УДК 517.5

©2017 р. В.М. Дільний, Х.О. Гук

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

КРИТЕРІЙ РОЗЩЕПЛЕННЯ У ПРОСТОРІ ПЕЛІ - ВІНЕРА

Для задачі розщеплення двох функцій у просторі Пелі - Вінера W^1_σ знайдено критерій розв'язку. Показано, що за умови відсутності коефіцієнтів Фур'є з від'ємними номерами розщеплення існує.

We found the criterion of solution for the decomposition problem in the Paley - Wiener space W^1_σ. We obtain the sufficient condition for the splitting.

1. Вступ. Зображення математичних об'єктів у вигляді суми об'єктів з простішими властивостями є одним з основних способів дослідження у математиці. У теорії аналітичних функцій відомими є дослідження Р. С. Юлмухаметова [1], [2], Ю. І. Любарського [3], І. Е. Чижикова [4], Т. І. Гіщак [5] та одного з співавторів [6] про зображення функціональних просторів у вигляді суми чи добутку двох простіших.

2. Основні поняття та позначення. Ми позначаємо через W^p_σ, $\sigma > 0$, простір Пелі - Вінера, тобто простір цілих функцій f експоненціального типу $\leq \sigma$, що належать $L^p(R)$. Простір W^p_σ може бути визначений і як простір цілих функцій, що задовольняють умову

$$\sup_{\varphi\in(0;2\pi)}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|(fre^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}dr\right\}^{1/p} < +\infty.$$

У дослідженнях Б. В. Винницького та його учнів виникла [7] задача про розщеплення функцій з простору Пелі - Вінера W^1_σ на суму двох функцій, кожна з яких характеризується тим, що її модуль є "великим" відповідно у верхній та нижній півплощині.

Т. І. Гіщак та один зі співавторів розглядали наступну задачу в [5].

Задача розщеплення. *Чи для кожної функції $f\in W^1_\sigma$ можливий розклад $f=\chi+\mu$, де функції χ і μ є аналітичними в $C_+=\{z : Rez>0\}$, а також $\chi\in E^1[C(0;\frac{\pi}{2})]$, $\mu\in E^1[C(-\frac{\pi}{2};0)]$?*

Тут $E^p[C(\alpha;\beta)], 0<\beta-\alpha<2\pi, 1\leq p<+\infty$, простір аналітичних функцій f в $C(\alpha;\beta)=\{z : \alpha<\arg z<\beta\}$ для яких

$$\sup_{\alpha<\varphi<\beta}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|dr\right\}<+\infty.$$

Також всюди на $\partial C(\alpha;\beta)$ функції $f\in E^p[C(\alpha;\beta)]$ [8] мають кутові граничні значення і $f\in L^p[C(\alpha;\beta)]$.

Нижченаведені твердження відіграють фундаментальну роль в теорії просторів Пелі - Вінера [2].

Теорема Пелі - Вінера. *Простір W^2_σ збігається з простором функцій f, що зображаються як*

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma}\varphi(it)e^{itz}dt, \varphi\in L^2(-i\sigma;i\sigma) \tag{1}$$

Для $p=1$ аналогічне твердження встановлене Р. Боасом [9] та (в іншій формі) Г. З. Бером [10]. Також відомі аналоги для випадків $1<p<2$.

Теорема Бера. *Простір W^1_σ збігається з простором функцій f, що зображаються як (1), де*

$$\varphi(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{-\frac{ik\pi t}{\sigma}},\quad (c_k)\in l^1 \tag{2}$$

і

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^{k+m}c_{k+m}\frac{k}{1+k^2}\right|<+\infty.$$

В [5] запропоновано шукати розв'язок Задачі розщеплення у формі

$$\chi(z)=\chi_1(z)+i\chi_2(-iz), \tag{3}$$

де

$$\chi_1(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\sigma}\varphi(it)e^{itz}dt,$$

$$\chi_2(z)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\sigma}^{0}\varphi(it)e^{itz}dt$$

і показано, що χ є розв'язком тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_k k}{(m-\frac{i}{2}-k)(m-\frac{i}{2}-ik)}\right|<+\infty, \tag{4}$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_k k}{(m+\frac{i}{2}+ik)(m+\frac{i}{2}-k)}\right|<+\infty. \tag{5}$$

3. Основна теорема. Метою нашої статті є доведення наступного твердження.

Теорема 1. *Нехай $f\in W_\sigma^1$. Функція χ, визначена рівністю (3), є розв'язком Задачі розщеплення тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\left|\sum_{k=[\frac{m}{2}]}^{[\frac{3m}{2}]}\frac{c_k}{m-\frac{i}{2}-k}\right|<+\infty, \tag{6}$$

де коефіцієнти c_k визначені в (2).

Наслідок. *Нехай $f\in W_\sigma^1$ і $c_k=0$ для всіх $k>0$, де коефіцієнти (c_k) визначені в (2). Тоді χ є розв'язком Задачі розщеплення.*

Доведення Теореми 1 випливає з лем 1-5.

Лема 1. *Нехай $f\in W_\sigma^1$. Функція χ, визначена рівністю (3), є розв'язком Задачі розщеплення тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}]}\frac{c_k}{x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k)}\right|dx<+\infty, \tag{7}$$

де коефіцієнти c_k визначені в (2). **Доведення.** Нехай виконується умова (6), тоді

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}]}\frac{c_k}{x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k)}\right|dx=$$

$$=\sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\left|\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]}\frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)}-\right.$$

$$-\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]}\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)}+$$

$$\left.+\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]}\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)}\right|dx\le$$

$$\le\sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\theta(m;x)dx+$$

$$+\frac{\pi}{\sigma}\left|\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]}\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)}\right|,$$

де

$$\theta(m;x)=\left|\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]}\frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)}-\right.$$

$$\left.-\frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)}\right|.$$

Покажемо, що

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{\sigma}}\theta(m;x)dx<+\infty, \tag{8}$$

Оскільки $\frac{1}{x+\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)}-\frac{1}{\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)}=\frac{-x}{(x+\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k))(\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k))}$, то

$$\theta(m;x)\le\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]}|c_k|\times$$

$$\times\left|\frac{-x}{(x+\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k))(\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k))}\right|=$$

$$= \sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]} |c_k| \frac{x\sigma}{\pi} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(\frac{x\sigma}{\pi}+m-k)^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(m-k)^2+\frac{1}{4}}}.$$

Тоді застосувавши теорему про середнє отримаємо,

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \theta(m;x)dx = \frac{\pi}{\sigma} \times$$

$$\times \sum_{k=[\frac{\alpha}{2}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3\alpha}{2}+\frac{3m}{2}]} \frac{\alpha|c_k|}{\sqrt{(\alpha+m-k)^2+\frac{1}{4}}\sqrt{(m-k)^2+\frac{1}{4}}},$$

де $\alpha \in [0;1]$. Підставивши отриманий результат у (8) змінимо порядок сумування і позначимо $m' = m-k$, тоді

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=[\frac{2k}{3}-\alpha]-k}^{[2k+\frac{\alpha}{4}]-k} \frac{\alpha|c_k|}{\sqrt{(\alpha+m')^2+\frac{1}{4}}\sqrt{m'^2+\frac{1}{4}}} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=[\frac{2k}{3}-\alpha]-k}^{[2k+\frac{\alpha}{4}]-k} \frac{|c_k|}{\sqrt{(\alpha+m')^2+\frac{1}{4}}\sqrt{m'^2+\frac{1}{4}}} \le$$

$$\le \beta \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=[\frac{2k}{3}-\alpha]-k}^{[2k+\frac{\alpha}{4}]-k} \frac{|c_k|}{(1+m')^2+\frac{1}{4}} < +\infty,$$

де $\beta > 0$.

Нехай тепер виконується умова (7), тоді

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=[\frac{m}{2}]}^{[\frac{3m}{2}]} \frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)} \right| =$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=[\frac{m}{2}]}^{[\frac{3m}{2}]} \frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)} - \right.$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]} \frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)} dx +$$

$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{\sigma}} \sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]} \frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)} dx \right| \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]} \frac{c_k}{\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)} - \right.$$

$$\left. - \frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)} \right| dx +$$

$$+ \sum_{m=1}^{+\infty} \left| \sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}+\frac{m}{2}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}+\frac{3m}{2}]} \frac{c_k}{x+\frac{\pi}{\sigma}(m-\frac{i}{2}-k)} \right| dx.$$

Як показано вище, виконується (8) незалежно від умови (6). Тому виконується (7).

Лема 2. *Нехай $f \in W^1_\sigma$. Тоді для коефіцієнтів у зображенні (2) виконується нерівність* $\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=[\frac{3x\sigma}{2\pi}]+1}^{+\infty} \frac{c_k k}{(x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))} \right| dx < +\infty$

Доведення. Розглянемо область визначення функції $\frac{c_k k}{(x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))}$ як функції двох змінних x та k. При цьому вважатимемо, що $c_k = 0$ при $0 \le k < [\frac{3x\sigma}{2\pi}]$. Тоді

$$\left| \sum_{k=[\frac{3x\sigma}{2\pi}]+1}^{+\infty} \frac{c_k k}{(x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))} \right| \le$$

$$\le \sum_{k=[\frac{3x\sigma}{2\pi}]+1}^{+\infty} \left| \frac{c_k k}{(x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))} \right|$$

і, оскільки, ряд рівномірно збіжний за ознакою Вейєрштраса, і беручи до уваги, що $\left|x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k)\right| = \sqrt{(x-\frac{\pi}{\sigma}k)^2+(\frac{\pi}{2\sigma})^2} = |x-\frac{\pi}{\sigma}k|$, при $x \le \frac{2\pi k}{3\sigma}$ отримаємо $\frac{\pi}{\sigma}k - x = \frac{\pi}{3\sigma}k + \frac{2\pi}{3\sigma}k - x \ge \frac{\pi}{3\sigma}k + x - x = \frac{\pi}{3\sigma}k = \frac{3}{5}\frac{\pi}{3\sigma}k + \frac{2}{5}\frac{\pi}{3\sigma}k \ge \frac{3}{5}\frac{\pi}{3\sigma}k + \frac{1}{5}x = \frac{1}{5}\frac{\pi}{\sigma}k + \frac{1}{5}x = \frac{1}{5}(x+\frac{\pi k}{\sigma})$, $|x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)| \ge \frac{|x|+|\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)|}{2} \ge \frac{1}{2}(x+\frac{\pi k}{\sigma})$, почленно проінтегруємо ліву частину нерівності, яку слід довести.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k| \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{2\pi k}{3\sigma}} \left| \frac{k}{(x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))} \right| dx \le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} 10|c_k| \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{2\pi k}{3\sigma}} \frac{k}{(x+\frac{\pi k}{\sigma})^2} dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} 10k|c_k| \left(-\frac{3\sigma}{5\pi} + \frac{\sigma}{\frac{\pi}{k}+\pi}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} d_2|c_k| < +\infty,$$

де $10(-\frac{3\sigma}{5\pi} + \frac{\sigma}{\frac{\pi}{k}+\pi}) \leq d_2$, для деякої сталої $d_2 \in R$.

Лема 3. *Нехай* $f \in W^1_\sigma$. *Тоді* $\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum\limits_{k=-\infty}^{0} \frac{c_k k}{(x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))} \right| dx < +\infty,$ *де коефіцієнти* c_k *визначені в (2).* **Доведення.** Позначимо через M ліву частину нерівності, яку потрібно довести. Тоді

$$M \leq \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{|c_k|k}{\sqrt{(x-\frac{k\pi}{\sigma})^2+(\frac{\pi}{2\sigma})^2}} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{x^2+(\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))^2}} dx.$$

Проінтегрувавши почленно за ознакою Вейєрштраса, одержимо

$$M \leq \sum_{k=-\infty}^{0} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k|k}{\sqrt{(x-\frac{k\pi}{\sigma})^2+(\frac{\pi}{2\sigma})^2}} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{x^2+(\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))^2}} dx \leq$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{0} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k|k}{\sqrt{(x-\frac{k\pi}{2\sigma})^2}\sqrt{x^2+(\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))^2}} dx.$$

Окільки $\sqrt{x^2+(\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))^2} \geq C\sqrt{x^2+(\frac{\pi k}{\sigma})^2}$, для деякої сталої $C>0$, що не залежить від k та $x \in [\frac{\pi}{\sigma};+\infty]$ і $2x\frac{k\pi}{\sigma} \leq 0$, то

$$M \leq \frac{1}{C} \sum_{k=-\infty}^{0} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k|k}{\sqrt{x^2-2x\frac{k\pi}{\sigma}+(\frac{k\pi}{\sigma})^2}} \times$$

$$\times \frac{dx}{\sqrt{x^2+(\frac{k\pi}{\sigma})^2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{C} \sum_{k=-\infty}^{0} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k|k dx}{\sqrt{x^2+(\frac{k\pi}{\sigma})^2}\sqrt{x^2+(\frac{k\pi}{\sigma})^2}}$$

$$= \frac{1}{C} \sum_{k=-\infty}^{0} |c_k| \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{\pi}\arctan\frac{1}{k}\right) < +\infty.$$

Лема 4. *Нехай* $f \in W^1_\sigma$. *Тоді*
$$\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \left| \sum_{k=0}^{[\frac{x\sigma}{2\pi}]} \frac{c_k k}{(x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))} \right| dx < +\infty,$$
де коефіцієнти c_k *визначені в (2).* **Доведення.** Покажемо, що

$$\sum_{k=0}^{1} \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_k|k dx}{|x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k)||x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)|} < +\infty$$

Справді

$$\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_1|}{|x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+1)||x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+1)|} dx \leq$$

$$\leq \int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{2\pi}{\sigma}} \frac{|c_1|}{|x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+1)||x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+1)|} dx +$$

$$+ \int_{\frac{2\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{|c_1|}{|x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+1)||x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+1)|} dx.$$

Функція $P(x) = \frac{1}{|x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+1)||x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+1)|}$ є неперервною, тому

$$\int_{\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{2\pi}{\sigma}} P(x)dx < +\infty.$$

Очевидно,

$$\int_{\frac{2\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{\pi}{\sigma})^2+(\frac{\pi}{4\sigma})^2}\sqrt{x^2+(\frac{3\pi}{2\sigma})^2}} \leq$$

$$\leq \int_{\frac{2\pi}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{x(x-\frac{\pi}{\sigma})} dx < +\infty$$

Розглянемо $\sum\limits_{k=2}^{+\infty}\int\limits_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\frac{c_k k}{(x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))}\right|dx.$ Зауваживши, що $|x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k)| = \sqrt{(x-k\frac{\pi}{\sigma})^2+(\frac{\pi}{2\sigma})^2} \geq |x-\frac{k\pi}{\sigma}| = x-\frac{k\pi}{\sigma} \geq \frac{x}{2}+\frac{x}{2}-\frac{k\pi}{\sigma} \geq \frac{x}{2}+\frac{k\pi}{\sigma}-\frac{k\pi}{\sigma} = \frac{x}{2} = \frac{x}{3}+\frac{x}{6} \geq \frac{x}{3}+\frac{2k\pi}{\sigma}\frac{1}{6} = \frac{x}{3}+\frac{k\pi}{3\sigma} = \frac{1}{3}(x+\frac{k\pi}{\sigma})$, та $|x-\frac{i\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)| \geq \frac{|x|+|\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)|}{2} \geq \frac{1}{2}(|x|+\frac{\pi|k|}{\sigma})$, отримаємо

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\int\limits_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\frac{c_k k}{(x-\frac{\pi}{\sigma}(\frac{i}{2}+k))(x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))}\right|dx \leq$$

$$\leq \sum_{k=2}^{+\infty}\int\limits_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty}\frac{6k|c_k|}{(x+\frac{k\pi}{\sigma})^2}dx = \sum_{k=2}^{+\infty}\left(-\frac{6k|c_k|}{x+\frac{k\pi}{\sigma}}\right)\Bigg|_{\frac{2k\pi}{\sigma}}^{+\infty}$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty}2|c_k|\frac{\sigma}{\pi} < +\infty$$

Лема 5. *Нехай $f \in W_\sigma^1$, тоді*

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\sigma}}^{+\infty}\left|\sum_{k=[\frac{x\sigma}{2\pi}]}^{[\frac{3x\sigma}{2\pi}]+1}\frac{c_k}{x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)}\right|dx < +\infty, \qquad (9)$$

де коефіцієнти c_k визначені в (2). **Доведення.** Почленно проінтегруємо ліву частину нерівності (9)

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{\frac{2k\pi}{3\sigma}}^{\frac{2k\pi}{\sigma}}\frac{|c_k|}{|x-i\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k)|}dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{\frac{2k\pi}{3\sigma}}^{\frac{2k\pi}{\sigma}}\frac{|c_k|}{\sqrt{x^2+(\frac{\pi}{\sigma}(\frac{1}{2}+k))^2}}dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}|c_k|\ln\left(x+\sqrt{x^2+\left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}\right)\Bigg|_{\frac{2k\pi}{3\sigma}}^{\frac{2k\pi}{\sigma}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}|c_k|\ln\left(\frac{2k\pi}{\sigma}+\sqrt{\left(\frac{2k\pi}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}\right)$$

$$-|c_k|\ln\left(\frac{2k\pi}{3\sigma}+\sqrt{\left(\frac{2k\pi}{3\sigma}\right)^2+\left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}|c_k|\ln L(k),$$

де

$$L(k) = \frac{\frac{2k\pi}{\sigma}+\sqrt{\left(\frac{2k\pi}{\sigma}\right)^2+\left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}}{\frac{2k\pi}{3\sigma}+\sqrt{\left(\frac{2k\pi}{3\sigma}\right)^2+\left(\frac{\pi}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+k\right)\right)^2}}$$

Функція $\ln L(k)$, як неперервна на $(0;+\infty)$ функція змінної k є обмеженою, бо

$$\lim_{k\to 0}L(k) = 1, \quad \lim_{k\to+\infty}L(k) = \frac{2+\sqrt{5}}{\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Юлмухаметов Р. С.* Расщепление целых функций с нулями в полосе // Матем. сб. – 1995. – **186**, №7. – С. 147-160.

2. *Юлмухаметов Р. С.* Решение проблемы Л.Эренпрайса о факторизации // Матем. сб. – 1999. – **190**, №4. – С. 123-157.

3. *Любарский Ю. И.* Представление функций из H^p в полуплоскости и некоторые его приложения // Теория функций, функциональный анализ и их приложения: Респ. межвед. науч. сб. / Харьковский государственный университет им. А.М. Горького. – 1982. – **38**, – С. 76-84.

4. *Chyzhykov I. E.* Growth of p-th means of analytic and subharmonic functions in the unit disc and angular distribution of zeros // 1509.02141.v2/arXiv.org – 2015. – C. 1-19.

5. *Dilnyi V. M., Hishchak T. I.* On splitting functions in Paley-Wiener space // Mat. Stud. – 2016. – **45**, №2. –P. 137-148.

6. *Dilnyi V. M.* Splitting of some spaces of analytic functions // Ufa Mathematical Journal. – 2014. – **6**, №2. – P. 25-34.

7. *Винницький Б. В.* Про узагальнення теореми Пелі-Вінера // Математичні студії. – 1995. – **4**. – С. 37-44.

8. *Джрбашян М. М.* Интегральные преоброзавания и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1976. — 672 с.

9. *Boas R. Ph.* Entire functions. — N.-Y.: Academic Press, 1954. — 276 p.

10. *Бер Г. З.* О явление интерференции в интегральной метрике и аппроксимация целыми функциями экспоненциального типа // Теор. функц., функц. анал. и прил. – 1980. – **34**, №1. –С. 11-24.