, s-неперервність – це певне ослаблення неперервності, можливо, найдавніше.

У кінці XIX століття почалось інтенсивне вивчення і іншого ослаблення неперервності, але вже для функції двох змінних, а саме нарізної неперервності. Вивчення зв'язків між нарізною і звичайною (чи як кажуть сукупною) неперервністю почалось з капітальної праці Р. Бера [3]. На початку XX століття у праці [4] було введено підсилення нарізної неперервності – лінійна неперервність. Пізніше це поняття дістало розвиток у праці [5], де прямі лінії були замінені на криві. В недавній час у цьому напрямку були отримані нові результати у роботах [6–8]. Всі вони стосувались відображень $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Відправляючись від цих робіт, ми вводимо тут поняття Ω_{x_0}-неперервності для відображень $f : X \to Y$, де Ω_{x_0} – довільна множина кривих $\omega : [0, 1] \to X$, для яких $\omega(0) = x_0$. Відображення f називається Ω_{x_0}-*неперервним*, якщо для довільного $\omega \in \Omega_{x_0}$ композиція $f \circ \omega$ є неперервною у точці 0. Виявляється, що для довільного топологічного векторного простору (скорочено: ТВП) X і множини C_{x_0} всіх неперервних кривих $\omega : [0, 1] \to X$, для яких $\omega(0) = x_0$, C_{x_0}-неперервність рівносильна секвенціальній неперервності в точці x_0, яка для метризовних просторів рівносильна звичайній неперервності. Ми наводимо також ряд прикладів, що стосуються зв'язків між C_{x_0}-неперервністю та неперервністю у точці x_0 для неметризовних ТВП.

Друга тема, що вивчається у даній праці стосується узагальнення класичної теореми Больцано-Коші про проміжне значення. Відоме її узагальнення звучить так [9, с.122]: для зв'язного топологічного простору X, неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$, точок a і b з X, таких, що $f(a) < f(b)$ і числа γ, для якого $f(a) < \gamma < f(b)$, існує така точка $c \in X$, що

$f(c)=\gamma$. Легко перевірити, що зв'язність топологічного простору X рівносильна такій умові: кожна нетривіальна підмножина E простору X, тобто така, що $E \neq \emptyset$ і $E \neq X$, має непорожню межу $frE = \overline{E} \cap \overline{X \setminus E}$.

Нагадаємо, що *секвенціальним замиканням* (коротко: *s-замиканням*) множини E в X називають множину $\overline{E}^s$, яка складається з усіх границь послідовностей точок з E у просторі X. Назвемо *секвенціальною межею (s-межею)* множини A в X перетин $fr_sE = \overline{E}^s \cap \overline{X \setminus E}^s$. Ми кажемо, що простір X є *секвенціально зв'язним (s-зв'язним)*, якщо кожна нетривіальна підмножина E простору X має непорожню s-межу fr_sE. Виявляється, що справедливе і таке узагальнення теореми Больцано-Коші: для s-зв'язного простору X, s-неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$, точок a і b з X, таких, що $f(a) < f(b)$ і числа γ, для якого $f(a) < \gamma < f(b)$, існує така точка $c \in X$, що $f(c) = \gamma$. Зауважимо, що в цьому результаті у порівнянні з відомим узагальненням умови на простір X підсилюються, а на відображення послаблюються.

Звичайно, природно виникають питання про зв'язки між неперервністю у точці x_0 і Ω_{x_0}-неперервністю для інших множин кривих, як це зроблено у [5–8], а також про узагальнення теореми про проміжне значення для інших просторів із замиканням $[A]$, яке не обов'язково задовольняє умову $[[A]] = [A]$. Цьому будуть присвячені наступні публікації авторів.

2. C_{x_0}-неперервність та її зв'язки з секвенціальною неперервністю. Почнемо з доведення першого основного результату.

Теорема 1. *Нехай X – топологічний векторний простір, $x_0 \in X$, Y – довільний топологічний простір і $f : X \to Y$ – відображення. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(a) f – C_{x_0}-неперервне;

(b) f – s-неперервне в точці x_0.

Доведення. $(a) \Rightarrow (b)$. Нехай відображення f є C_{x_0}-неперервне. Доведемо, що f є s-неперервним у точці x_0. Для довільних точок a і b з X розглянемо відображення $\omega = \omega_{a,b,x_0} : [0,1] \to X$, що задається так: $\omega(t) = (1-2t)a + 2tx_0$, якщо $0 \le t \le \frac{1}{2}$, і $\omega(t) = (2-2t)x_0 + (2t-1)b$, якщо $\frac{1}{2} \le t \le 1$.

Зрозуміло, що відображення ω коректно визначене. До того ж ω неперервне. Справді, операції додавання та множення на скаляр у ТВП є неперервними, що дає нам неперервність звужень $\omega|_{[0,\frac{1}{2}]}$ і $\omega|_{[\frac{1}{2},1]}$. Крім того, множини $[0,\frac{1}{2}]$ і $[\frac{1}{2},1]$ замкнені в $[0,1]$, отже, з неперервності цих звужень випливає і неперервність ω. Побудоване відображення є ламаною, яка з'єднує точки a, x_0 і b, причому $\omega(0) = a$, $\omega(\frac{1}{2}) = x_0$ і $\omega(1) = b$.

Для довільного невиродженого відрізка $[\alpha,\beta]$ розглянемо відображення $\gamma = \gamma_{\alpha,\beta} : [\alpha,\beta] \to [0,1]$, що визначається формулою $\gamma(t) = \frac{\beta - t}{\beta - \alpha}$. Відображення γ – це гомеоморфізм відрізка $[\alpha,\beta]$ на відрізок $[0,1]$, у якого $\gamma(\beta) = 0$ і $\gamma(\alpha) = 1$.

Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – довільна послідовність точок x_n з простору X, яка збігається до точки x_0 в X. Доведемо, що $f(x_n) \to f(x_0)$ в Y.

Розглянемо довільну строго спадну до нуля послідовність точок $\alpha_n \in (0,1]$, для якої $\alpha_1 = 1$ (наприклад, $\alpha_n = \frac{1}{n}$). Для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо відображення $\omega_n : [\alpha_{n+1}, \alpha_n] \to X$, покладаючи $\omega_n = \omega_{x_n, x_{n+1}, x_0} \circ \gamma_{\alpha_{n+1}, \alpha_n}$. Зрозуміло, що $\omega_n : [\alpha_{n+1}, \alpha_n] \to X$ – це неперервне відображення, для якого $\omega_n(\alpha_n) = x_n$ і $\omega_n(\alpha_{n+1}) = x_{n+1}$. Введемо тепер відображення $\omega : [0,1] \to X$, покладаючи $\omega(t) = \omega_n(t)$ при $\alpha_{n+1} \le t \le \alpha_n$ для кожного n і $\omega(0) = x_0$. Нехай V_{x_0} – довільний окіл точки x_0 в X. Як добре відомо [10], існує такий заокруглений окіл нуля U в X, що $U_{x_0} = x_0 + U \subseteq V_{x_0}$. Зсув U_{x_0} околу нуля U на вектор x_0 буде околом точки x_0 в X [10, с.13]. Оскільки $x_n \to x_0$ в X, то існує такий номер N, що $x_n \in U_{x_0}$, як тільки $n \ge N$. Покажемо, що тоді $\omega([0,\alpha_N]) \subseteq U_{x_0}$. Оскільки $\omega(0) = x_0 \in U_{x_0}$ і $(0,\alpha_N] = \bigcup\limits_{n \ge N} [\alpha_{n+1}, \alpha_n]$, то досить пояснити, що $\omega([\alpha_{n+1}, \alpha_n]) \subseteq U_{x_0}$ при $n \ge N$.

Зафіксуємо $n \ge N$. Тоді x_n і x_{n+1} – це точки з U_{x_0}, тобто $x_n - x_0 \in U$ і $x_{n+1} - x_0 \in U$. Розглянемо середину $\beta_n = \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2}$ відрізка

$[\alpha_{n+1}, \alpha_n]$. Для скорочення позначень покладемо $\gamma = \gamma_{\alpha_{n+1},\alpha_n}$.

Якщо $\beta_n \leq t \leq \alpha_n$, то $0 \leq \gamma(t) = \frac{\alpha_n - t}{\alpha_n - \alpha_{n+1}} \leq \frac{1}{2}$, отже,

$$\omega(t) = \omega_n(t) = \omega_{x_n,x_{n+1},x_0}(\gamma(t)) =$$

$$= (1 - 2\gamma(t))x_n + 2\gamma(t)x_0,$$

звідки випливає, що

$$\omega(t) - x_0 = (1 - 2\gamma(t))(x_n - x_0).$$

Але $x_n - x_0 \in U$ і $0 \leq 1 - 2\gamma(t) \leq 1$, тому і $\omega(t) - x_0 \in U$, адже множина U заокруглена. Звідси отримуємо, що $\omega(t) \in U_{x_0}$.

Якщо ж $\alpha_{n+1} \leq t \leq \beta_n$, то $\frac{1}{2} \leq \gamma(t) = \frac{\alpha_n - t}{\alpha_n - \alpha_{n+1}} \leq 1$. Тому для таких t

$$\omega(t) = \omega_n(t) = \omega_{x_n,x_{n+1},x_0}(\gamma(t)) =$$

$$= (2 - 2\gamma(t))x_0 + (2\gamma(t) - 1)x_{n+1},$$

отже, $\omega(t) - x_0 = (2\gamma(t) - 1)(x_{n+1} - x_0)$. Оскільки $x_{n+1} - x_0 \in U$ і $0 \leq 2\gamma(t) - 1 \leq 1$, то знову $\omega(t) - x_0 \in U$, бо множина U заокруглена. Отже, і в цьому випадку $\omega(t) \in U_{x_0}$.

Ми з'ясували, що $\omega([\alpha_{n+1}, \alpha_n]) \subseteq U_{x_0}$ для кожного $n \geq N$. Тому і $\omega([0, \alpha_N]) \subseteq U_{x_0} \subseteq V_{x_0}$. Оскільки $[0, \alpha_N]$ – це окіл точки 0 у відрізку $[0, 1]$, то це і дає нам неперервність ω в точці 0.

Таким чином, побудоване нами відображення ω належить до класу C_{x_0}. За умовою композиція $g = f \circ \omega$ буде неперервною в точці 0, а тому і s-неперервною у цій точці. Оскільки $\alpha_n \to 0$, то $g(\alpha_n) \to g(0)$. Але $g(\alpha_n) = f(\omega(\alpha_n)) = f(x_n)$, а $g(0) = f(\omega(0)) = f(x_0)$. Отже, $f(x_n) \to f(x_0)$, що і треба було з'ясувати.

$(b) \Rightarrow (a)$. За законом контрапозиції імплікація $(b) \Rightarrow (a)$ рівносильна імплікації $\rceil(a) \Rightarrow \rceil(b)$, яку ми і доведемо.

Припустимо, що f не C_{x_0}-неперервне відображення. Тоді існує така крива $\omega_0 \in C_{x_0}$, що композиція $g_0 = f \circ \omega_0$ розривна в точці 0. Тому існує окіл V точки $y_0 = g_0(0) = f(x_0)$ у просторі Y, такий, що для кожного $\delta \in (0, 1)$ маємо: $g_0([0, \delta)) \nsubseteq V$. Беручи $\delta = \frac{1}{n}$, де $n \in \mathbb{N}$, ми отримуємо, що для кожного n існує точка $0 < t_n < \frac{1}{n}$, для якої $g_0(t_n) \notin V$. Ясно, що $t_n \to 0$, а тому $x_n = \omega_0(t_n) \to \omega_0(0) = x_0$, адже функція ω_0 неперервна в точці 0. При цьому $f(x_n) = f(\omega_0(t_n)) = g_0(t_n) \notin V$ для кожного номера n. Тому $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$, отже, f не є s-неперервним у точці x_0.

Зауваження. Якщо простір X локально опуклий, то конструкцію кривої ω з доведення імплікації $(a) \Rightarrow (b)$ можна спростити, з'єднуючи точки x_n і x_{n+1} відрізками і покладаючи $\omega(0) = x_0$.

3. Простори Фреше–Урисона і зв'язок між s-неперервністю та неперервністю. Нагадаємо, що топологічний простір X називається *простором Фреше–Урисона*, якщо для кожної його підмножини A виконується рівність $\overline{A}^s = \overline{A}$. У довільних топологічних просторах можна гарантувати лише включення $\overline{A}^s \subseteq \overline{A}$. Виявляється, що має місце наступна

Теорема 2. *Для топологічного простору X такі умови рівносильні:*

(a) X – це простір Фреше–Урисона;

(b) для кожного топологічного простору Y, довільного відображення $f : X \to Y$ і кожної точки x з X з s-неперервності відображення f у точці x випливає його неперервність у точці x;

(c) для кожної функції $f : X \to \mathbb{R}$ і довільної точки x з s-неперервності функції f у точці x випливає її неперервність у цій точці;

(d) для кожної функції $f : X \to \{0, 1\}$ зі значеннями у дискретній двоточці $\{0, 1\}$ і довільної точки x з X з s-неперервності функції f у точці x випливає її неперервність у цій точці.

Доведення. $(a) \Rightarrow (b)$. Припустимо, що (b) не виконується. Тоді існують топологічний простір Y, відображення $f : X \to Y$ і точка $a \in X$, такі, що $f-$ s-неперервне і розривне в точці a. В такому разі існує такий окіл V точки $f(a)$ в Y, що $f(U) \nsubseteq V$, для кожного околу U точки a.

Розглянемо множину $A = f^{-1}(Y \setminus V)$ і покажемо, що $a \in \overline{A}$. Справді, для кожного околу U точки a маємо, що $f(U) \nsubseteq V$, отже, існує така точка $u \in U$, що $f(u) \notin V$. Зрозуміло, що для цієї точки u ми будемо мати, що $u \in U \cap A$. Таким чином, $U \cap A \neq \emptyset$ для кожного околу U точки A, тому $a \in \overline{A}$.

Далі, перевіримо, що $a \notin \overline{A}^s$. Припустимо, що $a \in \overline{A}^s$. Тоді існує така послідовність точок x_n з A, що $x_n \to a$ в X. Оскільки f є s-неперервним у точці a, то і $f(x_n) \to f(a)$ в Y. Але $x_n \in A$ для кожного n, тому $f(x_n) \notin V$ для кожного n, звідки випливає, що $f(x_n) \nrightarrow f(a)$ в Y. Отримана суперечність доводить, що $a \notin \overline{A}^s$.

Ми вказали таку підмножину A простору X, для якої $\overline{A}^s \neq \overline{A}$, отже, X не є простором Фреше–Урисона. Таким чином, доведено, що $\rceil(b) \Rightarrow \rceil(a)$, отже, має місце імплікація $(a) \Rightarrow (b)$.

Імплікації $(b) \Rightarrow (c)$ і $(c) \Rightarrow (d)$ очевидні, бо дискретна двоточка $\{0,1\}$ є підпростором числової прямої $\mathbb{R}$.

$(d) \Rightarrow (a)$. Припустимо, що X не є простором Фреше–Урисона. Тоді існує така підмножина A в X, що $\overline{A}^s \neq \overline{A}$, тобто $\overline{A}^s \subset \overline{A}$. В такому разі існує точка $a \in \overline{A} \setminus \overline{A}^s$.

Розглянемо характеристичну функцію $f = \chi_A : X \to \{0,1\}$ множини A. Перевіримо, що функція f є s-неперервною в точці a. Нехай $x_n \to a$ в X. Тоді існує такий номер N, що $x_n \notin A$ при $n \geq N$. Справді, в іншому випадку ми змогли б визначити таку строго зростаючу послідовність номерів n_k, що $x_{n_k} \in A$ для кожного k. Але $x_{n_k} \to a$, адже $x_n \to a$. Виходить, що $a \in \overline{A}^s$, що суперечить вибору точки a. Оскільки $x_n \notin A$ при $n \geq N$, то $f(x_n) = 0$ при $n \geq N$. Далі $a \notin A$, бо $a \notin \overline{A}^s$ і $A \subseteq \overline{A}^s$. Тому і $f(a) = 0$. Отже, $f(x_n) \to f(a)$ при $n \to \infty$.

З другого боку функція $f : X \to \{0,1\}$ не буде неперервною у точці a. Справді, $f(a) = 0$ і $a \in \overline{A}$, тому в кожному околі U точки a знайдеться точка u з множини A, в якій $f(u) = 1$. Тому для околу $V = \{0\}$ точки $0 = f(a)$ у просторі $\{0,1\}$ і довільного околу U точки a в X будемо мати, що $f(U) \nsubseteq V$, що і дає нам розривність у точці a.

Таким чином, ми побудували функцію $f : X \to \{0,1\}$ і точку $a \in X$, такі, що функція f є s-неперервною в точці a, але не неперервною в цій точці, тобто умова (d) не виконується. Отже, $\rceil(a) \Rightarrow \rceil(d)$, а значить $(d) \Rightarrow (a)$.

З поняттям простору Фреше–Урисона споріднене поняття секвенціального простору [1, с.94]. Підмножину A простору X ми назвемо *секвенціально замкненою* (коротко: *s-замкненою*), якщо $\overline{A}^s = A$. Топологічний простір X називається *секвенціальним*, якщо в ньому кожна s-замкнена множина є замкненою, тобто з умови $\overline{A}^s = A$ випливає, що $\overline{A} = A$. Зрозуміло, що кожний простір Фреше–Урисона є секвенціальним. Обернене не виконується (див. приклад в [1, с.95]).

Позначимо символами $C(X,Y)$ і $C_s(X,Y)$ простори всіх неперервних чи s-неперервних відображень $f : X \to Y$ відповідно.

Подібно до теореми 2 має місце такий результат:

Теорема 3. *Для топологічного простору X такі умови рівносильні:*

(a) *простір X секвенціальний;*

(b) *для кожного топологічного простору Y має місце рівність $C_s(X,Y) = C(X,Y)$.*

(c) *для зв'язної двоточки $\{0,1\}$ з топологією $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ виконується рівність $C_s(X,Y) = C(X,Y)$.*

Доведення. Імплікацію $(a) \Rightarrow (b)$ доведено в [1, с.94], імплікація $(b) \Rightarrow (c)$ очевидна. Доведемо імплікацію $(c) \Rightarrow (a)$. Для цього доведемо, що має місце рівносильна до неї імплікація $\rceil(a) \Rightarrow \rceil(c)$.

Нехай X – не секвенціальний простір. Тоді в X існує секвенціальна замкнена множина A, яка не замкнена в X. Розглянемо її характеристичну функцію $f = \chi_A : X \to \{0,1\}$. Покажемо, що $f \in C_s(X,Y)$, де $Y = \{0,1\}$ – зв'язна двоточка. Нехай $x \in X \setminus A$ і $x_n \to x$ в X. Оскільки $x \notin A = \overline{A}^s$, то існує такий номер N, що $x_n \notin A$, як тільки $n \geq N$. Тому $f(x_n) = 0$ при $n \geq N$ і $f(x) = 0$, звідки випливає, що $f(x_n) \to f(x)$ в Y. Якщо ж $x \in A$, то $f(x) = 1$ і $f(x_n) \to f(x)$ для довільної послідовності точок x_n з X, адже у точки $1 = f(x)$ у просторі Y лише один окіл – це весь простір $Y = \{0,1\}$. Таким чином, функція f секвенціально неперервна.

Разом з тим $f \notin C(X,Y)$, адже прообраз $f^{-1}(1) = A$ замкненої в Y множини $\{1\} = Y \setminus \{0\}$ не замкнений в X. Таким чином, $f \in C_s(X,Y) \setminus C(X,Y)$ і умова (c) не виконується, отже, $\rceil(a) \Rightarrow \rceil(c)$, а значить, $(c) \Rightarrow (a)$ і теорема доведена.

Чи еквівалентна секвенціальність простору X рівності $C_s(X, \mathbb{R}) = C(X, \mathbb{R})$ залишається нез'ясованим.

4. Деякі приклади. Тут ми наведемо два приклади локально опуклих неметризовних просторів X, для яких з C_{x_0}-неперервності відображень $f : X \to Y$ не випливає їх неперервність у точці $x_0 \in X$.

Приклад 1. Нехай $X = \mathbb{R}^\infty$ – простір всіх фінітних послідовностей дійсних чисел, наділений своєю природною локально опуклою топологією індуктивної границі послідовності скінченновимірних підпросторів

$$\mathbb{R}_n = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots) :$$

$$\xi_k \in \mathbb{R} \text{ при } k = 1 \ldots n\}.$$

Базу околів нуля у цьому просторі утворюють множини

$$U_e = \{x = (\xi_k)_{k=1}^\infty : (\forall k \in \mathbb{N})(|\xi_k| < \varepsilon_k)\},$$

де $e = (\varepsilon_k)_{k=1}^\infty$ – довільна послідовність чисел $\varepsilon_k > 0$ [11, с.48].

Розглянемо у просторі $\mathbb{R}^\infty$ орти $e_n = (\delta_{n,k})_{k=1}^\infty$, де $\delta_{n,k} = 0$ при $k \neq n$ і $\delta_{n,n} = 1$. З точок

$$x_{m,n} = \frac{1}{n}e_1 + \frac{1}{m}e_n$$

простору $\mathbb{R}^\infty$ утворимо множину $A = \{x_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}\}$. Покажемо, що $0 \in \overline{A} \setminus \overline{A}^s$.

Нехай $U = U_e$, де $e = (\varepsilon_k)_{k=1}^\infty$, $\varepsilon_k > 0$ – довільний базисний окіл нуля у просторі $\mathbb{R}^\infty$. Оскільки $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то існує такий номер N, що $\frac{1}{N} < \varepsilon_1$. Так само існує такий номер M, що $\frac{1}{M} < \varepsilon_N$. В такому разі елемент $x_{M,N}$ з множини A входить у окіл U. Це показує, що $0 \in \overline{A}$.

З теореми Д'єдонне–Шварца [11, с.54] випливає, що кожна збіжна послідовність в $\mathbb{R}^\infty$ міститься в деякому дограничному просторі $\mathbb{R}_n$. Звідси легко вивести, що $0 \notin \overline{A}^s$.

Справді, нехай $y_j = x_{m_j,n_j} \to 0$ в $\mathbb{R}^\infty$ для деяких послідовностей номерів m_j та n_j. За теоремою Д'єдонне–Шварца існує таке n, що $n_j \leq n$ для кожного j. Тоді $\frac{1}{n_j} \geq \frac{1}{n} > 0$ для кожного j, отже, $\frac{1}{n_j} \nrightarrow 0$. Таким чином, перші координати послідовності y_j не прямують до нуля в $\mathbb{R}$, а тому $y_j \nrightarrow 0$ в $\mathbb{R}^\infty$.

Для побудованої нами множини $\overline{A}^s \neq \overline{A}$, отже, $\mathbb{R}^\infty$ не є простором Фреше – Урисона. Тому з теорем 1 і 2 випливає, що існує C_{x_0}-неперервна функція $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, яка не є неперервною в точці x_0.

Приклад 2. Нехай $X = \mathbb{R}^{[0,1]}$ – простір всіх функцій $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності. Розглянемо в ньому множину $A = C[0,1]$, що складається з усіх неперервних функцій $x : [0,1] \to \mathbb{R}$. Тоді $\overline{A}^s = B_1[0,1]$, де $B_1[0,1]$ – це множина всіх функцій $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ першого класу Бера. З другого боку $\overline{A} = X$, адже для довільної скінченної послідовності різних точок $t_1 \ldots t_n$ з відрізка $[0,1]$ і довільних чисел $s_1 \ldots s_n$ існує така неперервна функція $y : [0,1] \to \mathbb{R}$, що $y(t_k) = s_k$ при $k = 1 \ldots n$. Оскільки функція Діріхле $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ з X не є функцією першого класу Бера, адже вона скрізь розривна, а у функцій з $B_1[0,1]$ множина точок розриву є множиною першої категорії, то $\overline{A}^s \neq \overline{A}$, отже, і $X = \mathbb{R}^{[0,1]}$ не є простором Фреше – Урисона, а значить, існує C_{x_0}-неперервна функція на X, яка не є неперервною в точці x_0.

5. Секвенціально зв'язні множини. Нагадаємо, що *межею множини* E в топологічному просторі X називається перетин $frE = \overline{E} \cap \overline{X \setminus E}$ замикань самої множини E і її доповнення $X \setminus E$. Підмножину E множини X назвемо *нетривіальною*, якщо $E \neq \emptyset$ і $E \neq X$. Наступний критерій зв'язності топологічного простору ми не знайшли у відомих нам джерелах.

Теорема 4. *Топологічний простір X буде зв'язним тоді і тільки тоді, коли кожна нетривіальна підмножина E простору X має непорожню межу frE.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай X – зв'язний простір і E – нетривіальна підмножина X. Якби $frE = \emptyset$, то непорожні замкнені множини $A = \overline{E}$ і $B = \overline{X \setminus E}$ були б диз'юнктними і $A \sqcup B = X$, що суперечило б зв'язності простору X, отже, $frE \neq \emptyset$.

Достатність. Нехай простір X незв'язний. Тоді його можна розбити на дві непорожні замкнені множини A і B. В такому разі підмножина $E = A$ простору X буде нетривіальною і її межа

$$frE = \overline{E} \cap \overline{(X \setminus E)} = \overline{A} \cap \overline{B} = A \cap B = \emptyset.$$

Назвемо *секвенціальною межею* (коротко: s-*межею*) множини E в топологічному просторі X перетин $fr_s E = \overline{E}^s \cap \overline{X \setminus E}^s$ секвенціальних замикань самої множини E і її доповнення $X \setminus E$. Відштовхуючись від вказаної характеризації зв'язності назвемо простір X *секвенціально зв'язним* (коротко: s-*зв'язним*), якщо s-межа $fr_s E$ кожної нетривіальної підмножини E простору X непорожня. Так само як і теорема 4 легко доводиться

Теорема 5. *Топологічний простір X буде s-зв'язним тоді і тільки тоді коли його не можна розбити на дві непорожні s-замкнені множини A і B.*

6. Критерій секвенціальної неперервності. Добре відомо [1, с.57], що відображення $f : X \to Y$ буде неперервним тоді і тільки тоді коли прообраз $f^{-1}(B)$ кожної замкненої підмножини B простору Y замкнений у просторі X. Для секвенціально неперервних відображень має місце аналогічний критерій.

Теорема 6. *Для топологічних просторів X і Y і відображення $f : X \to Y$ наступні умови рівносильні:*

(a) f – s-неперервне;

(b) $f(\overline{A}^s) \subseteq \overline{f(A)}^s$ для кожної $A \subseteq X$;

(c) прообраз $f^{-1}(B)$ кожної s-замкненої множини B у просторі Y є s-замкненою множиною у просторі X.

Доведення. $(a) \Rightarrow (b)$. Нехай відображення f є s-неперервним і $A \subseteq X$. Доведемо, що $f(\overline{A}^s) \subseteq \overline{f(A)}^s$. Нехай $x \in \overline{A}^s$. Тоді існує послідовність точок $x_n \in A$, така, що $x_n \to x$. В такому разі $f(x_n) \to f(x)$ і $f(x_n) \in f(A)$ для кожного n. Тому $f(x) \in \overline{f(A)}^s$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Нехай виконується умова (b), B – s-замкнена підмножина Y і $A = f^{-1}(B)$. Тоді

$$f(\overline{A}^s) \subseteq \overline{f(A)}^s \subseteq \overline{B}^s = B,$$

отже, $A \subseteq \overline{A}^s \subseteq f^{-1}(B) = A$, а значить, $\overline{A}^s = A$, тобто і множина A буде s-замкненою в X.

$(c) \Rightarrow (a)$ Припустимо, що для відображення $f : X \to Y$ виконується умова (c), але воно не є s-неперервним. Тоді існує така точка $x \in X$ і послідовність точок $x_n \in X$, що $x_n \to x$ в X, але $f(x_n) \not\to f(x)$ в Y. Оскільки $f(x_n) \not\to f(x)$, то існує такий відкритий окіл V точки $f(x)$, що множина $S = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \notin V\}$ нескінченна. В такому разі $S = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, де $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ – строго зростаюча послідовність номерів. Розглянемо замкнену в Y множину $B = Y \setminus V$. Зрозуміло, що вона буде і s-замкненою в Y, тому її прообраз $A = f^{-1}(B)$ буде s-замкнений в X. За побудовою $f(x_{n_k}) \in B$ для кожного номера k, а значить, $x_{n_k} \in A$ для кожного k. Крім того, $x_{n_k} \to x$, адже $x_n \to x$. Але $x \notin A$, бо $f(x) \in V$, отже, $f(x) \notin B$. Виходить, що множина A не є s-замкненою, що приводить до суперечності.

7. Теорема про проміжне значення для секвенціально неперервних функцій. Встановимо тепер другий основний результат нашої роботи.

Теорема 7. *Нехай X – s-зв'язний топологічний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ – s-неперервне відображення, $a \in X$, $b \in X$ і $f(a) < \gamma < f(b)$. Тоді існує така точка $c \in X$, що $f(c) = \gamma$.*

Доведення. Розглянемо множини $A = f^{-1}((-\infty, \gamma]) = \{x \in X : f(x) \le \gamma\}$ і $B = X \setminus A$. За теоремою 6

$$f(fr_s A) = f(\overline{A}^s \cap \overline{B}^s) \subseteq f(\overline{A}^s) \cap f(\overline{B}^s) \subseteq$$

$$\subseteq \overline{f(A)}^s \cap \overline{f(B)}^s \subseteq$$

$$\subseteq \overline{(-\infty, \gamma]}^s \cap \overline{(\gamma, +\infty)}^s = \{\gamma\}.$$

Оскільки простір X є s-зв'язним і A – це нетривіальна підмножина простору X, адже $a \in A$ і $b \notin A$, то $fr_s(A) \ne \emptyset$. За доведеним $f(fr_s A) \subseteq \{\gamma\}$. Оскільки $f(fr_s A) \ne \emptyset$, то $f(fr_s A) = \{\gamma\}$. Тому існує така точка $c \in fr_s A$, що $f(c) = \gamma$, яка і буде шуканою.

Ясно, що подібним чином ми могли б довести і класичну теорему про проміжне значення [9, с.122].

8. Прикінцеві зауваження. Поняття s-зв'язності і теорема 7 виникли в результаті узагальнення такого доведення теореми про проміжне значення для відрізка. Нехай $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ – неперервна функція і $f(a) < \gamma < f(b)$. Доведемо, що існує точка $c \in (a, b)$, така, що $f(c) = \gamma$. Розглянемо множину $A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq \gamma\}$. Зрозуміло, що множина A замкнена, непорожня і обмежена. Тому існує її точна верхня межа c, причому $c \in A$, отже, $f(c) \leq \gamma$. В такому разі, $c < b$, бо $f(b) > \gamma$ і $b \notin A$. З проміжка $(c, b]$ можна вибрати послідовність точок x_n, таку, що $x_n \to c$. Для неї $f(x_n) > \gamma$ для кожного n. Переходячи в цій нерівності до границі при $n \to \infty$, ми отримаємо, що $f(c) \geq \gamma$. Тоді $f(c) = \gamma$.

Зауважимо, що побудована у цьому доведенні точка c належить якраз до секвенціальної межі множини A.

На завершення автори висловлюють вдячність О.В. Маслюченку за стимулюючу участь у обговореннях і корисні поради.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752с.

2. *Маслюченко В.К.* Лекції з функціонального аналізу. Ч.1. Метричні і нормовані простори. – Чернівці: ЧНУ Рута, 2010. – 184с.

3. *Baire R.* Sur les fonctions de variables reélles // Ann. Mat. Pura Appl., ser.3. – 1899. – **3**. – P. 1-123.

4. *Young W., Young G.* Discontinuous functions continuous with respect to every straight line // Quart. J. Pure Appl Math. – 1909. – **41**. – P. 87-93.

5. *Rosenthal A.* On the continuity of functions of several variables // Math. Z. – 1955. – **63**. – P. 31–38.

6. *Ciesielski K., Glatzer T.* Functions continuous on twice differentiable curves, discontinuous on large sets // Real Anal. Exch. – 2012. – **37**, №2. – P. 353–361.

7. *Ciesielski K., Glatzer T.* Sets of Discontinuities of Linearly Continuous Functions // Real Anal. Exch. – 2013. – **38**, №2. – P. 337–389.

8. *Ciesielski K., Glatzer T.* Sets of discontinuities for functions continuous on flats // Real Anal. Exch. – 2014. – **39**, №1. – P. 117–138.

9. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 368с.

10. *Маслюченко В.К.* Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці: Рута, 2002. – 72с.

11. *Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори. – Чернівці: Рута, 2002. – 72с.