УДК 517.956.4

©2017 р. В.С. Дронь, С.Д. Івасишен

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів

ВЛАСТИВОСТІ ОБ'ЄМНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ $2\vec{b}$-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Розглядається задача Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з $2\vec{b}$-параболічною частиною за основними змінними із залежними лише від часової змінної t коефіцієнтами. Встановлюються властивості відповідного такій задачі об'ємного потенціалу в просторах Гельдера зростаючих при $|x| \to \infty$ функцій. З цих властивостей випливає коректна розв'язність задачі Коші з однорідними початковими умовами.

A Cauchy problem for degenerate equation of Kolmogorov type with $2\vec{b}$-parabolic part with respect to main variables with dependent on only time-variable t coefficients is considered. Properties of a volume potential which corresponding to the problem are established in Hölder spaces of increased functions as $|x| \to \infty$. From these properties a well-posedness of the Cauchy problem with homogeneous initial conditions is implied.

Вступ. Розглядатимемо одновимірну часову змінну t і n-вимірну просторову змінну x, яка складається з груп змінних $x_j := (x_{j1}, ...x_{jn_j}) \in R^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, де $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 0$, $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Нехай b_1, ..., b_{n_1} – деякі числа з N. Позначимо через $2\vec{b}$ вектор $(2b_1, ..., 2b_{n_1})$, через b – найменше спільне кратне чисел $b_1, ..., b_{n_1}$, через m_j – число b/b_j, $j \in \{1, ..., n_1\}$. Об'єктом дослідження в цій статті є задача Коші вигляду

$$\Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{\|k_1\|\leq 2b} a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1}\Big)\times$$

$$\times u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (1)$$

$$u(t,x)|_{t=0} = 0, \quad x \in R^n, \qquad (2)$$

де для мультиіндекса $k_1 := (k_{11}, ..., k_{1n_1}) \in Z_+^{n_1}$ покладено $\|k_1\| := \sum\limits_{j=1}^{n_1} m_j k_{1j}$, $\Pi_{(0,T]} := (0,T] \times R^n$, T – додатне число. Припускається, що коефіцієнти a_{k_1}, $k_1 \in Z_+^{n_1}$, $\|k_1\| \leq 2b$, є неперервними комплекснозначними функціями на $[0,T]$ і такими, що диференціальний вираз $\partial_t - \sum\limits_{\|k_1\|\leq 2b} a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1}$ рівномірно на $[0,T] \times R^{n_1}$ $2\vec{b}$-параболічний, тобто існує стала $\delta > 0$ така, що для всіх $t \in [0,T]$ і $\sigma_1 \in R^{n_1}$ виконується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{\|k_1\|=2b} a_{k_1}(t)(i\sigma_1)^{k_1} \leq -\delta \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{2b_j}.$$

Тут i – уявна одиниця.

Якщо $n_3 \geq 1$, то рівняння (1) вироджується за двома групами змінних x_2 і x_3. Коли $n_3 = 0$, а $n_2 \geq 1$, то є виродження за однією групою змінних x_2. У випадку $n_2 = n_3 = 0$ рівняння (1) невироджене.

Рівняння (1) є виродженим рівнянням типу Колмогорова з $2\vec{b}$-параболічною частиною за основними змінними. Для нього існує фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) G, детальні властивості якого наведено в [1]. Функція G породжує об'ємний потенціал з густиною f вигляду

$$u(t,x) := \int_0^t d\tau \int_{R^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \qquad (3)$$

Для випадку, коли рівняння (1) 2-го порядку, тобто $b_j = 1$, $j \in \{1, ..., n_1\}$, в [1] досліджувались властивості функції (3) в припущенні локальної гельдеровості й експоненціального зростання при $|x| \to \infty$ функції f. Зв'язок гельдерівських властивостей і поведінки при $|x| \to \infty$ густини f і функції u та її похідних з'ясовувався в [2] для рівняння (1) 2-го порядку, в [3] – довільного порядку при $b_j = b$, $j \in \{1, ..., n_1\}$. Тут ми наведемо аналогічні властивості (3) для рівняння (1).

1. Означення норм і просторів. Користуватимемось такими позначеннями: $M := \{1, 2, 3\}$; $N_s := \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_l}(2b(l-1) + m_j)/(2b)$, $s \in M$, $N := N_3$; Z^l_+ – множина всіх l-вимірних мультиіндексів; $k_l := (k_{l1}, ..., k_{ln_l})$ – елемент множини $Z^{n_l}_+$, $l \in M$; $k := (k_1, k_2, k_3)$ – елемент множини Z^n_+; $|k_l| := k_{l1} + ... + k_{ln_l}$, якщо $k_l \in Z^{n_l}_+$, $l \in M$; $N_{k_l} := \sum_{j=1}^{n_l}(2b(l-1) + m_j)k_{lj}/(2b)$, $k_l \in Z^{n_l}_+$, $l \in M$; $q_j := 2b_j/(2b_j - 1)$, $j \in \{1, ..., n_1\}$; q', q'' – найбільше і найменше з чисел $q_j, j \in \{1, ..., n_1\}$; m', m'' – найбільше і найменше з чисел $m_j, j \in \{1, ..., n_1\}$; $\overline{x}_{1j}(t) := x_{1j}$, $j \in \{1, ..., n_1\}$; $\overline{x}_{2j}(t) := x_{2j} + tx_{1j}$, $j \in \{1, ..., n_2\}$; $\overline{x}_{3j}(t) := x_{3j} + tx_{2j} + (t^2/2)x_{1j}$, $j \in \{1, ..., n_3\}$; $\overline{x}_l(t) := (\overline{x}_{l1}(t), ..., \overline{x}_{ln_l}(t))$, $l \in M$; $X_1(t) := (\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t), \overline{x}_3(t))$; $X_2(t) := (\xi_1, \overline{x}_2(t), \overline{x}_3(t))$; $X_3(t) := (\xi_1, \xi_2, \overline{x}_3(t))$; $\rho_s(t, x, \xi) := \sum_{l=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_l} t^{1-lq_j}|\overline{x}_{lj}(t) - \xi_{lj}|^{q_j}$, $s \in M$; $\rho_0(t, x, \xi) := 0$; $\rho(t, x, \xi) := \rho_3(t, x, \xi)$; $E_c(t, x; \tau, \xi) := \exp\{-c\rho(t-\tau, x, \xi)\}$, якщо c – додатна стала; $[a, x] := \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_j} a_{lj}|x_{lj}|^{q_j}$, якщо $a = (a_1, a_2, a_3) \in R^n_+$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^n$; $|x_l| := \left(\sum_{j=1}^{n_l} x^2_{lj}\right)^{1/2}$, $x_l \in R^{n_l}$, $l \in M$; ∂_t, ∂_y – операції диференціювання першого порядку відповідно за змінними t, y; ∂^s_y – операція диференціювання порядку $s > 1$ за змінною y; $\partial^{k_l}_{x_l} := \partial^{k_{l1}}_{x_{l1}} ... \partial^{k_{ln_l}}_{x_{ln_l}}$, якщо $x_l \in R^{n_l}$, $k_l \in Z^{n_l}_+$, $l \in M$; $\Delta^{x'}_x f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, x', \cdot)$; $d(x, \xi, \alpha) := \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l} |x_{lj} - \xi_{lj}|^{\alpha_l/(2b(l-1)+m_j)}$, якщо $\{x, \xi\} \subset R^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$, $\alpha_1 \in [0, m'']$, $\alpha_2 \in [0, 2b+m'']$, $\alpha_3 \in [0, 4b+m'']$; $d(x, \xi; \gamma) := \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l} |x_{lj} - \xi_{lj}|^{\gamma/(2b(l-1)+m_j)}$, якщо $\{x, \xi\} \subset R^n$, $\gamma > 0$; $d(x, \xi) := d(x, \xi; 1)$; $B_R := \{x \in R^n | d(x, 0) \le R\}$.

Зауважимо, що існують додатні числа c', c'' такі, що для довільних $\{x, \xi\} \subset R^n$ і $\gamma > 0$:
$$c'(d(x, \xi))^\gamma \le d(x, \xi; \gamma) \le c''(d(x, \xi))^\gamma.$$

Однаково позначаються різні сталі, якщо їх величини нас не цікавлять.

Для додатного числа c_0 і набору $a := (a_1, a_2, a_3)$, $a_l := (a_{l1}, ..., a_{ln_l})$, $l \in M$, невід'ємних чисел a_{lj}, $j \in \{1, ..., n_l\}$, $l \in M$, таких, що $T < \min_{l \in M, j \in \{1,...,n_l\}} (c_0/a_{lj})^{(2b_j-1)/(2b_j(l-1)+1)}$, розглянемо функції [1]

$k_{lj}(t, a_{lj}) := c_0 a_{lj}(c_0^{2b_j-1} - a_{lj}^{2b_j-1} t^{2b_j(l-1)+1})^{1-q_j}$, $j \in \{1, ..., n_l\}$, $l \in M$;
$k(t) := (k_{11}(t, a_{11}), ..., k_{1n_1}(t, a_{1n_1}), k_{21}(t, a_{21}), ..., k_{2n_2}(t, a_{2n_2}), k_{31}(t, a_{31}), ..., k_{3n_3}(t, a_{3n_3}))$;
$s_{1j}(t) := k_{1j}(t, a_{1j}) + 2^{q_j-1}\theta(n_2 - j)t^{q_j} \times k_{2j}(t, a_{2j}) + 2^{q_j-2}\theta(n_3 - j)t^{2q_j} k_{3j}(t, a_{3j})$, $j \in \{1, ..., n_1\}$;
$s_{2j}(t) := 2^{q_j-1}k_{2j}(t, a_{2j}) + 4^{q_j-1}\theta(n_3 - j)t^{q_j} \times k_{3j}(t, a_{3j})$, $j \in \{1, ..., n_2\}$;
$s_{3j}(t) := 4^{q_j-1}k_{3j}(t, a_{3j})$, $j \in \{1, ..., n_3\}$;
$s(t) := (s_{11}(t), ..., s_{1n_1}(t), s_{21}(t), ..., s_{2n_2}(t), s_{31}(t), ..., s_{3n_3}(t))$, $t \in [0, T]$,

де $\theta(\tau) = 1$ для $\tau \ge 0$ і $\theta(\tau) = 0$ для $\tau < 0$. Введені функції мають такі властивості:
$$k(0) = a, \ a_{lj} \le k_{lj}(\tau, a_{lj}) < k_{lj}(t, a_{lj}) < s_{lj}(t), \quad 0 \le \tau < t \le T, \ j \in \{1, ..., n_l\}, \ l \in M; \tag{4}$$
$$k_{lj}(t - \tau, k_{lj}(\tau, a_{lj})) \le k_{lj}(t, a_{lj}), \quad 0 \le \tau \le t \le T, \ j \in \{1, ..., n_l\}, \ l \in M; \tag{5}$$
$$-c_0\rho(t, x, \xi) + [a, \xi] \le [k(t), X_1(t)] \le [s(t), x], \quad t \in (0, T], \ \{x, \xi\} \subset R^n. \tag{6}$$

Легко переконатися, що справджуються ще такі нерівності:
$$-c_0\rho(t-\tau, x, \xi) + [k(\tau), \xi] \le [k(t), X_1(t-\tau)] \le [s(t), x], \quad 0 \le \tau < t \le T, \ \{x, \xi\} \subset R^n; \tag{7}$$
$$-c_0\rho_{l-1}(t - \tau, x, \xi) + [k(\tau), X_l(t - \tau)] \le [k(t), X_1(t - \tau)], \quad 0 \le \tau < t \le T, \ \{x, \xi\} \subset R^n, \ l \in M; \tag{8}$$
$$[k(T), X_1(t)] \le [s(T), x], t \in [0, T], x \in R^n. \tag{9}$$

Означимо норми і простори функцій. Нехай $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3$, $\alpha_1 \in (0, m'']$, $\alpha_2 \in (m', 2b+m'']$, $\alpha_3 \in (2b+m', 4b+m'']$, $p_1 \in \{0, 1, ..., 2b\}$, $\{p_2, p_3\} \subset \{0, 1\}$, $p := (p_1, p_2, p_3)$. Використовуватимемо такі гельдерові простори функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to C$:

$C_{k(\cdot)}$ – простір усіх неперервних функцій w, для яких скінченною є норма
$$||w||_{k(\cdot)} := \sup_{(t,x) \in \Pi_{[0,T]}} (|w(t, x)| \exp\{-[k(t), x]\});$$

$C^\alpha_{k(\cdot)}$ – простір усіх функцій w, для яких скінченною є норма

$||w||^{\alpha}_{k(\cdot)} := ||w||_{k(\cdot)} + [w]^{\alpha}_{k(\cdot)}$, де $[w]^{\alpha}_{k(\cdot)} :=$

$$= \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{[0,T]}\\ x\neq x'}} \frac{|\Delta_x^{x'} w(t,x)|}{d(x,x',\alpha)(\exp\{[k(t),x]\}+\exp\{[k(t),x']\})};$$

$C^{p,\alpha}_{k(\cdot)}$ – простір усіх функцій w, які разом зі своїми похідними $\partial^{k_l}_{x_l} w$, $l\in M$, $\|k_1\|\le p_1$, $|k_2|\le p_2$, $|k_3|\le p_3$ належать до простору $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, тобто є скінченною норма

$$||w||^{p,\alpha}_{k(\cdot)} := ||w||^{\alpha}_{k(\cdot)} + \sum_{0<\|k_1\|\le p_1} ||\partial^{k_1}_{x_1} w||^{\alpha}_{k(\cdot)} +$$

$$+\sum_{l=2}^{3}\sum_{0<|k_l|\le p_l} ||\partial^{k_l}_{x_l} w||^{\alpha}_{k(\cdot)};$$

$C^{p,\alpha}_{s(\cdot)}$ – простір, означення якого одержується з означення простору $C^{p,\alpha}_{k(\cdot)}$ заміною функції k на функцію s.

2. Відомості про фундаментальний розв'язок задачі Коші. В [1] встановлено, що ФРЗК G для рівняння (1) має вигляд

$$G(t,x;\tau,\xi) =$$

$$= (t-\tau)^{-N} F^{-1}_{\sigma\to y}[\tilde V(t,\tau,\sigma)](t,\tau,y)|_{y=y(t-\tau,x,\xi)},$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad \{x,\xi\}\subset R^n,$$

де F^{-1} – обернене перетворення Фур'є за просторовими змінними,

$$\tilde V(t,\tau,\sigma) := \exp\{\sum_{\|k_1\|\le 2b} i^{|k_1|}(t-\tau)^{1-\|k_1\|/(2b)}\times$$

$$\times\int_0^1 a_{k_1}(\tau+(t-\tau)\beta)(\sigma_1'+\beta\sigma_2'+\frac{\beta^2}{2}\sigma_3)^{k_1'}\times$$

$$\times(\sigma_1''+\beta\sigma_2'')^{k_1''}(\sigma_1''')^{k_1'''}d\beta\},$$

$y(t,x,\xi) := (t^{-1/(2b_1)}(x_{11}-\xi_{11}),...,t^{-1/(2b_{n_1})}\times$ $\times(x_{1n_1}-\xi_{1n_1}), t^{-1-1/(2b_1)}(x_{21}+tx_{11}-\xi_{21}),...,$ $t^{-1-1/(2b_{n_2})}(x_{2n_2}+tx_{1n_2}-\xi_{2n_2}), t^{-2-1/(2b_1)}(x_{31}+$ $+tx_{21}+\frac{t^2}{2}x_{11}-\xi_{31}),...,t^{-2-1/(2b_{n_3})}(x_{3n_3}+tx_{2n_3}+$ $+\frac{t^2}{2}x_{1n_3}-\xi_{3n_3}))$, і такі властивості [1, теорема 3.5]:

1) функція $G(t,x;\tau,\xi)$, $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset R^n$, неперервна при $(t,x)\neq(\tau,\xi)$ разом зі своїми похідними $\partial^k_x G$ і справджуються оцінки

$$|\partial^k_x G(t,x;\tau,\xi)|\le$$

$$\le C_k(t-\tau)^{-N-N_{k_1}-N_{k_2}-N_{k_3}} E_c(t,x;\tau,\xi),$$

$$0\le\tau<t\le T,\ \{x,\xi\}\subset R^n,\ k\in Z^n_+, \qquad (10)$$

де C_k і c – деякі додатні сталі;

2) справджується рівність

$$\int_{R^n} G(t,x;\tau,\xi)d\xi =$$

$$= \exp\{(t-\tau)\int_0^1 a_0(\tau+(t-\tau)\beta)d\beta\},$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad x\in R^n; \qquad (11)$$

3) для $0\le\tau<t\le T$ і $x\in R^n$ правильні рівності

$$\partial^k_x\int_{R^n} G(t,x;\tau,\xi)d\xi = 0,\quad k\in Z^n_+\setminus\{0\};$$

$$\partial^{k_2}_{x_2}\partial^{k_3}_{x_3}\int_{R^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3 = 0,$$

$$(k_2,k_3)\in Z^{n_2+n_3}_+\setminus\{0\};$$

$$\partial^{k_3}_{x_3}\int_{R^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3 = 0,\quad k_3\in Z^{n_3}_+\setminus\{0\}. \qquad (12)$$

Зауваження 1. Зі структури рівняння (1) та ФРЗК для нього випливає, що функція $\int_{R^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3$ є ФРЗК для рівняння (1), якщо в нього входять тільки перші дві групи просторових змінних ($n_3=0$), а $\int_{R^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3$ – ФРЗК для невиродженого $\vec{2b}$-параболічного рівняння ($n_2=n_3=0$), адже

$$\int_{R^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3 = (t-\tau)^{-N_2}\times$$

$$\times F^{-1}_{(\sigma_1,\sigma_2)\to(y_1,y_2)}[\tilde V(t,\tau,(\sigma_1,\sigma_2,0))](t,\tau,y_1,y_2),$$

$$\int_{R^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3 = (t-\tau)^{-N_1}\times$$

$$\times F^{-1}_{\sigma_1\to y_1}[\tilde V(t,\tau,(\sigma_1,0,0))](t,\tau,y_1),$$

де $y_1 = y_1(t-\tau,x,\xi)$, $y_2 = y_2(t-\tau,x,\xi)$.

Зауваження 1 використовується, зокрема, для доведення рівностей (12).

Надалі сталу c_0 з означення функцій $k_l(t,a_l)$, $l\in M$, братимемо з інтервалу $(0,\bar{c})$, де $\bar{c}$ – стала з оцінок (32). Права частина нерівностей (10) і (32) містить функції E_c і ρ, які мають такі властивості [1, формули (3.2.16), (3.2.50)]:

$$\int\limits_{R^n}(t-\tau)^{-N}E_\delta(t,x;\tau,\xi)d\xi=C,$$

$$\tau<t,\ \ \{x,\xi\}\subset R^n,\ \ \delta>0; \qquad (13)$$

$$\forall\bar{R}>0:\ \rho(t,x,\xi)\geq t^{-\lambda}R^{q'},$$

$$t\in(0,T],\ \ x\in B_{\bar{R}},\ \ \xi\in R^n\setminus B_{2R}, \qquad (14)$$

де R – досить велике число ($R>\bar{R}$), $\lambda=q''-1$ при $t\in(0,1]$, $\lambda=3q'-1$ при $t>1$.

3. Формули для похідних від об'ємного потенціалу, породженого фундаментальним розв'язком рівняння (1).

Використовуючи методику з [2,3], можна отримати такі твердження.

Лема 1. *Якщо $f\in C_{k(\cdot)}$, то об'ємний потенціал (3) має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1}u$, $\|k_1\|<2b$, які визначаються формулами*

$$\partial_{x_1}^{k_1}u(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R^n}\partial_{x_1}^{k_1}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ \|k_1\|<2b. \qquad (15)$$

Лема 2. *Нехай $f\in C_{k(\cdot)}$ і задовольняється така умова Гельдера з $\alpha_1\in(0,m'']$:*

$$\forall R>0\ \exists C>0\ \forall(t,x)\in[0,T]\times B_R:$$

$$|\Delta_x^{x'}f(t,x)|\leq Cd(x,x';\alpha_1).$$

Тоді об'ємний потенціал (3) має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1}u$, $\|k_1\|=2b$, які визначаються формулами

$$\partial_{x_1}^{k_1}u(t,x)=$$

$$=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R^n}\partial_{x_1}^{k_1}G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{X_1(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ \|k_1\|=2b. \qquad (16)$$

Лема 3. *Нехай $f\in C_{k(\cdot)}$ і задовольняється така умова Гельдера з $\alpha\in R^3$, $\alpha_1=0$, $\alpha_2\in(m',2b+m'']$, $\alpha_3\in(2b+m',4b+m'']$:*

$$\forall R>0\ \exists C>0\ \forall(t,x)\in[0,T]\times B_R:$$

$$|\Delta_x^{x'}f(t,x)|\leq Cd(x,x',\alpha).$$

Тоді об'ємний потенціал (3) має неперервні похідні $\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}}u$, $j\in\{1,...,n_l\}$, $l\in\{2,3\}$, $|k_2|+|k_3|=1$, які визначаються формулами

$$\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}}u(t,x)=$$

$$=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R^n}\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}}G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{X_l(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ \ j\in\{1,...,n_l\},\ \ l\in\{2,3\},$$

$$|k_2|+|k_3|=1. \qquad (17)$$

Лема 4. *Нехай $f\in C_{k(\cdot)}$ і задовольняється така умова Гельдера з $\alpha\in R^3$, $\alpha_1\in(0,m'']$, $\alpha_2\in(m',2b+m'']$, $\alpha_3\in(2b+m',4b+m'']$:*

$$\forall R>0\ \exists C>0\ \forall(t,x)\in[0,T]\times B_R:$$

$$|\Delta_x^{x'}f(t,x)|\leq Cd(x,x',\alpha). \qquad (18)$$

Тоді об'ємний потенціал (3) має неперервну похідну $\partial_t u$, яка визначається формулою

$$\partial_t u(t,x)=f(t,x)+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R^n}\partial_t G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{X_3(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R^{n_1+n_2}}\partial_t\int\limits_{R^{n_3}}G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3\times$$

$$\times\Delta_{X_3(t-\tau)}^{X_2(t-\tau)}f(\tau,X_3(t-\tau))d\xi_1d\xi_2+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{R^{n_1}}\partial_t\int\limits_{R^{n_2+n_3}}G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2d\xi_3\times$$

$$\times\Delta_{X_2(t-\tau)}^{X_1(t-\tau)}f(\tau,X_2(t-\tau))d\xi_1+$$

$$+\int\limits_0^t\partial_t\int\limits_{R^n}G(t,x;\tau,\xi)d\xi f(\tau,X_1(t-\tau))d\tau,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \qquad (19)$$

При доведенні лем 1–4 використовувалися формули (4)–(9) з п.1, (10)—(14) – з п.2, зауваження 1, а також такі нерівності:

$$(d(X_s(t-\tau),\xi))^\beta E_{c_1}(t,x;\tau,\xi)\leq$$

$$\leq C(t-\tau)^{\beta/(2b)}E_{c_2}(t,x;\tau,\xi),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T,\ \{x,\xi\} \subset R^n,\ \beta > 0,\ s \in M; \tag{20}$$

$$\exp\{-c_1\rho(t,x',\xi)\} \leq C\exp\{-c_2\rho(t,x,\xi)\},$$

$$x \in R^n,\ \ t>0,\ \ d(x,x') < t^{1/(2b)}, \tag{21}$$

з деяким $C > 0$ і довільними $\{c_1, c_2\} \subset R$ такими, що $0 < c_2 < c_1$.

Доведемо нерівність (20). Нехай $0 < c_2 < c_1$. Оскільки $\frac{1}{2b(l-1)+m_j} = \frac{b_j}{b(2b_j(l-1)+1)}$, $q_j = \frac{2b_j}{2b_j-1}$ і $lq_j - 1 = \frac{2b_j(l-1)+1}{2b_j-1}$, то

$$d(X_s(t-\tau),\xi))^{\beta}E_{c_1}(t,x;\tau,\xi) \leq$$

$$\leq \frac{1}{c'}d(X_s(t-\tau),\xi;\beta)E_{c_1}(t,x;\tau,\xi) =$$

$$= \frac{1}{c'}\left(\sum_{l=s}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}|\bar{x}_{lj}(t-\tau)-\xi_{lj}|^{\beta/(2b(l-1)+m_j)}\right)\times$$

$$\times\exp\left\{-c_1\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\frac{|\bar{x}_{lj}(t-\tau)-\xi_{lj}|^{q_j}}{(t-\tau)^{lq_j-1}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{c'}\sum_{l=s}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\Bigg(|\bar{x}_{lj}(t-\tau)-\xi_{lj}|^{\frac{\beta b_j}{b(2b_j(l-1)+1)}}\times$$

$$\times\exp\left\{-c_1\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\left(\frac{|\bar{x}_{lj}(t-\tau)-\xi_{lj}|^{2b_j}}{(t-\tau)^{2b_j(l-1)+1}}\right)^{\frac{1}{(2b_j-1)}}\right\}\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{c'}\sum_{l=s}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\Bigg(\left(\frac{|\bar{x}_{lj}(t-\tau)-\xi_{lj}|^{2b_j}}{(t-\tau)^{2b_j(l-1)+1}}\right)^{\frac{1}{(2b_j-1)}\cdot\frac{\beta(2b_j-1)}{2b(2b_j(l-1)+1)}}\times$$

$$\times\exp\left\{-c_1\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\left(\frac{|\bar{x}_{lj}(t-\tau)-\xi_{lj}|^{2b_j}}{(t-\tau)^{2b_j(l-1)+1}}\right)^{1/(2b_j-1)}\right\}\times$$

$$\times(t-\tau)^{\frac{2b_j(l-1)+1}{(2b_j-1)}\cdot\frac{\beta(2b_j-1)}{2b(2b_j(l-1)+1)}}\Bigg) \leq$$

$$\leq C\exp\{-c_2\rho(t-\tau,x,\xi)\}(t-\tau)^{\beta/(2b)} =$$

$$= C(t-\tau)^{\beta/(2b)}E_{c_2}(t,x;\tau,\xi)$$

з деяким $C > 0$.

Тепер доведемо (21). Нехай $x' = x - z$. Тоді з умови $d(x,x') < t^{1/(2b)}$ маємо

$$\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}|z_{lj}|^{1/(2b(l-1)+m_j)} < t^{1/(2b)}. \tag{22}$$

Оскільки $\frac{1}{2b(l-1)+m_j} = \frac{b_j}{b(2b_j(l-1)+1)}$, $l \in M$, $j \in \{1,...,n_l\}$, то (22) можна записати у вигляді

$$\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\left(\frac{|z_{lj}|}{t^{(2b_j(l-1)+1)/(2b_j)}}\right)^{\frac{b_j}{b(2b_j(l-1)+1)}} < 1. \tag{23}$$

У (23) ліва частина містить тільки невід'ємні доданки, тому кожен з дробів у дужках менший за одиницю. Оскільки усі показники $\frac{b_j}{b(2b_j(l-1)+1)} < 1$, $l \in M$, $j \in \{1,...,n_l\}$, то нерівність (23) залишиться правильною, якщо ці показники збільшити до 1:

$$\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\left(\frac{|z_{lj}|}{t^{(2b_j(l-1)+1)/(2b_j)}}\right) < 1. \tag{24}$$

Для довільних $\{c_1, c_2\} \subset R, 0 < c_2 < c_1$, існує стала $C > 0$ така, що для довільних $\{u,v\} \subset R$, $|v| \leq 1$, справджується нерівність [4, c.78]

$$\exp\{-c_1|u-v|^q\} \leq C\exp\{-c_2|u|^q\}, \tag{25}$$

де $q \in (1,2]$.

Розпишемо ліву частину (21) і скористаємося (25). Отримаємо

$$\exp\{-c_1\rho(t,x',\xi)\} =$$

$$= \exp\Bigg\{-c_1\Bigg[\sum_{j=1}^{n_1}\left|\frac{x_{1j}-\xi_{1j}}{t^{(q_j-1)/q_j}} - \frac{z_{1j}}{t^{(q_j-1)/q_j}}\right|^{q_j} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2}\left|\frac{x_{2j}+tx_{1j}-\xi_{2j}}{t^{(2q_j-1)/q_j}} - \frac{z_{2j}+tz_{1j}}{t^{(2q_j-1)/q_j}}\right|^{q_j} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_3}\Bigg|\frac{x_{3j}+tx_{2j}+t^2x_{1j}/2-\xi_{3j}}{t^{(3q_j-1)/q_j}} -$$

$$-\frac{z_{3j}+tz_{2j}+t^2z_{1j}/2}{t^{(3q_j-1)/q_j}}\Bigg|^{q_j}\Bigg]\Bigg\} \leq$$

$$\leq \exp\{-c_2\rho(t,x,\xi)\},\quad t>0,$$

адже на підставі (24)

$$\left|\frac{z_{1j}}{t^{1-1/q_j}}\right| = \frac{|z_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}} < 1,\quad j \in \{1,...,n_1\};$$

$$\left|\frac{z_{2j}+tz_{1j}}{t^{2-1/q_j}}\right| = \left|\frac{z_{2j}+tz_{1j}}{t^{1+1/(2b_j)}}\right| = \Big|\frac{z_{2j}}{t^{(2b_j+1)/(2b_j)}} +$$

$$+\frac{z_{1j}}{t^{1/(2b_j)}}\Big| \le \frac{|z_{2j}|}{t^{(2b_j+1)/(2b_j)}} + \frac{|z_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}} < 1,$$

$$j \in \{1, ..., n_2\};$$

$$\left|\frac{z_{3j} + tz_{2j} + \frac{t^2}{2}z_{1j}}{t^{3-1/q_j}}\right| = \left|\frac{z_{3j} + tz_{2j} + \frac{t^2}{2}z_{1j}}{t^{2+1/(2b_j)}}\right| =$$

$$= \left|\frac{z_{3j}}{t^{(4b_j+1)/(2b_j)}} + \frac{z_{2j}}{t^{(2b_j+1)/(2b_j)}} + \frac{z_{1j}}{2t^{1/(2b_j)}}\right| \le$$

$$\le \frac{|z_{3j}|}{t^{(4b_j+1)/(2b_j)}} + \frac{|z_{2j}|}{t^{(2b_j+1)/(2b_j)}} +$$

$$+\frac{|z_{1j}|}{t^{1/(2b_j)}} < 1, \quad j \in \{1, ..., n_3\},$$

і $q_j = \frac{2b_j}{2b_j-1} \in (1, 2]$ при $b_j \in N$, $j \in \{1, ..., n_1\}$.

При доведенні леми 1 отримується оцінка

$$|\partial_{x_1}^{k_1} u(t,x)| \le Ct^{1-\|k_1\|/(2b)} \exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)},$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \ \|k_1\| < 2b; \qquad (26)$$

при встановленні твердження леми 2 – нерівність

$$|\partial_{x_1}^{k_1} u(t,x)| \le$$

$$\le C(t^{1-\|k_1\|/(2b)+\alpha_1/(2b)} + t\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}),$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \ \|k_1\| = 2b; \qquad (27)$$

а при доведенні леми 3 – оцінка

$$|\partial_{x_{lj}}^{k_{lj}} u(t,x)| \le C(t^{1-(2b(l-1)+m_j)/(2b)+\alpha_l/(2b)} +$$

$$+t\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

$$j \in \{1, ..., n_l\}, \quad l \in \{2,3\}, \quad |k_2| + |k_3| = 1. \qquad (28)$$

Теорема 1. *Нехай $f \in C_{k(\cdot)}$ і задовольняється умова Гельдера (18). Тоді об'ємний потенціал (3) є регулярним розв'язком неоднорідного рівняння (1) і задовольняє умову*

$$\partial_x^k u(t,x) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad \frac{\|k_1\|}{2b} + |k_2| + |k_3| \le 1, \quad (29)$$

рівномірно стосовно $x \in B_R$ з довільним додатним R.

Доведення. З доведених у лемах 1–4 формул (15)–(17), (19) та того, що $G(t,x;\tau,\xi)$ як функція t і x при довільно фіксованих $\tau \in [0,t)$ і $\xi \in R^n$ є розв'язком рівняння (1) з $f \equiv 0$, випливає що об'ємний потенціал (3) є регулярним розв'язком неоднорідного рівняння (1). Правильність (29) безпосередньо випливає з оцінок (26)–(28). ▷

4. Властивості об'ємного потенціалу. Крім наведених у лемах 1–4 і теоремі 1 властивостей об'ємного потенціалу, наступна теорема містить нові його властивості.

Теорема 2. *Якщо $f \in C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, де $\alpha := (\beta, \beta+m', \beta+2b+m')$ з деяким $\beta \in (0, m'']$, то $u \in C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, де $\alpha' := (\beta,\beta,\beta)$, $r := (r_1, r_2, r_3) := (2b, 1, 1)$, справджуються оцінка*

$$||u||^{r,\alpha'}_{s(\cdot)} \le C||f||^{\alpha}_{k(\cdot)} \qquad (30)$$

і рівності

$$\lim_{t\to 0}\left(\sup_{x\in R^n}(|\partial_x^k u(t,x)|\exp\{-[s(t),x]\})\right) = 0,$$

$$\frac{\|k_1\|}{2b} + |k_2| + |k_3| \le 1. \qquad (31)$$

Перш за все зауважимо, що оскільки $f \in C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, $\alpha = (\beta, \beta+m', \beta+2b+m')$ з деяким $\beta \in (0, m'']$, то функція f задовольняє умови лем 1–4 і теореми 1, зокрема умову (18) з $\alpha_1 = \beta$, $\alpha_2 = \beta + m'$, $\alpha_3 = \beta + 2b + m'$. Тому для u правильні всі ці твердження.

Доведення теореми 2 здійснюється за методикою з [2, 3]. Зокрема, уточнюються оцінки лівих частин (27) і (28), а також використовується наступне твердження.

Твердження 1. Для довільного $\gamma \in (0,1]$ і деякого $\bar{c} \in (0,c)$, де c – стала з оцінок (10), правильними є оцінки

$$|\Delta_x^{x'}\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)| \le C_k(d(x,x'))^{\gamma} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-N-N_{k_1}-N_{k_2}-N_{k_3}-\gamma/(2b)} E_{\bar{c}}(t,x;\tau,\xi),$$

$$(d(x,x'))^{2b} \le t-\tau, \quad 0 \le \tau < t \le T,$$

$$\{x,x',\xi\} \subset R^n, \quad k \in Z^n_+. \qquad (32)$$

Доведення твердження 1 випливає з оцінки (10) при застосуванні теореми про середнє значення і нерівності

$$E_c(t,y;\tau,\xi) \le C_1 E_{\bar{c}}(t,x;\tau,\xi), \quad \bar{c} \in (0,c),$$

де y – точка, яка належить відрізку прамої, що сполучає точки x і x'.

Зауважимо, що ця нерівність є частинним випадком доведеної нерівності (21).

5. Коректна розв'язність задачі Коші (1), (2). Виберемо невід'ємні числа a_l,

$l \in M$, які входять у вирази для функцій k_l і s_l, $l \in M$, так, щоб виконувалася умова

$$T < \min_{l\in M, j\in\{1,\ldots,n_l\}} (c_0/s_l(T))^{(2b_j-1)/(2b_j(l-1)+1)}.$$

На підставі теореми 1 за умов теореми 2 об'ємний потенціал (3), породжений ФРЗК для рівняння (1), є розв'язком неоднорідного рівняння (1) з однорідною початковою умовою (2).

З результатів, отриманих в [1] (теорема 3.8), випливає, що не існує більше одного розв'язку рівняння (1), який задовольняє такі умови:

1) $\exists C > 0 \;\; \forall t \in (0, T]$:

$$\sup_{x\in R^n} (|u(t,x)| \exp\{-[s(t), x]\}) \le C;$$

2) $\lim\limits_{t\to 0} \int\limits_{R^n} u(t,x)\psi(x)dx = 0$

для довільної функції ψ такої, що $\int\limits_{R^n} |\psi(x)| \exp\{[s(T), x]\}dx < \infty$.

Наслідком цього є такий результат.

Твердження 2. *У просторі $C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, де $r = (2b, 1, 1)$, $\alpha' = (\beta, \beta, \beta)$ з деяким $\beta \in (0, 1]$, не існує більше одного розв'язку рівняння (1), для якого виконується умова (31).*

З теорем 1 і 2 та твердження 2 випливає така теорема про коректну розв'язність задачі Коші (1), (2).

Теорема 3. *Нехай $f \in C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, де $\alpha = (\beta, \beta + m', \beta + 2b + m'')$ з деяким $\beta \in (0, m'']$. Тоді формулою (3) визначається єдиний розв'язок рівняння (1), який належить до простору $C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, де $r = (2b, 1, 1)$, $\alpha' = (\beta, \beta, \beta)$, і для якого справджуються оцінка (30) та рівності (31).*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

2. *Дронь В.С.* Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісник Чернівецького ун-ту – 2000. – **76**. – С. 32-41.

3. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Властивості об'ємного потенціалу для одного класу ультрапараболічних рівнянь довільного порядку // Бук. мат. журн. – 2016. – **4**, № 3–4. – С. 47-56.

4. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – Москва: Наука, 1964. – 443 с.