

УЗАГАЛЬНЕНІ ПРОСТОРИ ТИПУ  $\overset{\circ}{S}$ 

Досліджуються топологічна структура узагальнених просторів типу  $S$ , які складаються з парних функцій, основні операції в таких просторах, властивості перетворення Бесселя основних та узагальнених функцій, згортки, згортувачів та мультиплікаторів.

We investigate the topological structure of generalized  $S$  type spaces, consisting of the pair functions, main operations in such spaces, properties of Bessel transformations of test and generalized functions, convolutions, convolators and multipliers.

1. І.М. Гельфанд і Г.Є. Шилор у відомій монографії [1, с. 203–211] запропонували метод побудови функціональних просторів нескінченно диференційовних функцій, заданих на  $\mathbb{R}$ , на які накладаються певні умови спадання на нескінченності та зростання похідних із збільшенням порядку. Ці умови задаються за допомогою нерівностей  $|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{kn}$ ,  $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$ , де  $\{c_{kn}\}$  – подвійна послідовність додатних чисел. Якщо ці числа змінюються довільним чином разом з функцією  $\varphi$ , то маємо простір Л. Шварца  $S = S(\mathbb{R})$  швидко спадних на  $\mathbb{R}$  функцій. В монографії [1] детально вивчений випадок, коли  $c_{kn} = k^{k\alpha} n^{n\beta}$ ,  $\alpha > 0, \beta > 0$  – фіксовані параметри; відповідні простори називаються просторами типу  $S$  і позначаються символом  $S_\alpha^\beta$ . Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при  $|x| \rightarrow \infty$  спадають швидше, ніж  $\exp\{-a|x|\}$ ,  $a > 0, x \in \mathbb{R}$ . Такі простори часто використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними. У працях [2–8] встановлено, що простори типу  $S$  та  $S'$  – простори, топологічно спряжені з ними, співпадають з множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними скінченного та нескінченного порядків, при яких розв'язки є цілими функціями за просторовими змінними. Наприклад, для рівняння теплопровідності  $\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2$  фундаментальний розв'язок задачі Коші –

функція  $G(t, x) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} \exp\{-x^2/(4t)\}$  при кожному  $t > 0$ , як функція  $x$ , є елементом простору  $S_{1/2}^{1/2}$  [7, с. 46], який відноситься до просторів типу  $S$ .

Якщо  $c_{kn} = a_k b_n$ , де  $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ ,  $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  – деякі послідовності додатних чисел, то маємо узагальнені простори типу  $S$ , які позначаються символом  $S_{a_k}^{b_n}$ . Простори  $S_{a_k}^{b_n}$  (їх топологічна структура, властивості функцій, основні операції в таких просторах) вивчалися в праці [9]. Відомі простори типу  $W$ , введені Б.Л. Гуревичем [10] (див. також [11, с. 7–17]), в яких для характеристики поведінки функцій на нескінченності замість степеневих функцій використовуються довільні опуклі функції, також вкладаються в простори  $S_{a_k}^{b_n}$  при конкретному виборі послідовностей  $\{a_k\}$  та  $\{b_n\}$  (див. [12]). Із результатів, наведених в [9, 13] випливає, що узагальнені простори типу  $S$  є природним середовищем для дослідження нелокальних багатоточкових за часом задач для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь (зокрема, для рівнянь з операторами диференціювання нескінченного порядку), для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва скінченного та нескінченного порядків.

Простори, які складаються з парних функцій просторів типу  $S$  (зокрема, просторів  $S_\alpha^\beta$ ) з відповідною топологією використовуються при дослідженні еволюційних сингулярних рівнянь параболічного типу з опера-

торами Бесселя (див. [6, 14]). Метою цієї роботи є дослідження узагальнених просторів типу  $S$ , які складаються з парних функцій з просторів  $S_{a_k}^{b_n}$ , а саме, дослідження топологічної структури таких просторів, властивостей перетворення Бесселя основних та узагальнених функцій, властивостей згорток, згортувачів та мультиплікаторів, відшукування умов, при виконанні яких у таких просторах визначений, є лінійним і неперервним оператор Бесселя нескінченного порядку. Ці результати у подальшому можуть знайти застосування при дослідженні нелокальних багатоточкових за часом задач для еволюційних сингулярних рівнянь нескінченного порядку.

**2.** Тут зупинимося на просторах  $S_{a_k}^{b_n}$ , які будуються за послідовностями вигляду  $\{b_n = n! \rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ ,  $\{a_k = k! d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ , де  $\{\rho_n\}$ ,  $\rho_0 = 1$ , – послідовність додатних чисел, яка володіє властивостями:

а) вона монотонно спадає;

б)  $\exists c_b > 0 \exists \gamma_1 \in (0, 1) \forall n \in \mathbb{N} :$

$$\rho_{n-1}/\rho_n \leq c_b \cdot n^{\gamma_1};$$

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0;$

г)  $\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{Z}_+ : \rho_n \geq c_\varepsilon \cdot \varepsilon^n / n^n.$

Послідовність  $\{d_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ ,  $d_0 = 1$ , також володіє властивостями а)–г), при цьому умова б) має вигляд:  $\exists c_a > 0 \exists \gamma_2 \in (0, 1) \forall n \in \mathbb{N} : d_{k-1}/d_k \leq c_a \cdot k^{\gamma_2}$ . Прикладом послідовності  $\{\rho_n\}$  з властивостями а)–г) може служити послідовність  $\rho_n = (n\beta)^{-n\beta} e^{n\beta}$ , де  $\beta \in (0, 1)$  – фіксований параметр. Перевіримо, наприклад, виконання для послідовності  $\rho_n$  властивості г). Маємо, що

$$\begin{aligned} \rho_n &= \frac{e^{n\beta}}{(n\beta)^{n\beta}} = \frac{e^{n\beta}}{(n\beta)^{n\beta}} \cdot \frac{[n(1-\beta)]^{n(1-\beta)}}{[n(1-\beta)]^{n(1-\beta)}} \\ &\cdot \frac{e^{n(1-\beta)}}{e^{n(1-\beta)}} = \frac{e^n}{n^n} \frac{1}{[\beta^\beta (1-\beta)^{1-\beta}]^n} \\ &\cdot \frac{[n(1-\beta)]^{n(1-\beta)}}{e^{n(1-\beta)}} = \frac{e^n}{n^n} \frac{1}{\omega^n} \sup_{\lambda \geq 0} \frac{\lambda^n}{\exp\{\lambda^{1/(1-\beta)}\}}, \end{aligned}$$

де  $\omega = \beta^\beta (1-\beta)^{1-\beta} < 1$ . Якщо взяти довільне  $\varepsilon > 0$  і покласти  $\lambda = \varepsilon$ , то прийдемо до нерівності  $\rho_n \geq c_\varepsilon \varepsilon^n / n^n$ , де  $c_\varepsilon = \exp\{-\varepsilon^{1/(1-\beta)}\}$ . Зазначимо, що умова

б) для цієї послідовності виконується з параметром  $\gamma_1 = \beta$ .

Вважаємо також, що параметри  $\gamma_1, \gamma_2$  в умові б) для послідовностей  $\{\rho_n\}$  та  $\{d_k\}$  пов'язані умовою д):  $\gamma_1 + \gamma_2 = \theta \leq 1$ .

Символом  $S_{a_k}^{b_n}$  позначимо сукупність функцій  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ , які задовольняють умову

$$\exists c, A, B > 0 \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n a_k b_n.$$

$S_{a_k}^{b_n}$  співпадає з об'єднанням зліченно-нормованих просторів  $S_{a_k, A}^{b_n, B}$  за всіма індексами  $\{A, B\} \subset \mathbb{N}$ , де символом  $S_{a_k, A}^{b_n, B}$  позначається сукупність тих функцій  $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$ , котрі для довільних  $\delta, \rho > 0$  задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho} (A + \delta)^k (B + \rho)^n a_k b_n,$$

$$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R};$$

система норм в  $S_{a_k, A}^{b_n, B}$  визначається за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x, k, n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^n a_k b_n},$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

В [9] встановлено, що функція  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$  належить до простору  $S_{a_k}^{b_n}$ , де  $a_k = k! d_k$ ,  $b_n = n! \rho_n$ , тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції  $\varphi(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , яка задовольняє умову:

$$\exists a, b, c > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \leq c \gamma(ax) \rho(by), \quad (1)$$

де

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf_k (a_k / |x|^k), & |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$\rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup_n (|y|^n / b_n), & |y| \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Зауважимо, що  $\rho$  – неперервно диференційовна, парна на  $\mathbb{R}$  функція, яка монотонно

зростає на проміжку  $[1, +\infty)$ . Із властивості г) випливає також (див. [9]), що

$$\exists c_0, c > 0 \forall y \in \mathbb{R} : \rho(y) \geq c_0 \exp(c|y|).$$

Наприклад, якщо  $b_n = n^{n\beta}$ ,  $0 < \beta < 1$ , то  $\rho(y) \sim \exp\{|y|^{1/\beta}\}$ . Крім того, як доведено в [9],  $\ln \rho$  – опукла на  $(0, +\infty)$  функція в тому сенсі, що

$$\forall \{y_1, y_2\} \subset (0, +\infty) :$$

$$\ln \rho(y_1) + \ln \rho(y_2) \leq \ln \rho(y_1 + y_2). \quad (3)$$

З (3) випливає також нерівність  $\ln \rho(y_1) - \ln \rho(y_1 + y_2) \leq -\ln \rho(y_2)$ .

Функція  $\rho$  в (2) пов'язана з послідовністю  $\{\rho_n\}$ , за якою будується послідовність  $\{b_n = n! \rho_n\}$  так [9]:

$$\rho_n = \inf_{|\omega| \geq 1} (\rho(\omega)/|\omega|^n) = \nu_n^{-n} \rho(\nu_n),$$

де  $\nu_n$  – розв'язок рівняння  $\omega \mu(\omega) = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu(\omega) = \rho'(\omega)/\rho(\omega)$ ; послідовність  $\{\nu_n\}$  є монотонно зростаючою й необмеженою,  $\nu_n < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Оскільки  $\gamma(x) = 1/\tilde{\gamma}(x)$ , де  $\tilde{\gamma}(x) = 1$ ,  $|x| < 1$  і  $\gamma(x) = \sup_k (|x|^k/a_k)$ , якщо  $|x| \geq 1$ , то  $\gamma$  – неперервно диференційовна, парна на  $\mathbb{R}$  функція, яка монотонно спадає на  $[1, +\infty)$ ,  $0 < \gamma(x) \leq 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Наприклад, якщо  $a_k = k^{k\alpha}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , то справджуються нерівності [1, с. 204]:

$$\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\} \leq \gamma(x) \leq c \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\},$$

$$c = \exp\{\alpha e/2\}.$$

Функція  $\ln \gamma$  задовольняє на  $(0, +\infty)$  нерівність [9]

$$\ln \gamma(x_1) + \ln \gamma(x_2) \geq \ln \gamma(x_1 + x_2),$$

$$\{x_1, x_2\} \subset (0, +\infty) \quad (3_1)$$

Із результатів, наведених в [9] випливає, що послідовність  $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset S_{a_k}^{b_n}$  збігається до нуля в цьому просторі, якщо функції  $\varphi_\nu$  та їхні похідні довільного порядку збігаються до нуля рівномірно на кожному відрізку  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  і при цьому виконуються нерівності

$$|x^k \varphi_\nu^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n a_k b_n, \quad \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими  $c, A, B > 0$ , не залежними від  $\nu$ .

Функція  $g$  називається мультиплікатором у просторі  $S_{a_k}^{b_n}$ , якщо  $g\psi \in S_{a_k}^{b_n}$  для довільної функції  $\psi \in S_{a_k}^{b_n}$  і відображення  $\psi \rightarrow g\psi$  є лінійним і неперервним оператором з  $S_{a_k}^{b_n}$  в  $S_{a_k}^{b_n}$ . Мультиплікатором у просторі  $S_{a_k}^{b_n}$ ,  $a_k = k!d_k$ ,  $b_n = n!\rho_n$ , є функція  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ , яка допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умову [9]:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 : |g(z)| \leq c_\varepsilon (\gamma(\varepsilon x))^{-1} \rho(\varepsilon y),$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

У введених просторах  $S_{a_k}^{b_n}$ ,  $a_k = k!d_k$ ,  $b_n = n!\rho_n$ , визначені й неперервні оператори, важливі для аналізу; в першу чергу, це оператори множення на  $x$ , на всі поліноми, оператори диференціювання, зсуву та розтягу [9].

Символом  $\overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n}$  позначимо сукупність усіх парних функцій з простору  $S_{a_k}^{b_n}$ . Оскільки  $\overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n}$  утворює підпростір  $S_{a_k}^{b_n}$ , то в  $\overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n}$  природним способом вводиться топологія. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором або узагальненим простором типу  $\overset{\circ}{S}$ , а його елементи – основними функціями.

Сукупність функцій, які є продовженнями функцій  $\varphi$  з простору  $\overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n}$  в  $\mathbb{C}$ , позначимо символом  $\overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n}(\mathbb{C})$ . Із результатів, отриманих в [9] випливає, що простір  $\overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n}(\mathbb{C})$  можна подати як об'єднання зліченно-нормованих просторів  $\overset{\circ}{S}_{a_k, A}^{b_n, B}(\mathbb{C})$ , де  $\overset{\circ}{S}_{a_k, A}^{b_n, B}(\mathbb{C})$  складається з тих функцій  $\varphi \in \overset{\circ}{S}_{a_k}^{b_n}(\mathbb{C})$ , для яких справджується нерівність  $|\varphi(x + iy)| \leq c \gamma(\bar{a}x) \rho(\bar{b}y)$ ,  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , де  $\bar{a}$  – довільна додатна стала, менша за  $a$ ,  $\bar{b}$  – довільна стала, більша за  $b$ ;  $a, b > 0$  – сталі з нерівності (1). Якщо для  $\varphi \in \overset{\circ}{S}_{a_k, A}^{b_n, B}(\mathbb{C})$  покласти

$$\|\varphi\|_{p\omega} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{\gamma(a(1 - \frac{1}{p})x) \rho((b + \omega)y)},$$

$$p \in \{2, 3, \dots\}, \omega \in \mathbb{N},$$

то ці норми еквівалентні відповідним нормам в просторі  $\mathring{S}_{a_k, A}^{b_n, B}$ . Отже, послідовність функцій  $\{\varphi_\nu(x), \nu \geq 1\} \subset \mathring{S}_{a_k}^{b_n}, x \in \mathbb{R}$ , збігається до нуля тоді й лише тоді, коли послідовність функцій  $\{\varphi_\nu(z), \nu \geq 1\}, z \in \mathbb{C}$ , рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини  $\mathbb{C}$ , при цьому справджуються нерівності

$$\varphi_\nu(z) \leq c\gamma(ax)\rho(by), z = x + iy \in \mathbb{C},$$

зі сталими  $c, a, b > 0$ , не залежними від  $\nu$  [9].

Мультіплікатором у просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  є кожна ціла парна функція, яка задовольняє умову (4). Прикладом мультіплікатора у просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  може служити нормована функція Бесселя  $j_\nu, \nu > -1/2$ , яка є розв'язком рівняння  $B_\nu u + \lambda u = 0$ , де  $B_\nu$  – оператор Бесселя;  $B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x} \frac{d}{dx}, \nu > -\frac{1}{2}$  – фіксований параметр, за умови, що  $u(0) = 1, u'(0) = 0$ . Справді, нормована функція Бесселя пов'язана із звичайною функцією Бесселя  $J_\nu, \nu > -1/2$ , першого роду так [15]:

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{x^\nu} J_\nu(x). \quad (5)$$

Відомо (див.[15]), що функція  $J_\nu$  допускає аналітичне продовження в комплексну площину  $\mathbb{C}$ , при цьому справджується інтегральна формула Пуассона

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(z \cos t) \sin^{2\nu} t dt. \quad (6)$$

Із співвідношень (5) та (6) випливає, що нормована функція Бесселя  $j_\nu$  комплексного аргументу  $z$  є цілою парною функцією і для  $j_\nu$  правильним є інтегральне зображення:

$$j_\nu(z) = \frac{2\Gamma(\nu + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2)} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(z \cos t) \sin^{2\nu} t dt. \quad (7)$$

Врахувавши, що  $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), z = x + iy \in \mathbb{C}$ , за допомогою (7) дістаємо оцінку:

$$|j_\nu(z)| \leq c_\nu e^{|y|}, z = x + iy \in \mathbb{C},$$

$$c_\nu = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1/2)}, \nu > -\frac{1}{2}.$$

Оскільки для довільних опуклих функцій  $\ln \tilde{\gamma}(x)$  та  $\ln \rho(y)$  при довільному  $\varepsilon > 0$  правильною є нерівність

$$|y| \leq \ln \tilde{\gamma}(\varepsilon x) + \ln \rho(\varepsilon y) + c, c > 0,$$

то звідси випливає, що

$$|j_\nu(z)| \leq c_{\nu, \varepsilon} e^{\ln \tilde{\gamma}(\varepsilon x) + \ln \rho(\varepsilon y)} \equiv c_{\nu, \varepsilon} (\tilde{\gamma}(\varepsilon x))^{-1} \rho(\varepsilon y).$$

Це і означає, що  $j_\nu(x)$  – мультіплікатор у просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}, a_k = k!d_k, b_n = n!\rho_n$ .

Із результатів, наведених в [16] випливає, що в просторах  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  визначені пряме та обернене перетворення Бесселя

$$\psi(\sigma) \equiv F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx,$$

$$\sigma \in \mathbb{R},$$

$$\varphi(x) \equiv F_{B_\nu}^{-1}[\psi](x) = \frac{1}{2^{2\nu} \Gamma^2(\nu + 1)} \int_0^{+\infty} \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, x \in \mathbb{R},$$

причому при виконанні умов а)-д) для послідовностей  $\{\rho_n\}$  та  $\{d_k\}$ , має місце формула  $F_{B_\nu}[\mathring{S}_{a_k}^{b_n}] = \mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ , при цьому оператор  $F_{B_\nu}$  є неперервним. Частковим випадком просторів  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  є простори  $\mathring{S}_\alpha^\beta$ , які складаються з парних функцій з просторів  $S_\alpha^\beta$  з тією самою топологією; відповідно, правильною є формула:  $F_{B_\nu}[\mathring{S}_\alpha^\beta] = \mathring{S}_\beta^\alpha$ .

Символом  $T_x^\xi$  позначимо оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя [17]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \omega}) \cdot$$

$$\cdot \sin^{2\nu} \omega d\omega, \varphi \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n},$$

де  $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)), \nu > -1/2$ .

**Лема 1.** Операція узагальненого зсуву  $\varphi \rightarrow T_x^\xi \varphi$  визначена і неперервна в просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ .

**Доведення.** Для доведення твердження скористаємось співвідношенням  $F_B[\mathring{S}_{a_k}^{b_n}] = \mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ . Тоді, врахувавши відомі властивості оператора  $T_x^\xi$  (див. [17]), для довільної основної функції  $\varphi$  маємо:

$$\begin{aligned} F_B[T_x^\xi \varphi](\sigma) &= \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx = \\ &= \int_0^\infty \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx = \int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) \cdot \\ &\cdot j_\nu(\sigma \xi) x^{2\nu+1} dx = j_\nu(\sigma \xi) F_B[\varphi](\sigma) \equiv \psi_\xi(\sigma). \end{aligned}$$

При кожному фіксованому  $\xi$  функція  $j_\nu(\sigma \xi)$ , як функція  $\sigma$ , є мультиплікатором у просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ . Оскільки  $F_B[\varphi] \in \mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ , то  $\psi_\xi \in \mathring{S}_{b_k}^{a_n}$  при кожному  $\xi$ . Скориставшись оберненим перетворенням Фур'є знайдемо, що  $T_x^\xi \varphi = F_B^{-1}[\xi] \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , тобто, вказана операція визначена в просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ .

Неперервність операції узагальненого зсуву виливає з властивості неперервності операції прямого і оберненого перетворення Бесселя. Справді, якщо  $\{\varphi, \varphi_k, k \geq 1\} \subset \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , причому  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  при  $k \rightarrow +\infty$  у просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , то  $F_B[T_x^\xi \varphi_k] = j_\nu(\sigma \xi) F_B[\varphi_k] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} j_\nu(\sigma \xi) F_B[\varphi] = F_B[T_x^\xi \varphi]$  у просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ . Застосувавши обернене перетворення  $F_B^{-1}$  знайдемо, що  $T_x^\xi \varphi_k \rightarrow T_x^\xi \varphi$  при  $k \rightarrow \infty$  у просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ . Лема доведена.

**Лема 2.** Операція узагальненого зсуву диференційовна в просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ .

**Доведення.** Нехай, за означенням,  $\Phi_{\Delta\xi}(x) = \frac{1}{\Delta\xi} [T_x^{\xi+\Delta\xi} \varphi - T_x^\xi \varphi]$ ,  $\varphi \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ ,  $\{\xi, \Delta\xi, x\} \subset \mathbb{R}$ . Для доведення твердження досить встановити, що граничне

співвідношення  $\Phi_{\Delta\xi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} T_x^\xi \varphi$ ,  $\Delta\xi \rightarrow 0$ , справджується в просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ . Врахувавши властивість неперервності перетворення Бесселя (прямого і оберненого) у просторах  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  досить встановити, що

$$F_B[\Phi_{\Delta\xi}] \rightarrow F_B\left[\frac{\partial}{\partial \xi} T_z^\xi \varphi\right], \Delta\xi \rightarrow 0,$$

у просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{a_n}(\mathbb{C})$ , тобто, що: 1) сім'я функцій  $\{\gamma_{\Delta\xi}(z) := F_B[\Phi_{\Delta\xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} T_z^\xi \varphi](\xi), |\Delta\xi| \leq \varepsilon_0, \varepsilon_0 > 0$  – деяке фіксоване число,  $z = x + iy \in \mathbb{C}\}$  збігається рівномірно до нуля при  $\Delta\xi \rightarrow 0$  у кожній обмеженій області  $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ ;

2)  $\exists \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} > 0 : |\gamma_{\Delta\xi}(z)| \leq \tilde{c} e^{-\ln \tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x) + \ln \rho_1(\tilde{b}y)}$ ,  $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ , де  $\tilde{\gamma}_1 = 1/\gamma_1$ ,

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf_k (b_k/|x|^k), & |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$\rho_1(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup_n (|y|^n/a_n), & |y| \geq 1, \end{cases}$$

сталі  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} > 0$  не залежать від  $\Delta\xi$ , якщо  $\Delta\xi$  досить мала за модулем величина.

Врахувавши, що  $F_B[T_z^\xi \varphi] = j_\nu(z\xi) \cdot F_B[\varphi](z)$ , прийдемо до співвідношень

$$\begin{aligned} F_B[\Phi_{\Delta\xi}(z)] &= \frac{1}{\Delta\xi} (F_B[T_z^{\xi+\Delta\xi} \varphi](z) - \\ &- F_B[T_z^\xi \varphi](z)) = \frac{1}{\Delta\xi} (j_\nu(z(\xi + \Delta\xi)) - j_\nu(z\xi)) \cdot \\ &\cdot F_B[\varphi](z) = \frac{\partial}{\partial \xi} j_\nu(z(\xi + \theta \Delta\xi)) F_B[\varphi](z), 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Далі скористаємось такими відомими формулами [17]:

$$\frac{\partial}{\partial s} j_\nu(sx) = csx^2 j_{\nu+1}(sx),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} j_\nu(sx) = cxs^2 j_{\nu+1}(sx),$$

де стала  $c$  залежить лише від  $\nu$ . Тоді

$$F_B\left[\frac{\partial}{\partial \xi} T_z^\xi \varphi\right](z) = \frac{\partial}{\partial \xi} F_B[T_z^\xi \varphi](z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi} j_\nu(z\xi) F_B[\varphi](z) = c\xi z^2 j_{\nu+1}(z\xi) F_B[\varphi](z),$$

$$F_B[\Phi_{\Delta\xi}](z) = c\xi z^2 j_{\nu+1}(z(\xi + \theta\Delta\xi)) F_B[\varphi](z).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \gamma_{\Delta\xi}(z) &= c\xi z^2 [j_{\nu+1}(z(\xi + \theta\Delta\xi)) - \\ &\quad - j_{\nu+1}(z\xi)] F_B[\varphi](z) = \\ &= c\theta\Delta\xi \cdot \xi \cdot z^2 \frac{\partial}{\partial \xi} j_{\nu+1}(z(\xi + \theta_1\Delta\xi)) F_B[\varphi](z) = \\ &= cc_1\theta\Delta\xi \cdot \xi^2 \cdot z^4 j_{\nu+2}(z(\xi + \theta_1\Delta\xi)) F_B[\varphi](z), \end{aligned}$$

$0 < \theta_1 < 1$  (стала  $c_1$  залежить від  $\nu$ ).  
Із останнього співвідношення випливає, що якщо  $z \in \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ , де  $\mathbb{K}$  – обмежена область в  $\mathbb{C}$ , то  $\gamma_{\Delta\xi} \rightarrow 0$  при  $\Delta\xi \rightarrow 0$  рівномірно по  $z \in \mathbb{K}$ , оскільки існують додатні сталі  $d_1, d_2, d_3 = d_3(\xi)$  такі, що

$$|z^4| \leq d_1, |F_B[\varphi](z)| \leq d_2,$$

$$|j_{\nu+2}(z(\xi + \theta_1\Delta\xi))| \leq d_3, \forall z \in \mathbb{K}.$$

Таким чином, умова 1) виконується. Доведемо, що умова 2) також має місце.

Передусім зазначимо, що

$$\begin{aligned} |j_{\nu+2}(z(\xi + \theta_1\Delta\xi))| &\leq b_\nu e^{|\xi + \theta_1\Delta\xi|} \leq \\ &\leq \tilde{b}_\nu e^{c_0|\xi| + |y|}, z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Для опуклих функцій  $\ln \tilde{\gamma}_1$  та  $\ln \rho_1$  при довільному  $\varepsilon > 0$  та фіксованому  $\xi$  правильною є нерівність

$$c_0|\xi||y| \leq \ln \tilde{\gamma}_1(\varepsilon x) + \ln \rho_1(\varepsilon y) + d, d > 0,$$

тому

$$|j_{\nu+2}(z(\xi + \theta_1\Delta\xi))| \leq \tilde{b}_\nu e^{\ln \tilde{\gamma}_1(\varepsilon x) + \ln \rho_1(\varepsilon y)}.$$

Оскільки  $F_B[\varphi] \in \mathring{S}_{b_k}^{a_n}$  і в просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{a_n}$  визначена операція множення на  $z^2$ , то  $z^4 F_B[\varphi] \in \mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ , тобто існують сталі  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} > 0$  такі, що

$$|z^4 F_B[\varphi]| \leq \tilde{c} e^{-\ln \tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x) + \ln \rho_1(\tilde{b}y)}, z \in \mathbb{C}.$$

Тоді  $|\gamma_{\Delta\xi}(z)| \leq$

$$\leq L|\Delta\xi| e^{-\ln \tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x) + \ln \tilde{\gamma}_1(\varepsilon x) + \ln \rho_1(\tilde{b}y) + \ln \rho_1(\varepsilon y)}$$

(тут стала  $L > 0$  залежить від  $\nu, \xi$  та не залежить від  $\Delta\xi$ ). Урахувавши нерівності опуклості для функцій  $\ln \tilde{\gamma}_1$  та  $\ln \rho_1$  і зафіксувавши  $\varepsilon$  з інтервалу  $(0, \tilde{a})$  дістанемо, що

$$-\ln \tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x) + \ln \tilde{\gamma}_1(\varepsilon x) \leq -\ln \tilde{\gamma}_1((\tilde{a} - \varepsilon)x),$$

$$\ln \rho_1(\tilde{b}y) + \ln \rho_1(\varepsilon y) \leq \ln \rho_1((\tilde{b} + \varepsilon)y).$$

Оскільки, за припущенням,  $|\Delta\xi| \leq \varepsilon_0$ , то

$$|\gamma_{\Delta\xi}(z)| \leq L\varepsilon_0 e^{-\ln \tilde{\gamma}_1((\tilde{a} - \varepsilon)x) + \ln \rho_1((\tilde{b} + \varepsilon)y)}, z \in \mathbb{C}.$$

Цим доведено, що умова 2) також виконується, тобто, операція узагальненого зсуву диференційовна в просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ .

**Наслідок 1.** Операція узагальненого зсуву нескінченно диференційовна в просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ .

Для доведення твердження досить скористатися лемою 3 та методом математичної індукції.

Згортку двох функцій з простору  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  визначимо формулою

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi,$$

$$\{\varphi, \psi\} \subset \mathring{S}_{a_k}^{b_n}.$$

**Лема 3.** Правильною є формула

$$F_B[\varphi * \psi] = F_B[\varphi] \cdot F_B[\psi], \forall \{\varphi, \psi\} \subset \mathring{S}_{a_k}^{b_n}.$$

**Доведення.** Використовуючи теорему Фубіні знаходимо, що

$$\begin{aligned} F_B[\varphi * \psi](\sigma) &= \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^{+\infty} T_x^\xi \varphi(x) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi \right) j_\nu(\sigma x) \cdot \\ &\cdot x^{2\nu+1} dx = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} T_x^\xi \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) \cdot \\ &\cdot \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{+\infty} \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) \cdot \\ &\cdot \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi. \end{aligned}$$

Далі, урахувавши формулу  $T_x^\xi j_\nu(\sigma x) = j_\nu(\sigma x)j_\nu(\sigma\xi)$  прийдемо до співвідношення

$$F_B[\varphi * \psi](\sigma) = \int_0^{+\infty} \varphi(x)j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx.$$

$$\cdot \int_0^{+\infty} \psi(\xi)j_\nu(\sigma\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi = F_B[\varphi](\sigma)F_B[\psi](\sigma),$$

що й потрібно було довести.

Зазначимо, що в просторах  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  визначена і є неперервною операція множення основних функцій.

Справді, нехай  $\{\varphi, \psi\} \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , тоді існують сталі  $a_1, b_1, c_1 > 0$  такі, що

$$|\varphi(z)| \leq c_1 e^{-\ln \tilde{\gamma}(a_1 x) + \ln \rho(b_1 y)}, \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C};$$

аналогічно, існують сталі  $a_2, b_2, c_2 > 0$  такі, що

$$|\psi(z)| \leq c_2 e^{-\ln \tilde{\gamma}(a_2 x) + \ln \rho(b_2 y)}, \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Отже,

$$|\varphi(z)\psi(z)| \leq c_1 c_2 e^{-\ln \tilde{\gamma}(a_1 x) + \ln \rho((b_1 + b_2)y)},$$

$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ , тобто,  $\varphi\psi \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ .

Звідси, врахувавши властивості перетворення Бесселя у просторах типу  $\mathring{S}$  дістаємо, що  $F_B[\varphi] \cdot F_B[\psi] \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ . Застосувавши обернене перетворення Бесселя знайдемо, що

$$\varphi * \psi = F_B^{-1}[F_B[\varphi]F_B[\psi]] \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}.$$

Звідси випливає, що простори  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  утворюють топологічні алгебри відносно згортки основних функцій.

Розглянемо псевдодиференціальний оператор  $A_\varphi = F_B^{-1}[\varphi F_B]$ , який діє в просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ . За умови, що  $\varphi$  – мультиплікатор у просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ , оператор  $A_\varphi \in \mathring{S}_{b_k}^{a_n}$  є лінійним і неперервним у просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ . Виявляється, якщо розглядати оператор  $A_\varphi$  у просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{b_n}$ , то його можна розуміти як оператор Бесселя "нескінченного порядку" у такому просторі. Справді, припустимо, що розклад функції  $\varphi$

в ряд Тейлора має вигляд:  $\varphi(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \sigma^{2k}$ .

Запишемо (поки що формально) співвідношення

$$\begin{aligned} F_{B_{\sigma \rightarrow x}}^{-1} [\varphi(\sigma) F_{B_{x \rightarrow \sigma}} [\psi(x)]](\sigma) &= \\ &= F_{B_{\sigma \rightarrow x}}^{-1} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \sigma^{2k} F_{B_{x \rightarrow \sigma}} [\psi(x)](\sigma) \right] = \\ &= F_{B_{\sigma \rightarrow x}}^{-1} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (-1)^k F_{B_{x \rightarrow \sigma}} [B_\nu^k \psi(x)](\sigma) \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (-1)^k F_{B_{\sigma \rightarrow x}}^{-1} [F_{B_{x \rightarrow \sigma}} [B_\nu^k \psi(x)](\sigma)] = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (-1)^k (B_\nu^k \psi)(x) \equiv \\ &\equiv (A_\varphi \psi)(x), \quad \forall \psi \in \mathring{S}_{b_k}^{b_n} \end{aligned} \quad (8)$$

(тут ми скористалися тим, що  $F_{B_{x \rightarrow \sigma}} [B_\nu^k \psi(x)](\sigma) = (-\sigma^2)^k F_{B_{x \rightarrow \sigma}} [\psi](\sigma)$ ). Отже,  $A_\varphi$  у цьому випадку можна розуміти як оператор вигляду  $\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (-B_\nu)^k$ .

Таким чином, залишається обґрунтувати коректність проведених в (8) перетворень. Для цього досить довести, що  $r_{n,\psi}(\sigma) := \sum_{k=n+1}^{\infty} c_{2k} \sigma^{2k} F_B[\psi] \rightarrow 0$  при

$n \rightarrow \infty$  у просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{b_n}$ , або, що  $r_{n,\psi}(s) \rightarrow 0$ ,  $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ , при  $n \rightarrow +\infty$  за топологією

простору  $\mathring{S}_{b_k}^{b_n}(\mathbb{C})$ . Іншими словами, потрібно

показати, що: 1)  $r_{n,\psi} \in \mathring{S}_{b_k}^{b_n}, \forall n \geq 1$ ; 2) послідовність  $\{r_{n,\psi}, n \geq 1\}$  рівномірно збігається до нуля при  $n \rightarrow \infty$  у кожній обмеженій області  $Q \subset \mathbb{C}$ , при цьому виконуються нерівності  $|r_{n,\psi}(s)| \leq c\gamma(a\sigma)\rho(b\tau)$ ,  $\gamma = 1/\rho$ ,  $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , з деякими додатними сталими  $a, b, c > 0$ , не залежними від  $n$ .

Коефіцієнти Тейлора  $c_{2k}, k \in \mathbb{Z}_+$ , функції  $\varphi$  обчислюються за формулою Коші

$$c_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(s)}{s^{2k+1}} ds,$$

де  $\Gamma_R$  – коло радіуса  $R$  з центром у точці  $s = 0$ . Звідси, та з умови (4), яку задовольняє функція-символ  $\varphi$  впливає, що

$$|c_{2k}| \leq c_\varepsilon \inf_R \frac{(\gamma(\varepsilon R))^{-1}}{R^k} \cdot \inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^k},$$

де  $\varepsilon > 0$  – довільно фіксоване число. Оскільки в даному випадку  $\gamma = 1/\rho$ , то

$$\begin{aligned} |c_{2k}| &\leq c_\varepsilon \left( \inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^k} \right)^2 = \\ &= c_\varepsilon \varepsilon^{2k} \left( \inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{\varepsilon R} \right)^2 = c_\varepsilon \cdot \varepsilon^{2k} \rho^2 \end{aligned}$$

(зауважимо, що функція  $\rho(y)y^{-k}$  досягає свого інфімуму на проміжку  $(0, +\infty)$ ; про властивості послідовності  $\{\rho_k = \inf_R(\rho(y)y^{-k})\}$  див. п.2, властивості а)-г)). Далі здійснимо оцінку функції  $\alpha_{2k}(s) := |s^{2k} F_B[\psi](s)|$ ,  $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ , при фіксованому  $k \in \mathbb{N}$ .

Оскільки  $F_B[\psi] \in S_{b_k}^{b_n}$ , то  $\exists c, a, b > 0$   $\forall s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : |F_B[\psi](s)| \leq c\gamma(a\sigma)\rho(b\tau)$ ,  $\gamma = 1/\rho$ . Крім того,

$$\begin{aligned} |s^{2k}| &= (\sigma^2 + \tau^2)^k \leq (2 \max\{\sigma^2, \tau^2\})^k \leq \\ &\leq 2^k (|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k}). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \alpha_{2k}(s) &\leq c c_\varepsilon 2^k \varepsilon^{2k} \rho_k^2 (|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k}) \gamma(a\sigma) \rho(b\tau) = \\ &= c c_\varepsilon \varepsilon^{2k} 2^k (\rho_k^2 |\sigma|^{2k} \gamma(a\sigma) \rho(b\tau) + \\ &+ \rho_k^2 |\tau|^{2k}) \gamma(a\sigma) \rho(b\tau) \equiv c c_\varepsilon 2^k \varepsilon^{2k} (\Delta'_k(s) + \Delta''_k(s)). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\rho_k = \inf_{\sigma \neq 0} (\rho(\sigma)/|\sigma|^k) = \inf_{\sigma \neq 0} \left( \rho\left(\frac{a}{4}\sigma\right) / \left|\frac{a}{4}\sigma\right|^k \right),$$

то

$$\rho_k^2 |\sigma|^{2k} \leq \frac{\rho^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right)}{\left|\frac{a}{4}\sigma\right|^{2k}} |\sigma|^{2k} = \left(\frac{4}{a}\right)^{2k} \rho^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right), \sigma \neq 0.$$

Функція  $\ln \gamma$  задовольняє нерівність (31), з якої випливає нерівність

$$\gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right) = \gamma\left(\frac{a}{4}\sigma + \frac{a}{4}\sigma\right) \leq \gamma^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right). \quad (9)$$

Оскільки  $\rho = 1/\gamma$ , то ураховавши (9) знайдемо, що

$$\begin{aligned} \Delta'_k(s) &= \rho_k^2 |\sigma|^{2k} \gamma(a\sigma) \rho(b\tau) \leq \\ &\leq \left(\frac{4}{a}\right)^{2k} \rho^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right) \gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right) \gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right) \rho(b\tau) \leq \\ &\leq \left(\frac{4}{a}\right)^{2k} \frac{\gamma^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right)}{\gamma^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right)} \gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right) \rho(b\tau) = \\ &= \left(\frac{4}{a}\right)^{2k} \gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right) \rho(b\tau). \end{aligned}$$

Оцінимо  $\Delta''_k(s)$ . Ураховавши властивості опуклості функції  $\ln \rho$  (див. [3]), прийдемо до співвідношень:

$$\begin{aligned} \Delta''_k(s) &= \rho_k^2 \tau^{2k} \gamma(a\sigma) e^{\ln \rho(b\tau)} = \\ &= \rho_k^2 \tau^{2k} e^{-\ln \rho(\varepsilon_0 \tau)} \cdot e^{\ln \rho(b\tau) + \ln \rho(\varepsilon_0 \tau)} \gamma(a\sigma) \leq \\ &\leq \rho_k^2 \tau^{2k} e^{-\ln \rho(\varepsilon_0 \tau)} e^{\ln \rho((b+\varepsilon_0)\tau)} \gamma(a\sigma) \end{aligned}$$

( $\varepsilon_0 > 0$  – довільно фіксоване). Далі скористаємося тим, що  $\rho_k = \nu_k^{-k} \rho(\nu_k) \leq \nu_k^{-k} e^{k+1}$ ,  $k \geq 1$ , де  $\nu_k$  – розв'язок рівняння  $x\mu(x) = k$ ,  $x \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mu = \rho'/\rho$ ,  $\mu(2) > 1$ . Справді, оскільки  $\ln \rho(y) = \int_0^y \mu(\xi) d\xi$ , то внаслідок теореми про середнє значення маємо, що

$$\begin{aligned} \ln \rho(\nu_k) &= \int_0^{\nu_k} \mu(\xi) d\xi = \nu_k \mu(\tilde{\nu}_k) \leq \\ &\leq \nu_k \mu(\nu_k) < k + 1, \quad 0 < \tilde{\nu}_k < \nu_k \end{aligned}$$

(тут враховано, що  $\mu$  – неперервна та монотонно зростаюча на  $[0, +\infty)$  функція [9]). Тоді  $\rho(\nu_k) \leq e^{k+1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Далі безпосередньо знаходимо, що

$$\sup_{\tau \geq 0} (\tau^{2k} \exp\{-\ln \rho(\varepsilon_0 \tau)\}) =$$

$$\tilde{\nu}_k^{2k} \exp\{-\ln \rho(\varepsilon_0 \tilde{\nu}_k)\} \leq \nu_k^{2k},$$

де  $\tilde{\nu}_k$  – розв'язок рівняння  $x\mu(x) = 2k$ ,  $x \geq 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Зауважимо, що

$$\frac{\tilde{\nu}_k}{\nu_k} = \frac{\tilde{\nu}_k \cdot \mu(\nu_k)}{\nu_k \cdot \mu(\nu_k)} = \frac{\tilde{\nu}_k \cdot \mu(\nu_k)}{k}, \quad k \geq 1.$$



Оскільки  $\nu_k \leq \tilde{\nu}$ , а  $\mu$  – зростаюча та неперервна на  $[0, +\infty)$  функція, то  $\mu(\nu_k) \leq \mu(\tilde{\nu})$ ; тоді

$$\frac{\tilde{\nu}_k}{\nu_k} \leq \frac{\tilde{\nu}_k \cdot \mu(\nu_k)}{k} = \frac{2k}{k} = 2, \quad k \geq 1,$$

а

$$\Delta_k''(s) \leq e^2(2e)^{2k} \gamma(a\sigma) \rho((b + \varepsilon_0)\tau).$$

Таким чином,

$$\alpha_{2k}(s) \leq c c_\varepsilon 2^k e^{2k} \left( \left( \frac{4}{a} \right)^{2k} + e^2(2e)^{2k} \right) \cdot$$

$$\cdot \gamma(a_1\sigma) \rho(b_1\tau) = \beta A^k \varepsilon^{2k} \gamma(a_1\sigma) \rho(b_1\tau),$$

де  $\beta = 2c c_\varepsilon e^2$ ,  $A = 2\omega^2$ ,  $\omega = \max\{\frac{4}{a}, 2e\}$ ,  $a_1 = a/2$ ,  $b_1 = b + \varepsilon$ , причому всі сталі не залежить від  $k$ . Отже,

$$|r_{n,\psi}(s)| \leq \beta \sum_{k=n+1}^{\infty} A^k \varepsilon^{2k} \gamma(a_1\sigma) \rho(b_1\tau), \quad s \in \mathbb{C}. \quad (10)$$

З нерівності (10) випливає, що  $r_{n,\psi} \in \mathring{S}_{b_k}^{b_n}(\mathbb{C})$  при кожному  $n \in \mathbb{N}$ ; при цьому послідовність  $\{r_{n,\psi}, n \geq 1\}$  збігається до нуля при  $n \rightarrow \infty$  рівномірно в кожній обмеженій області  $Q \subset \mathbb{C}$ , крім того,

$$|r_{n,\psi}(s)| \leq \beta \gamma(a_1\sigma) \rho(b_1\tau), \quad n \in \mathbb{N}, \quad s \in \mathbb{C},$$

сталі  $\beta, a_1, b_1 > 0$  не залежать від  $n$ . Отже, умови 1)-2) виконуються. Цим доведено, що псевдодиференціальний оператор  $A_\varphi = F_{B\sigma \rightarrow x}^{-1}[\varphi(\sigma)F_{Bx \rightarrow \sigma}]$ , який діє в просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{b_n}$ , є оператором Бесселя "нескінченного порядку" вигляду

$$A_\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-B_\nu)^k.$$

Оператор  $A_\varphi$  є також неперервним у просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{b_n}$ . Справді, нехай  $\{\psi_n, n \geq 1\} \subset \mathring{S}_{b_k}^{b_n}$ ,  $\psi_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  у просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{b_n}$ . Тоді  $F_B[A_\varphi \psi_n] = \varphi(\sigma)F_B[\psi_n] \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ ; у просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{b_n}$ . Внаслідок властивості неперервності Бесселя (прямого і оберненого) маємо,

що  $A_\varphi \psi_n = F_B^{-1}[\varphi F_B[\psi_n]] \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , у просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{b_n}$ .

**3. Простір узагальнених функцій**  
 $(\mathring{S}_{a_k}^{b_n})'$ . Символом  $(\mathring{S}_{a_k}^{b_n})'$  позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції  $\varphi \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  визначається формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} f(x) \varphi(x) x^{2\nu+1} dx.$$

Кожна локально інтегровна парна на  $\mathbb{R}$  функція  $f$ , яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|f(x)| \leq c_\varepsilon (\gamma(\varepsilon x))^{-1}, \quad (11)$$

породжує регулярну узагальнену функцію  $F_f \in (\mathring{S}_{a_k}^{b_n})'$ :  $\langle F_f, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} f(x) \varphi(x) x^{2\nu+1} dx, \forall \varphi \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ .

Правильним є наступне твердження: якщо локально інтегровні парні на  $\mathbb{R}$  функції  $f$  і  $g$ , які задовольняють умову (11), не співпадають на множині додатної міри Лебега, то існує функція  $\varphi_0 \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  така, що  $\langle f, \varphi_0 \rangle \neq \langle g, \varphi_0 \rangle$ , тобто  $F_f \neq F_g$ . Навпаки, якщо  $F_f \neq F_g$ , то функції  $f$  і  $g$  не співпадають на множині додатної міри Лебега. Доведення цього твердження аналогічне доведенню відповідної теореми з [18].

Сформульоване твердження дозволяє ототожнювати локально інтегровні функції, які задовольняють умову (8) з породжуваними ними узагальненими функціями  $F_f$  з простору  $(\mathring{S}_{a_k}^{b_n})'$ . З властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення

$$\mathring{S}_{a_k}^{b_n} \ni f \rightarrow F_f \in (\mathring{S}_{a_k}^{b_n})'$$

є неперервним.

Оскільки в просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згор-

тку узагальненої функції  $f \in (\mathring{S}_{a_k}^{b_n})'$  з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(x) \rangle = \langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi) \rangle$$

(індекс  $\xi$  у  $f_\xi$  означає, що функціонал  $f$  діє на основну функцію  $T_\xi^x \varphi(\xi)$  як функцію аргументу  $\xi$ ).

**Лема 5.** *Нехай  $f \in (\mathring{S}_{a_k}^{b_n})'$ ,  $\varphi \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ . Тоді згортка  $f * \varphi$  є нескінченно диференційовною на  $R$  функцією; при цьому справджуються формули*

$$\begin{aligned} (f * \varphi)'(x) &= \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x} (T_\xi^x \varphi(x)) \rangle \equiv \\ &\equiv \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x} (T_\xi^x \varphi(\xi)) \rangle, \\ (f * \varphi)''(x) &= \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x} (T_\xi^x \frac{\partial}{\partial x} (T_\xi^x \varphi(x))) \rangle, \\ &\dots \end{aligned} \quad (12)$$

**Доведення.** Оскільки операція узагальненого зсуву аргументу диференційовна в просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , то граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta x} [T_\xi^{x+\Delta x} \varphi(\xi) - T_\xi^x \varphi(\xi)] \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} T_\xi^x \varphi(\xi),$$

$\Delta x \rightarrow 0$ , виконується в сенсі збіжності в просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n} \subset S_{a_k}^{b_n}$ , а  $\frac{\partial}{\partial x} T_\xi^x \varphi(\xi)$ , як функція аргументу  $\xi$ , належить до простору  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ . Тоді, внаслідок неперервності функціоналу  $f$  маємо, що

$$\begin{aligned} &(f * \varphi)'(x) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [(f * \varphi)(x + \Delta x) - (f * \varphi)(x)] = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \langle f_\xi, \frac{1}{\Delta x} [T_\xi^{x+\Delta x} \varphi(\xi) - T_\xi^x \varphi(\xi)] \rangle = \\ &= \langle f_\xi, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [T_\xi^{x+\Delta x} \varphi(\xi) - T_\xi^x \varphi(\xi)] \rangle. \end{aligned}$$

Однак,

$T_\xi^{x+\Delta x} \varphi(\xi) = T_{x+\Delta x}^\xi \varphi(x+\Delta x) = T_{\Delta x} [T_x^\xi \varphi(x)]$ , де  $T_{\Delta x} : \varphi(x) \rightarrow \varphi(x + \Delta x)$  – оператор зсуву аргументу в просторі  $S_{a_k}^{b_n}$ . Тому

$$(f * \varphi)'(x) = \langle f_\xi, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T_{\Delta x} [T_x^\xi \varphi(x)] - T_x^\xi \varphi(x)}{\Delta x} \rangle. \forall \psi \in \mathring{S}_{b_k}^{a_n} : \langle F_B[f * \varphi], \psi \rangle = \langle f * \varphi, F_B[\psi] \rangle =$$

Оскільки

$$\frac{1}{\Delta x} [T_{\Delta x} [T_x^\xi \varphi(x)] - T_x^\xi \varphi(x)] \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x} T_x^\xi \varphi(x)$$

у просторі  $S_{a_k}^{b_n}$ , то

$$(f * \varphi)'(x) = \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x} T_x^\xi \varphi(x) \rangle.$$

Інтегруючи одержаний результат, прийдемо до формул (12). Лема доведена.

Нехай  $f \in (\mathring{S}_{a_k}^{b_n})'$ . Якщо  $f * \varphi \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ ,  $\forall \varphi \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  і із співвідношення  $\varphi_\nu \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow +\infty$  за топологією простору  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  випливає, що  $f * \varphi_\nu \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow +\infty$  за топологією простору  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , то функціонал  $f$  називається згортувачем у просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ .

Перетворення Бесселя узагальненої функції  $f \in (\mathring{S}_{a_k}^{b_n})'$  визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_B[f], \varphi \rangle = \langle f, F_B[\varphi] \rangle, \forall \varphi \in \mathring{S}_{b_k}^{a_n}. \quad (13)$$

Із (13), властивостей лінійності і неперервності функціоналу  $f$  та властивостей перетворення Бесселя основних функцій випливає лінійність і неперервність функціоналу  $F_B[f]$  над простором основних функцій  $\mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ . Отже, перетворення Бесселя узагальненої функції  $f$  заданої на  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , є узагальненою функцією на просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ .

**Теорема 1.** *Якщо узагальнена функція  $f \in (\mathring{S}_{a_k}^{b_n})'$  – згортувач у просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , то для довільної функції  $\varphi \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  правильною є формула*

$$F_B[f * \varphi] = F_B[f] F_B[\varphi].$$

**Доведення.** Згідно з умовою теореми  $f * \varphi \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ . Тоді, скориставшись означенням перетворення Бесселя, а також означенням згортки узагальненої функції з основною, запишемо такі співвідношення:

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} (f * \varphi)(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx = \\
&= \int_0^{\infty} \langle f_{\xi}, T_x^{\xi} \varphi(x) \rangle F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx = \\
&= \langle f_{\xi}, \int_0^{\infty} T_x^{\xi} \varphi(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx \rangle \quad (14)
\end{aligned}$$

(зазначимо, що остання рівність написана, поки що, формально).

Нехай

$$I(\xi) := \int_0^{\infty} T_x^{\xi} \varphi(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx.$$

Тоді

$$\begin{aligned}
I(\xi) &= \int_0^{\infty} T_x^{\xi} \varphi(x) \left( \int_0^{\infty} \psi(\sigma) j_{\nu}(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma \right) \times \\
&\times x^{2\nu+1} dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \varphi(x) \psi(\sigma) T_x^{\xi} j_{\nu}(\sigma x) \times \\
&\times \sigma^{2\nu+1} x^{2\nu+1} d\sigma dx = \int_0^{\infty} \psi(\sigma) j_{\nu}(\sigma \xi) \sigma^{2\nu+1} \times \\
&\times \left( \int_0^{\infty} \varphi(x) j_{\nu}(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) d\sigma = \\
&= \int_0^{\infty} \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) j_{\nu}(\sigma \xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma = \\
&= F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi](\xi)
\end{aligned}$$

(тут ми скористалися теоремою Фубіні, врахувавши, що збіжним є інтеграл

$$\int_0^{\infty} \left( \int_0^{\infty} |\psi(\sigma) \varphi(x) j_{\nu}(\sigma x) j_{\nu}(\sigma \xi)| \sigma^{2\nu+1} x^{2\nu+1} d\sigma \right) dx.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\langle F_B[f * \varphi], \psi \rangle &= \langle f, F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi] \rangle = \\
&= \langle F_B[f], F_B[\varphi] \cdot \psi \rangle =
\end{aligned}$$

$$= \langle F_B[f] \cdot F_B[\varphi], \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathring{S}_{b_k}^{a_n}.$$

Звідси дістаємо рівність

$$F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi].$$

Залишається обґрунтувати коректність співвідношень (14). Введемо позначення

$$I_r(\xi) := \int_0^r \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) j_{\nu}(\sigma \xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, \quad r > 0.$$

Для доведення (14) досить показати, що  $I_r(\xi) \rightarrow I(\xi)$  при  $r \rightarrow +\infty$  у просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , тобто, що  $\gamma_r(z) := I(z) - I_r(z) \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow +\infty$ ,  $z = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ , за топологією простору  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}(\mathbb{C})$ . Врахувавши оцінки нормованої функції  $j_{\nu}$  комплексного аргументу знайдемо, що

$$\begin{aligned}
|\gamma_r(z)| &\leq \int_r^{+\infty} |\psi(\sigma)| |F_B[\varphi](\sigma)| |j_{\nu}(\sigma z)| \sigma^{2\nu+1} d\sigma \leq \\
&\leq c_{\nu} \int_r^{+\infty} |\psi(\sigma)| |F_B[\varphi](\sigma)| e^{\sigma|\omega|} \sigma^{2\nu+1} d\sigma,
\end{aligned}$$

$$z = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$$

(тут  $c_{\nu} = \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\nu+1) \cdot \Gamma^{-1}(\nu+1/2)$ ,  $\nu > -1/2$ ). Якщо  $z \in \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ , де  $\mathbb{K}$  – обмежена область, то  $|\omega| \leq c_0$ . Тоді

$$|\gamma_r(z)| \leq c_0 \int_r^{\infty} |\psi(\sigma)| |F_B[\varphi](\sigma)| e^{c_0 \sigma} \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

$$\forall z \in \mathbb{K}.$$

Оскільки  $\psi \cdot F_B[\varphi] \in \mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ , то інтеграл

$$\int_0^{\infty} |\psi(\sigma)| |F_B[\varphi](\sigma)| e^{c_0 \sigma} \sigma^{2\nu+1} d\sigma \quad (15)$$

є збіжним. Справді, для функції  $\psi F_B[\varphi]$  справджується оцінка:  $|\psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma)| \leq \tilde{c} \exp\{-\ln \tilde{\gamma}(a_0 \sigma)\}$  де  $\tilde{c}$ ,  $a_0$  – деякі додатні сталі. З властивостей функцій  $\tilde{\gamma}$  випливає, що  $\ln \tilde{\gamma}(a_0 \sigma)$  зростає швидше за довільну лінійну функцію на проміжку  $[1, +\infty)$ , тому

функція  $\sigma^{2\nu+1} \exp\{-\ln \tilde{\gamma}(a_0\sigma) + c_0\sigma\}$  спадає на нескінченності до нуля, наприклад, як функція  $\exp\{-\frac{1}{2} \ln \tilde{\gamma}(a_0\sigma)\}$ . Звідси і впливає збіжність інтеграла (15). Отже,

$$\int_r^{+\infty} |\psi(\sigma)| |F_B[\varphi](\sigma)| e^{c_0\sigma} \sigma^{2\nu+1} d\sigma \rightarrow 0$$

при  $r \rightarrow +\infty$  (як залишок збіжного інтеграла). Цим доведено, що  $\gamma_r(z)$  збігається до нуля при  $r \rightarrow +\infty$  рівномірно по  $z$  у кожній обмеженій області  $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ . Доведемо тепер, що має місце нерівність

$$|\gamma_r(z)| \leq ce^{-\ln \tilde{\gamma}(a\xi) + \ln \rho(b\omega)}, \quad (16)$$

де сталі  $a, b, c > 0$  не залежать від  $r$ .

Оскільки  $\gamma_r(\xi) = I(\xi) - I_r(\xi)$ , то  $|\gamma_r(\xi)| \leq |I(\xi)| + |I_r(\xi)|$ . Розглянемо функції

$$I_{r,+}(\xi) = \max_{\xi \in \mathbb{R}}(I_r(\xi), 0),$$

$$I_{r,-}(\xi) = -\min_{\xi \in \mathbb{R}}(I_r(\xi), 0),$$

які є невід'ємними і врахуємо те, що

$$|I_r(\xi)| = I_{r,+}(\xi) + I_{r,-}(\xi) \leq 2|I(\xi)|.$$

Отже,

$$|\gamma_r| \leq 3|I| = 3|F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi]|, \forall r > 0.$$

Звідси вже впливає нерівність (16), оскільки  $F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi] \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , якщо  $\psi \in \mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ . Теорема доведена.

**Зауваження 1.** З теореми 1 впливає, що якщо узагальнена функція  $f \in$  згортувачем у просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , то її перетворення Бесселя – мультиплікатор у просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ .

**Теорема 2.** Якщо узагальнена функція  $f$  – мультиплікатор у просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , то її перетворення Бесселя – згортувач у просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ .

**Доведення.** Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$F_B[f] * \varphi = \langle F_B[f], T_x^\xi \varphi(x) \rangle = \langle f, F_B[T_x^\xi \varphi(x)] \rangle,$$

$$\forall \varphi \in \mathring{S}_{b_k}^{a_n}.$$

Оскільки  $F_B[T_x^\xi \varphi(x)] = j_\nu(\sigma\xi) F_B[\varphi](\sigma)$ , то

$$\begin{aligned} F_B[f] * \varphi &= \langle f, j_\nu(\sigma\xi) F_B[\varphi](\sigma) \rangle = \\ &= \int_0^\infty f(\sigma) j_\nu(\sigma\xi) F_B[\varphi](\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma = F_B[f F_B[\varphi]]. \end{aligned}$$

Зазначимо, що  $F_B[f F_B[\varphi]] \in \mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ , бо  $f F_B[\varphi] \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$  (тут ми врахували те, що  $F_B[\varphi] \in \mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , а  $f$  – мультиплікатор у просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ ). Теорема доведена.

**Зауваження 2.** Результати, одержані в теоремах 2, 3, можна сформулювати так: для того, щоб узагальнена функція  $f \in (\mathring{S}_{a_k}^{b_n})'$  була згортувачем у просторі  $\mathring{S}_{a_k}^{b_n}$ , необхідно й досить, щоб її перетворення Бесселя було мультиплікатором у просторі  $\mathring{S}_{b_k}^{a_n}$ .

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
2. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
3. Gorbachuk M.L., Gorbachuk V.I. Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht (Boston) London: Kluwer, 1991. – 374 p.
4. Кашиповский А.И. Граничные значения решений некоторых классов однородных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1981. – 18 с.
5. Горбачук М.Л., Дудников П.И. О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, при которых решения бесконечно дифференцируемы // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 4. – С. 9–11.
6. Городецький В.В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.
7. Городецький В.В. Множини початкових значень гладких розв'язків дифференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.
8. Городецький В.В. Еволюційні рівняння в зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційованих функцій. – Чернівці: Рута, 2008. – 400 с.
9. Городецький В.В., Мартынюк О.В. Операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева в пространствах типа  $S$  // Сиб. мат. журн. – 2013. – Т. 54, № 3. – С. 569–584.

- 
10. *Гуревич Б.Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 99, № 6. – С. 893–896.
11. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
12. *Готинчан Т.І., Атаманюк Р.М.* Різні форми означення просторів типу  $W$  // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика. – Чернівці: Рута, 2001. – С. 21–26.
13. *Городецький В.В., Петришин Р.І., Тодоріко Т.С.* Нелокальна багатоточкова за часом задача для одного класу рівнянь з частинними похідними нескінченного порядку // Нелінійні коливання. – 2015. – Т. 18, № 2. – С. 176–191.
14. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Матем. сб. – 1955. – Т. 36, № 2. – С. 299–310.
15. *Корн Т., Корн Г.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
16. *Готинчан Т.І.* Перетворення Фур'є–Бесселя сукупності  $S_{m_{2k,2q}}$  // Міжнар. наук. конф. ім. В.Я. Скоробогатька, 25–28 серпня, 2015 р. Дрогобич / Тези доповідей. – Львів: Львівська політехніка, 2015. – С. 58.
17. *Левитан Б.И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – Т. 6, вып. 2. – С. 102–143.
18. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Преобразование Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности задачи Коши // Успехи мат. наук. – 1953. – Т. 8, вып. 6. – С. 3–54.