УДК 517.95

©2017 р. В. Власов

Львівський національний університет імені Івана Франка

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО АНІЗОТРОПНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

У роботі знайдено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для двовимірного анізотропного параболічного рівняння зі слабким степеневим виродженням. Невідомими є два старших коефіцієнти, залежні від часу.

The paper deals with the problem of establishing existence and uniqueness conditions for the solution to the inverse problem for weakly degenerate two-dimensional anisotropic parabolic equation. Two time-dependent major coefficients are unknown.

Вступ

Обернені задачі моделюють широкий клас задач у фізиці [1], біології [2], динаміці популяцій [3], [4], торгівлі опціонами [5] та ін. Невідомими у таких задачах є різноманітні властивості середовищ, у яких проходять досліджувані процеси (наприклад, теплопровідність, густина, внутрішня структура та ін.). Майже завжди такі задачі є некоректно поставленими. Огляд різноманітних типів цих задач можна знайти у [6]. Одним з типів обернених задач є задачі для рівнянь з виродженням. Найчастіше причиною виродження рівняння є відповідна поведінка відомих чи невідомих коефіцієнтів, які можуть залежати від часової змінної, або сукупності просторових змінних. Ця поведінка визначає і характер виродження - слабкого або сильного.

Обернені задачі для одновимірних параболічних рівнянь із залежним від часу старшим коефіцієнтом, який перетворюється в нуль у початковий момент часу, у випадку слабкого та сильного виродження вивчені в працях [7], [8], [9]. Випадок виродження за просторовою змінною розглянуто, наприклад, в [10], [11], [12]. Обернені задачі для двовимірних параболічних рівнянь без виродження з невідомими коефіцієнтами, залежними від часу, були розглянуті в [13], [14], [15]. Випадок двовимірного рівняння теплопровідності зі слабким виродженням був досліджений в роботі [17].

Дана робота присвячена дослідженню оберненої задачі знаходження невідомих коефіцієнтів у двовимірному параболічному рівнянні з виродженням. Невідомими є старші коефіцієнти, які залежать від часу і дорівнюють нулю при $t = 0$. Характер виродження визначається степеневими функціями з різними показниками при різних невідомих коефіцієнтах і є слабким, тобто показники степенів менші одиниці. З використанням теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора встановлено умови існування (локального і глобального за часом) класичного розв'язку вказаної задачі. Доведення єдиності розв'язку базується на властивостях інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Існування

Розглянемо задачу в області $Q_T := \{(x, y, t) : 0 < x < h, 0 < y < l, 0 < t < T\}$: знайти трійку функцій $(u(x, y, t), a_1(t), a_2(t))$, що задовольняє рівняння

$$u_t = t^{\beta_1} a_1(t) u_{xx} + t^{\beta_2} a_2(t) u_{yy} + b_1(x, y, t) u_x + \\ + b_2(x, y, t) u_y + c(x, y, t) u + \\ + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_T, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in [0, h] \times [0, l], \tag{2}$$

крайові умови

$$\begin{aligned}&u(0,y,t)=\mu_1(y,t),\\&u(h,y,t)=\mu_2(y,t),\quad (y,t)\in[0,l]\times[0,T],\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}&u(x,0,t)=\nu_1(x,t),\\&u(x,l,t)=\nu_2(x,t),\quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T],\end{aligned}\tag{4}$$

та умови перевизначення

$$a_1(t)u_x(0,y_0,t)=\varkappa_1(t),\quad t\in[0,T],\tag{5}$$

$$a_2(t)u_y(x_0,0,t)=\varkappa_2(t),\quad t\in[0,T],\tag{6}$$

де $0<\beta_i<1$, $i=1,2$, і x_0,y_0 – деякі фіксовані точки із $(0,h)$ та $(0,l)$ відповідно.

Теорема 1 (локальне існування) Припустимо, що виконуються умови:

(A1) $\varphi\in C^1(\overline{D})$, де $D:=$
$=\{(x,y):0<x<h,0<y<l\}$,
$\mu_i\in C^{2,1}([0,l]\times(0,T])\cap$
$\cap\, C^{1,1}([0,l]\times[0,T])$; $\nu_i\in C^{2,1}([0,h]\times$
$\times(0,T])\cap C^{1,1}([0,h]\times[0,T])$;
$\varkappa_i\in C[0,T]$,
$b_i,c,f\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $i=1,2$;

(A2) $\varphi_x(x,y)>0$, $\varphi_y(x,y)>0$, $(x,y)\in\overline{D}$;
$\mu_{1_y}(y,t)\geq 0$, $\mu_{2_y}(y,t)\geq 0$,
$(y,t)\in[0,l]\times[0,T]$;
$|t^{\beta_2}\mu_{kyy}(y,t)|\leq A_k<\infty$, $k=1,2$,
$(y,t)\in[0,l]\times[0,T]$; $\nu_{1_x}(x,t)\geq 0$,
$\nu_{2_x}(x,t)\geq 0,(x,t)\in[0,h]\times[0,T]$;
$|t^{\beta_1}\nu_{kxx}(x,t)|\leq B_k<\infty$, $k=1,2$,
$(x,t)\in[0,h]\times[0,T]$;
$\varkappa_i(t)>0$, $t\in[0,T]$, $i=1,2$;

(A3) $\mu_1(y,0)=\varphi(0,y)$, $\mu_2(y,0)=\varphi(h,y)$,
$\nu_1(x,0)=\varphi(x,0)$, $\nu_2(x,0)=\varphi(x,l)$,
$\mu_1(0,t)=\nu_1(0,t)$, $\mu_1(l,t)=\nu_2(0,t)$,
$\mu_2(0,t)=\nu_1(h,t)$, $\mu_2(l,t)=\nu_2(h,t)$.

Тоді для $T_0\in(0,T]$, де T_0 визначається вихідними даними, існує розв'язок $(u(x,y,t),a_1(t),a_2(t))$ задачі (1)-(6), що належить до класу $\big(C^{2,1}(\overline{D}\times(0,T_0])\cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})\big)\times C[0,T_0]\times C[0,T_0]$, і $a_i(t)>0$, $i=1,2$, $t\in[0,T_0]$.

Доведення. Введемо позначення $v:=u_x$, $w:=u_y$. Запишемо інтегро-диференціальне рівняння, еквівалентне прямій задачі (1)-(4):

$$\begin{aligned}&u(x,y,t)=u_0(x,y,t)+\\&+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times\\&\times(b_1(\xi,\eta,\tau)v+b_2(\xi,\eta,\tau)w+\\&+c(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T,\end{aligned}\tag{7}$$

де

$$\begin{aligned}&u_0(x,y,t)=\int_0^l\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,0)\times\\&\times\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta+\int_0^t\int_0^l G_{11\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\times\\&\times\tau^{\beta_1}a_1(\tau)\mu_1(\eta,\tau)d\eta d\tau-\\&-\int_0^t\int_0^l G_{11\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\tau^{\beta_1}a_1(\tau)\times\\&\times\mu_2(\eta,\tau)d\eta d\tau+\int_0^t\int_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\times\\&\times\tau^{\beta_2}a_2(\tau)\nu_1(\xi,\tau)d\xi d\tau-\\&-\int_0^t\int_0^h G_{11\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\times\\&\times\tau^{\beta_2}a_2(\tau)\nu_2(\xi,\tau)d\xi d\tau+\\&+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau.\end{aligned}\tag{8}$$

Через $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ позначено функції Гріна для рівняння теплопровідності

$$u_t=t^{\beta_1}a_1(t)u_{xx}+t^{\beta_2}a_2(t)u_{yy}+f(x,y,t),$$

що мають вигляд [15]:

$$
\begin{aligned}
&G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)= \\
&=\frac{1}{4\pi\sqrt{(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}\times \\
&\times\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\Big(\exp\Big(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\Big)+ \\
&+(-1)^i\exp\Big(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta_1(t)-\theta_1(\tau))}\Big)\Big)\times \\
&\times\Big(\exp\Big(-\frac{(y-\eta+2ml)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\Big)+ \\
&+(-1)^j\exp\Big(-\frac{(y+\eta+2ml)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\Big)\Big)\Bigg), \\
&i,j=1,2,
\end{aligned}
$$

де

$$
\theta_k(t)=\int_0^t\tau^{\beta_k}a_k(\tau)d\tau,\ k=1,2.
$$

У визначенні функцій Гріна, $i,j=1$ відповідає умовам Діріхле, а $i,j=2$ – умовам Неймана по x та y відповідно.

Диференціюючи (7) по x і y та використовуючи властивості функцій Гріна, утворимо рівняння для v та w:

$$
\begin{aligned}
&v(x,y,t)=u_{0_x}(x,y,t)+ \\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{11_x}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times \\
&\times(b_1(\xi,\eta,\tau)v+b_2(\xi,\eta,\tau)w+ \\
&+c(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T, \qquad (9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&w(x,y,t)=u_{0_y}(x,y,t)+ \\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{11_y}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times \\
&\times(b_1(\xi,\eta,\tau)v+b_2(\xi,\eta,\tau)w \\
&+c(\xi,\eta,\tau)u)d\xi d\eta d\tau,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T, \qquad (10)
\end{aligned}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&u_{0_x}(x,y,t)=\int_0^l\int_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,0)\times \\
&\times\varphi_\xi(\xi,\eta)d\xi d\eta- \\
&-\int_0^t\int_0^l G_{21}(x,y,t,0,\eta,\tau)\times \\
&\times\big(\mu_{1_\tau}(\eta,\tau)-\tau^{\beta_2}a_2(\tau)\mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau)- \\
&-f(0,\eta,\tau)\big)d\eta d\tau+ \\
&+\int_0^t\int_0^l G_{21}(x,y,t,h,\eta,\tau)\times \\
&\times\big(\mu_{2_\tau}(\eta,\tau)-\tau^{\beta_2}a_2(\tau)\mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau)- \\
&-f(h,\eta,\tau)\big)d\eta d\tau+ \\
&+\int_0^t\int_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,0,\tau)\times \\
&\times\tau^{\beta_2}a_2(\tau)\nu_{1_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau- \\
&-\int_0^t\int_0^h G_{21_\eta}(x,y,t,\xi,l,\tau)\times \\
&\times\tau^{\beta_2}a_2(\tau)\nu_{2_\xi}(\xi,\tau)d\xi d\tau+ \\
&+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{21}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\xi(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau, \qquad (11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_{0_y}(x,y,t)=\int_0^l\int_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,0)\times \\
&\times\varphi_\eta(\xi,\eta)d\xi d\eta+
\end{aligned}
$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,0,\eta,\tau)\times$$
$$\times\,\tau^{\beta_1}a_1(\tau)\mu_{1_\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^l G_{12_\xi}(x,y,t,h,\eta,\tau)\times$$
$$\times\,\tau^{\beta_1}a_1(\tau)\mu_{2_\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,0,\tau)\times$$
$$\times\big(\nu_{1_\tau}(\xi,\tau)-\tau^{\beta_1}a_1(\tau)\nu_{1_{\xi\xi}}(\xi,\tau)-$$
$$-f(\xi,0,\tau)\big)d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,l,\tau)\times$$
$$\times\big(\nu_{2_\tau}(\xi,\tau)-\tau^{\beta_1}a_1(\tau)\nu_{2_{\xi\xi}}(\xi,\tau)-$$
$$-f(\xi,l,\tau)\big)d\xi d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l\int\limits_0^h G_{12}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)f_\eta(\xi,\eta,\tau)d\xi d\eta d\tau. \tag{12}$$

Покажемо, що $v(0,y_0,t)>0$, $w(x_0,0,t)>0$, $i=1,2$. Підставимо (11) у (9) і позначимо інтеграли у отриманому виразі через $I_i, i=\overline{1,7}$. Встановимо оцінки для I_i, використовуючи умови **(A2)**.

Легко бачити, що функцію Гріна $G_{ij}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ можна подати як добуток двох одновимірних функцій Гріна $G_i(x,t,\xi,\tau)G_j(y,t,\eta,\tau)$, для яких безпосереднім обчисленням можна встановити рівності

$$\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)d\xi=1,\ \int\limits_0^l G_2(y,t,\eta,\tau)d\eta=1.$$

Тоді для I_1,I_4,I_5 отримуємо:

$$I_1\geq\min_{(x,y)\in\overline{D}}\varphi_x(x,y)\int\limits_0^l G_1(y,t,\eta,0)d\eta,$$

$$I_4\geq\min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}}\nu_{1_x}(x,t)\int\limits_0^t G_{1_\eta}(y,t,0,\tau)\tau^{\beta_2}a_2(\tau)d\tau,$$

$$I_5\geq\min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}}\nu_{2_x}(x,t)\times$$
$$\times\left(-\int\limits_0^t G_{1_\eta}(y,t,l,\tau)\tau^{\beta_2}a_2(\tau)d\tau\right).$$

Для їхньої суми виконується нерівність

$$I_1+I_4+I_5\geq\min\Big\{\min_{(x,y)\in\overline{D}}\varphi_x(x,y),$$
$$\min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}}\nu_{1_x}(x,t),\min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}}\nu_{2_x}(x,t)\Big\}\times$$
$$\times\Bigg(\int\limits_0^l G_1(y,t,\eta,0)d\eta+$$
$$+\int\limits_0^t G_{1_\eta}(y,t,0,\tau)\tau^{\beta_2}a_2(\tau)d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t G_{1_\eta}(y,t,l,\tau)\tau^{\beta_2}a_2(\tau)d\tau\Bigg).$$

Вираз у дужках є розв'язком такої задачі:

$$u_t=t^{\beta_2}a_2(t)u_{yy},\ (y,t)\in(0,l)\times(0,T),$$
$$u(y,0)=1,\ y\in[0,l],$$
$$u(0,t)=u(l,t)=1,\ t\in[0,T].$$

Він є тотожним 1. Тому

$$I_1+I_4+I_5\geq\min\Bigg\{\min_{\substack{x\in[0,h]\\ y\in[0,l]}}\varphi_x(x,y),$$
$$\min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}}\nu_{1_x}(x,t),\min_{\substack{x\in[0,h]\\ t\in[0,T]}}\nu_{2_x}(x,t)\Bigg\}:=M_1>0.$$

З того, що інтеграли I_2,I_3,I_6,I_7 прямують до нуля при $t\to+0$, випливає існування такого $T_1\in(0,T]$, що

$$\frac{M_1}{2}+I_2+I_3+I_6+I_7\geq 0,$$
$$(x,y,t)\in\overline{D}\times[0,T_1].$$

Звідси отримуємо

$$v(x,y,t)\geq\frac{M_1}{2},\quad (x,y,t)\in\overline{D}\times[0,T_1]. \tag{13}$$

Застосувавши аналогічні міркування до $w(x,y,t)$, матимемо

$$w(x,y,t) \geq \frac{M_2}{2} > 0, \quad (x,y,t) \in \overline{D} \times [0,T_2]. \tag{14}$$

Враховуючи (13), (14), подамо (5), (6) у вигляді:

$$a_1(t) = \frac{\varkappa_1(t)}{v(0,y_0,t)}, \quad t \in [0,T_3], \tag{15}$$

$$a_2(t) = \frac{\varkappa_2(t)}{w(x_0,0,t)}, \quad t \in [0,T_3], \tag{16}$$

де $T_3 = \min\{T_1, T_2\}$. Отже, задачу (1)-(6) зведено до системи рівнянь (7), (9), (10), (15), (16).

Покажемо, що задачі (1)-(6) та (7), (9), (10), (15), (16) є еквівалентними у такому сенсі: якщо (u, a_1, a_2) – розв'язок задачі (1)-(6), що належить до класу $\left(C^{2,1}(\overline{D} \times (0,T_3]) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_3})\right) \times C[0,T_3] \times C[0,T_3]$, то $(u, v = u_x, w = u_y, a_1, a_2)$ є розв'язком системи рівнянь (7), (9), (10), (15), (16) з класу $(C(\overline{Q}_{T_3}))^3 \times (C[0,T_3])^2$; правильним є і зворотне твердження. Перше твердження є очевидним внаслідок способу отримання системи (7), (9), (10), (15), (16). Доведемо зворотне твердження. Диференціюючи рівняння (7) по x та y, бачимо, що $v = u_x, w = u_y$. Тоді u як розв'язок рівняння (7) задовольняє (1)-(4) і належить до класу $C^{2,1}(\overline{D} \times (0,T_3]) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_3})$. Виконання умов (5), (6) випливає з (15), (16).

Отже, достатньо встановити існування неперервного розв'язку системи рівнянь (7), (9), (10), (15), (16). Застосуємо до системи (7), (9), (10), (15), (16) теорему Шаудера про нерухому точку. Встановимо апріорні оцінки розв'язків системи (7), (9), (10), (15), (16).

Використовуючи (13) та (14) у (15) і (16), отримуємо

$$a_1(t) \leq A_1,\; a_2(t) \leq A_2,\; t \in [0,T_3], \tag{17}$$

де A_1 та A_2 визначаються вихідними даними.

Оцінимо u, v_i зверху. Беручи до уваги оцінки функцій Гріна [16] та наявність оцінок (17), приходимо до нерівностей:

$$|u_{0_x}(x,y,t)| \leq C_1 + C_2 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} d\tau,$$

$$(x,y,t) \in \overline{Q}_{T_3},$$

$$|u_{0_y}(x,y,t)| \leq C_3 + C_4 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}} d\tau,$$

$$(x,y,t) \in \overline{Q}_{T_3}.$$

Введемо позначення $U(t) := \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |u(x,y,t)|$, $V_1(t) := \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |v(x,y,t)|$, $V_2(t) := \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |w(x,y,t)|$. Тоді з (7), (9), (10) отримуємо:

$$U(t) \leq C_5 + C_6 \int_0^t \left(V_1(\tau) + V_2(\tau) + U(\tau)\right) d\tau,$$

$$V_1(t) \leq C_7 + C_8 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} \times$$
$$\times \left(V_1(\tau) + V_2(\tau) + U(\tau)\right) d\tau,$$

$$V_2(t) \leq C_9 + C_{10} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}} \times$$
$$\times \left(V_1(\tau) + V_2(\tau) + U(\tau)\right) d\tau.$$

Додавши ці нерівності та використавши (17) , маємо

$$V(t) \leq C_{11} + C_{12} \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{\theta_1(t) - \theta_1(\tau)}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\theta_2(t) - \theta_2(\tau)}} \right) V(\tau) d\tau. \tag{18}$$

де $V(t) := V_1(t) + V_2(t) + U(t)$. Позначивши $a_{k_{min}}(t) := \min\limits_{0 \leq \tau \leq t} a_k(\tau)$, $k = 1,2$, оцінимо вираз $\dfrac{1}{\sqrt{\theta_k(t)-\theta_k(\tau)}}$, $k=1,2$:

$$\frac{1}{\sqrt{\theta_k(t)-\theta_k(\tau)}}=\frac{1}{\sqrt{\int\limits_\tau^t \sigma^{\beta_k}a_k(\sigma)d\sigma}}\leq$$
$$\leq\frac{1}{\sqrt{a_{k_{min}}(t)}\sqrt{\int\limits_\tau^t \sigma^{\beta_k}d\sigma}}\leq$$
$$\leq\frac{\sqrt{\beta_k+1}}{\sqrt{a_{k_{min}}(t)t^{\beta_k}}\sqrt{t-\tau}}.$$

Застосуємо цю нерівність до (18):

$$V(t)\leq C_{11}+C_{12}\Bigg(\frac{\sqrt{\beta_1+1}}{\sqrt{a_{1_{min}}(t)t^{\beta_1}}}+$$
$$+\frac{\sqrt{\beta_2+1}}{\sqrt{a_{2_{min}}(t)t^{\beta_2}}}\Bigg)\int\limits_0^t\frac{V(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \qquad (19)$$

Ввівши позначення $a_{min}(t):=\min\left\{a_{1_{min}}(t),\right.$ $\left.a_{2_{min}}(t)\right\}$, $\beta=\max\left\{\beta_1,\beta_2\right\}$, зведемо (19) до вигляду

$$V(t)\leq C_{11}+C_{13}\frac{1}{\sqrt{a_{min}(t)t^{\beta}}}\int\limits_0^t\frac{V(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \qquad (20)$$

У (20) замінимо σ на t і домножимо обидві частини нерівності на $\dfrac{d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}}$. Проінтегрувавши від 0 до t, матимемо:

$$\int\limits_0^t\frac{V(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}}d\sigma\leq 2C_{11}\sqrt{t}+$$
$$+\frac{C_{13}}{\sqrt{a_{min}(t)}}\int\limits_0^t\frac{\sigma^{-\frac{\beta}{2}}d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}}\int\limits_0^\sigma\frac{V(\tau)}{\sqrt{\sigma-\tau}}d\tau.$$

Змінюючи порядок інтегрування і враховуючи рівність

$$\int\limits_\tau^t\frac{d\sigma}{\sqrt{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}}=\pi,$$

приходимо до нерівності:

$$\int\limits_0^t\frac{\sigma^{-\frac{\beta}{2}}d\sigma}{\sqrt{t-\sigma}}\int\limits_0^\sigma\frac{V(\tau)}{\sqrt{\sigma-\tau}}d\tau\leq\pi\int\limits_0^t\tau^{-\frac{\beta}{2}}V(\tau)d\tau.$$

Отже,

$$\int\limits_0^t\frac{V(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}}d\sigma\leq 2C_{11}\sqrt{t}+$$
$$+\frac{C_{13}\pi}{\sqrt{a_{min}(t)}}\int\limits_0^t\tau^{-\frac{\beta}{2}}V(\tau)d\tau. \qquad (21)$$

Підставивши (21) у (20), отримаємо:

$$V(t)\leq C_{11}+\frac{C_{14}}{\sqrt{a_{min}(t)}}+$$
$$+\frac{C_{15}}{a_{min}(t)}\int\limits_0^t\tau^{-\beta}V(\tau)d\tau. \qquad (22)$$

Із умов перевизначення випливає

$$a_{min}(t)\geq\frac{\min\limits_{i=1,2}\varkappa_i(t)}{V(t)}.$$

Підставивши (22) у останню нерівність, матимемо

$$a_{min}(t)\geq C_{16}\Bigg(C_{11}+\frac{C_{14}}{\sqrt{a_{min}(t)}}+$$
$$+\frac{C_{15}}{a_{min}(t)}\int\limits_0^t\tau^{-\beta}V(\tau)d\tau\Bigg)^{-1},$$

або

$$C_{11}a_{min}(t)+C_{14}\sqrt{a_{min}(t)}-$$
$$-C_{16}+C_{15}\int\limits_0^t\tau^{-\beta}V(\tau)d\tau\geq 0.$$

Можна вибрати таке $T_0\in(0,T_3]$, що

$$C_{15}\int\limits_0^t\tau^{-\beta}V(\tau)d\tau\leq\frac{C_{16}}{2},\quad t\in[0,T_0].$$

Тоді

$$C_{11}a_{min}(t)+C_{14}\sqrt{a_{min}(t)}- \\ -\frac{C_{16}}{2}\geq 0, \quad t\in[0,T_0]. \qquad (23)$$

Розв'язавши цю квадратну нерівність, отримуємо оцінку:

$$a_{min}(t)\geq A_3>0, \quad t\in[0,T_0]. \qquad (24)$$

Враховуючи (24) в (22), отримуємо

$$V(t)\leq M_3, \quad t\in[0,T_0]. \qquad (25)$$

Отже,

$$|u(x,y,t)|\leq M_3,\ v(x,y,t)\leq M_3, \\ v(x,y,t)\leq M_3, \quad (x,y,t)\in\overline{Q}_{T_0}, \\ a_1(t)\geq A_3,\ a_2(t)\geq A_3, \quad t\in[0,T_0]. \qquad (26)$$

Позначивши $\omega := (u,v_1,v_2,a_1,a_2)$, систему (7), (9), (10), (15), (16) подамо у вигляді:

$$\omega=\mathcal{P}\omega,\ \omega\in\mathcal{N}, \qquad (27)$$

де

$$\mathcal{N}:=\big\{\omega\in(C(\overline{Q}_{T_0}))^3\times(C([0,T_0])^2: \\ |u|\leq M_3, \frac{M_1}{2}\leq v_1\leq M_3, \frac{M_2}{2}\leq v_2 \\ \leq M_3, A_3\leq a_1\leq A_1, A_3\leq a_2\leq A_2\big\}. \qquad (28)$$

Із побудови $\mathcal{N}$ випливає, що оператор $\mathcal{P}$ відображає $\mathcal{N}$ в себе.

Одностайна неперервність множини $\mathcal{P}\mathcal{N}$ доводиться аналогічно до [7]. Тоді із теореми Шаудера випливає, що існує нерухома точка оператора P, що доводить існування розв'язку задачі (1)-(6). □

Доведемо тепер глобальне існування розв'язку.

Теорема 2 (глобальне існування) Припустимо, що крім **(А1)**, **(А3)**, виконуються умови:

(А4) $\varphi(x,y)\geq 0,\ \varphi_x(x,y)>0,$
$\varphi_y(x,y)>0,\ (x,y)\in\overline{D};$
$\mu_{1_t}(y,t)-b_2(0,y,t)\mu_{1_y}(y,t)-$
$-c(0,y,t)\mu_1(y,t)-f(0,y,t)<0,$
$\mu_{2_t}(y,t)-b_2(h,y,t)\mu_{2_y}(y,t)-$
$-c(h,y,t)\mu_2(y,t)-f(h,y,t)>0,$
$\mu_i(y,t)\geq 0,\ \mu_{i_y}(y,t)>0,\ i=1,2,$
$\mu_{1_{yy}}(y,t)\geq 0,\ \mu_{2_{yy}}(y,t)\leq 0,$
$b_1(0,y,t)<0,$
$b_1(h,y,t)>0,\ (y,t)\in[0,l]\times(0,T];$
$\nu_{1_t}(x,t)-b_1(x,0,t)\nu_{1_x}(x,t)-$
$-c(x,0,t)\nu_1(x,t)-f(x,0,t)<0,$
$\nu_{2_t}(x,t)-b_1(x,l,t)\nu_{2_x}(x,t)-$
$-c(x,l,t)\nu_2(x,t)-f(x,l,t)>0,$
$\nu_i(x,t)\geq 0,\ \nu_{i_x}(x,t)>0, i=1,2,$
$\nu_{1_{xx}}(x,t)\geq 0,\ \nu_{2_{xx}}(x,t)\leq 0,$
$b_2(x,0,t)<0,$
$b_2(x,l,t)>0, \quad (x,t)\in[0,h]\times[0,T];$
$b_{1_y}(x,y,t)\geq 0,\ b_{2_x}(x,y,t)\geq 0,$
$f(x,y,t)\geq 0,\ f_x(x,y,t)\geq 0,$
$f_y(x,y,t)\geq 0, c_x(x,y,t)\geq 0,$
$c_y(x,y,t)\geq 0,\ (x,y,t)\in\overline{Q}_T.$

Тоді існує розв'язок (u,a_1,a_2) задачі (1)-(6) з класу $\big(C^{2,1}(\overline{D}\times(0,T])\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)\big)\times C[0,T]\times C[0,T]$, де $a_i(t)>0,\ i=1,2,\ t\in[0,T]$.

Доведення. Для встановлення оцінок $v=u_x$ та $w=u_y$ утворимо для них допоміжні задачі. Продиференціювавши (1) та (2) по x та y, отримаємо:

$$v_t=t^{\beta_1}a_1(t)v_{xx}+t^{\beta_2}a_2(t)v_{yy}+b_1(x,y,t)v_x+ \\ +b_2(x,y,t)v_y+(b_{1_x}(x,y,t)+c(x,y,t))v+ \\ +b_{2_x}(x,y,t)w+c_x(x,y,t)u+f_x(x,y,t), \\ (x,y,t)\in Q_T, \qquad (29)$$

$$v(x,y,0)=\varphi_x(x,y),\ (x,y)\in\overline{D}, \qquad (30)$$

$$w_t=t^{\beta_1}a_1(t)w_{xx}+t^{\beta_2}a_2(t)w_{yy}+b_1(x,y,t)w_x+ \\ +b_2(x,y,t)w_y+(b_{2_y}(x,y,t)+c(x,y,t))w+$$

$$+ b_{1_y}(x,y,t)v + c_y(x,y,t)u + f_y(x,y,t),$$
$$(x,y,t) \in Q_T, \quad (31)$$

$$w(x,y,0) = \varphi_y(x,y), \ (x,y) \in \overline{D}. \quad (32)$$

Поклавши в (1) $x = 0, x = h$ та $y = 0, y = l$, прийдемо до рівностей:

$$t^{\beta_1} a_1(t) v_x(0,y,t) + b_1(0,y,t)v(0,y,t) =$$
$$= \mu_{1t}(y,t) - t^{\beta_2} a_2(t)\mu_{1yy}(y,t) -$$
$$- b_2(0,y,t)\mu_{1y}(y,t) - c(0,y,t)\mu_1(y,t) -$$
$$- f(0,y,t), \quad (33)$$
$$t^{\beta_1} a_1(t) v_x(h,y,t) + b_1(h,y,t)v(h,y,t) =$$
$$= \mu_{2t}(y,t) - t^{\beta_2} a_2(t)\mu_{2yy}(y,t) -$$
$$- b_2(h,y,t)\mu_{2y}(y,t) - c(h,y,t)\mu_2(y,t) -$$
$$- f(h,y,t), \quad (34)$$
$$t^{\beta_2} a_2(t) w_y(x,0,t) + b_2(x,0,t)w(x,0,t) =$$
$$= \nu_{1t}(x,t) - t^{\beta_1} a_1(t)\nu_{1xx}(x,t) -$$
$$- b_1(x,0,t)\nu_{1x}(x,t) - c(x,0,t)\nu_1(x,t) -$$
$$- f(x,0,t), \quad (35)$$
$$t^{\beta_2} a_2(t) w_y(x,l,t) + b_2(x,l,t)w(x,l,t) =$$
$$= \nu_{2t}(x,t) - t^{\beta_1} a_1(t)\nu_{2xx}(x,t) -$$
$$- b_1(x,l,t)\nu_{2x}(x,t) - c(x,l,t)\nu_2(x,t) -$$
$$- f(x,l,t). \quad (36)$$

Крім того, продиференціювавши (3) та (4) по y та x, отримаємо співвідношення:

$$v(x,0,t) = \nu_{1x}(x,t), \ v(x,l,t) = \nu_{2x}(x,t), \quad (37)$$
$$w(0,y,t) = \mu_{1y}(y,t), \ w(h,y,t) = \mu_{2y}(y,t). \quad (38)$$

Отже, маємо задачу (29), (30), (33), (34), (37) стосовно v і задачу (31), (32), (35), (36), (38) стосовно w. Встановимо оцінки v та w. Подамо v як суму $v_0 + \tilde{v}$, де v_0 є розв'язком задачі

$$v_{0_t} = t^{\beta_1} a_1(t) v_{0_{xx}} + t^{\beta_2} a_2(t) v_{0_{yy}} +$$
$$+ b_1(x,y,t) v_{0_x} + b_2(x,y,t) v_{0_y} +$$
$$+ (b_{1_x}(x,y,t) + c(x,y,t)) v_0, \quad (x,y,t) \in Q_T, \quad (39)$$

$$v_0(x,y,0) = \varphi_x(x,y), \quad (x,y) \in \overline{D}, \quad (40)$$
$$t^{\beta_1} a_1(t) v_{0_x}(0,y,t) + b_1(0,y,t) v_0(0,y,t) =$$
$$= \mu_{1_t}(y,t) - t^{\beta_2} a_2(t)\mu_{1_{yy}}(y,t) -$$
$$- b_2(0,y,t)\mu_{1_y}(y,t) - c(0,y,t)\mu_1(y,t) -$$
$$- f(0,y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \quad (41)$$
$$t^{\beta_1} a_1(t) v_{0_x}(h,y,t) + b_1(h,y,t) v_0(h,y,t) =$$
$$= \mu_{2_t}(y,t) - t^{\beta_2} a_2(t)\mu_{2_{yy}}(y,t) -$$
$$- b_2(h,y,t)\mu_{2_y}(y,t) - c(h,y,t)\mu_2(y,t) -$$
$$- f(h,y,t), \quad (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \quad (42)$$
$$v_0(x,0,t) = \nu_{1_x}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times$$
$$\times [0,T], \quad (43)$$
$$v_0(x,l,t) = \nu_{2_x}(x,t), \quad (x,t) \in [0,h] \times$$
$$\times [0,T], \quad (44)$$

і $\tilde{v}$ є розв'язком:

$$\tilde{v}_t = t^{\beta_1} a_1(t)\tilde{v}_{xx} + t^{\beta_2} a_2(t)\tilde{v}_{yy} +$$
$$+ b_1(x,y,t)\tilde{v}_x + b_2(x,y,t)\tilde{v}_y +$$
$$+ (b_{1_x}(x,y,t) + c(x,y,t))\tilde{v} +$$
$$+ b_{2_x}(x,y,t) w + c_x(x,y,t) u +$$
$$+ f_x(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \quad (45)$$
$$\tilde{v}(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in \overline{D}, \quad (46)$$
$$t^{\beta_1} a_1(t)\tilde{v}_x(0,y,t) + b_1(0,y,t) \times$$
$$\times \tilde{v}(0,y,t) = 0, \ (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \quad (47)$$
$$t^{\beta_1} a_1(t)\tilde{v}_x(h,y,t) + b_1(h,y,t) \times$$
$$\times \tilde{v}(h,y,t) = 0, \ (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \quad (48)$$
$$\tilde{v}(x,0,t) = 0, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \quad (49)$$
$$\tilde{v}(x,l,t) = 0, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,T]. \quad (50)$$

Для w використаємо аналогічне зображення $w_0 + \tilde{w}$. Задачі для w_0 та $\tilde{w}$ є аналогічними до задач для v_0 та $\tilde{v}$.

Застосовуючи принцип максимуму [18] до (29), (30), (33), (34), та до аналогічної задачі стосовно w_0, отримаємо

$$0 < M_4 \le v_0(x,y,t) \le M_5 < \infty,$$
$$0 < M_6 \le w_0(x,y,t) \le$$
$$\le M_7 < \infty, \quad (x,y,t) \in \overline{Q}_T, \quad (51)$$

де $M_k, k = 4,5,6,7$ – сталі, що визначаються вихідними даними.

Функцію $\tilde{v}$ подамо у вигляді

$$\tilde{v}(x,y,t)=\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{31}^v(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$
$$\times\left(b_{2_\xi}(\xi,\eta,\tau)w+c_\xi(\xi,\eta,\tau)u+\right.$$
$$\left.+f_\xi(\xi,\eta,\tau)\right)d\xi d\eta d\tau,$$

де $G_{31}^v(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ – функція Гріна для рівняння (29) з крайовими умовами (47)-(50). Аналогічно для $\tilde{w}$ матимемо

$$\tilde{w}(x,y,t)=\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{13}^w(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$
$$\times\left(b_{1_\eta}(\xi,\eta,\tau)v+c_\eta(\xi,\eta,\tau)u+\right.$$
$$\left.+f_\eta(\xi,\eta,\tau)\right)d\xi d\eta d\tau.$$

Отже, отримали систему інтегральних рівнянь Вольтерра

$$v(x,y,t)=v_0(x,y,t)+$$
$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{31}^v(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$
$$\times\left(b_{2_\xi}(\xi,\eta,\tau)w+c_\xi(\xi,\eta,\tau)u+\right.$$
$$\left.+f_\xi(\xi,\eta,\tau)\right)d\xi d\eta d\tau, \tag{52}$$
$$w(x,y,t)=w_0(x,y,t)+$$
$$+\int_0^t\int_0^l\int_0^h G_{13}^w(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$
$$\times\left(b_{1_\eta}(\xi,\eta,\tau)v+c_\eta(\xi,\eta,\tau)u+\right.$$
$$\left.+f_\eta(\xi,\eta,\tau)\right)d\xi d\eta d\tau. \tag{53}$$

Із припущень теореми та принципу максимуму випливає, що $u(x,y,t)\geq 0$, і ядра цих рівнянь є невід'ємними. Тому, застосувавши до цієї системи метод послідовних наближень, отримаємо

$$v(x,y,t)\geq v_0(x,y,t)\geq M_4,\ w(x,y,t)\geq$$
$$\geq w_0(x,y,t)\geq M_6,\quad (x,y,t)\in\overline{Q}_T.$$

З (15), (16) знаходимо

$$a_1(t)\leq A_1,\ a_2(t)\leq A_2,\quad t\in[0,T].$$

Позначимо $V(t):=\max\limits_{(x,y)\in\overline{D}}v(x,y,t)$, $W(t):=\max\limits_{(x,y)\in\overline{D}}w(x,y,t)$. Використовуючи принцип максимуму для u, оцінки (51) та припущення **(A4)**, з (52), (53) матимемо:

$$V(t)\leq C_{17}+C_{18}\int_0^t W(\tau)d\tau,$$

$$W(t)\leq C_{19}+C_{20}\int_0^t V(\tau)d\tau.$$

Додамо останні дві нерівності:

$$V(t)+W(t)\leq C_{21}+C_{22}\int_0^t\left(V(\tau)+W(\tau)\right)d\tau.$$

Застосувавши нерівність Гронуолла, матимемо:

$$V(t)+W(t)\leq M_8,\quad t\in[0,T]. \tag{54}$$

Завершення доведення проводиться аналогічно до теореми 1. $\square$

Єдиність

Теорема 3 (єдиність) Припустимо, що виконуються умови:

(A5) $\varphi\in C^2(\overline{D})$, $\mu_i\in C^{2,1}([0,l]\times(0,T])\cap$ $\cap\, C^{1,1}([0,l]\times[0,T])$,
$\nu_i\in C^{2,1}([0,h]\times(0,T])\cap$
$\cap\, C^{1,1}([0,h]\times[0,T])$;
$|t^{\beta_2}\mu_{kyy}(y,t)|\leq A_k<\infty$,
$k=1,2,\ (y,t)\in[0,l]\times[0,T]$;
$|t^{\beta_1}\nu_{kxx}(y,t)|\leq B_k<\infty$,
$k=1,2,\ (x,t)\in[0,h]\times[0,T]$;
$b_i,c,f\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $i=1,2$;

(A6) $\varkappa_i(t)\neq 0$, $i=1,2,\quad t\in[0,T]$.

Тоді розв'язок задачі (1)-(6) єдиний у класі $\left(C^{2,1}(\overline{D}\times(0,T])\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)\right)\times C[0,T]\times C[0,T]$, і $a_i(t)>0$, $i=1,2$, $t\in[0,T]$.

Доведення. Припустимо, що існує два розв'язки задачі (1)-(6) $(u^{(1)},a_1^{(1)},a_2^{(1)})$ та $(u^{(2)},a_1^{(2)},a_2^{(2)})$. Позначимо $U:=u^{(1)}-u^{(2)}$,

$A_1 := a_1^{(1)} - a_1^{(2)}$, $A_2 := a_2^{(1)} - a_2^{(2)}$. Тоді для (U, A_1, A_2) матимемо задачу

$$U_t = t^{\beta_1} a_1^{(1)}(t) U_{xx} + t^{\beta_2} a_2^{(1)}(t) U_{yy} + \\ + b_1(x,y,t)U_x + b_2(x,y,t)U_y + c(x,y,t)U + \\ + t^{\beta_1} A_1(t) u_{xx}^{(2)} + \\ + t^{\beta_2} A_2(t) u_{yy}^{(2)}, \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{55}$$

$$U(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in \overline{D}, \tag{56}$$

$$U(0,y,t) = U(h,y,t) = 0, \\ (y,t) \in [0,l] \times [0,T], \tag{57}$$

$$U(x,0,t) = U(x,l,t) = 0, \\ (x,t) \in [0,h] \times [0,T], \tag{58}$$

$$a_1^{(1)}(t) U_x(0,y_0,t) = \\ = -A_1(t) u_x^{(2)}(0,y_0,t), \quad t \in [0,T], \tag{59}$$

$$a_2^{(2)}(t) U_y(x_0,0,t) = \\ = -A_2(t) u_y^{(2)}(x_0,0,t), \quad t \in [0,T]. \tag{60}$$

Використовуючи функцію Гріна $\tilde{G}_{11}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ для рівняння (55) з умовами (57), (58), зведемо задачу (55)-(60) до системи інтегральних рівнянь стосовно (A_1, A_2):

$$A_1(t) u_x^{(2)}(0,y_0,t) = -a_1^{(1)}(t) \times \\ \times \int_0^t \int_0^l \int_0^h \tilde{G}_{11_x}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau) \times \\ \times (\tau^{\beta_1} A_1(\tau) u_{\xi\xi}^{(2)} + \\ + \tau^{\beta_2} A_2(\tau) u_{\eta\eta}^{(2)}) d\xi d\eta d\tau, \tag{61}$$

$$A_2(t) u_y^{(2)}(x_0,0,t) = -a_2^{(1)}(t) \times \\ \times \int_0^t \int_0^l \int_0^h \tilde{G}_{11_y}(x_0,0,t,\xi,\eta,\tau) \times \\ \times (\tau^{\beta_1} A_1(\tau) u_{\xi\xi}^{(2)} + \\ + \tau^{\beta_2} A_2(\tau) u_{\eta\eta}^{(2)}) d\xi d\eta d\tau, \quad t \in [0,T]. \tag{62}$$

Отримали систему інтегральних рівнянь (61), (62), еквівалентну задачі (55)-(60).

Доведемо інтегровність ядер у рівняннях (61), (62). Проаналізуємо поведінку похідних $u_{xx}^{(2)}$, $u_{yy}^{(2)}$ при $t \to +0$. Використаємо функцію Гріна $G_{11}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau)$ задачі (56)-(58) для рівняння теплопровідності

$$u_t^{(2)} = t^{\beta_1} a_1^{(2)}(t) u_{xx}^{(2)} + t^{\beta_2} a_2^{(2)}(t) u_{yy}^{(2)}. \tag{63}$$

Знайдемо зображення $u_{xx}^{(2)}$, виходячи з (7), (8) :

$$u_{xx}^{(2)}(x,y,t) = \int_0^l \int_0^h G_{11}^*(x,y,t,\xi,\eta,0) \varphi_{\xi\xi}(\xi,\eta) + \\ + \int_0^t \int_0^l G_{11_\xi}^*(x,y,t,0,\eta,\tau) \times \\ \times (\mu_{1_\tau}(\eta,\tau) - a_2^{(2)}(\tau) \tau^{\beta_2} \mu_{1_{\eta\eta}}(\eta,\tau) - \\ - f(0,\eta,\tau)) d\eta d\tau - \int_0^t \int_0^l G_{11_\xi}^*(x,y,t,h,\eta,\tau) \times \\ \times (\mu_{2_\tau}(\eta,\tau) - a_2^{(2)}(\tau) \tau^{\beta_2} \mu_{2_{\eta\eta}}(\eta,\tau) - \\ - f(h,\eta,\tau)) d\eta d\tau + \int_0^t \int_0^h G_{11_\eta}^*(x,y,t,\xi,0,\tau) \times \\ \times \tau^{\beta_2} a_2^{(2)}(\tau) \nu_{1_{\xi\xi}}(\xi,\tau) d\xi d\tau - \\ - \int_0^t \int_0^h G_{11_\eta}^*(x,y,t,\xi,l,\tau) \tau^{\beta_2} a_2^{(2)}(\tau) \times \\ \times \nu_{2_{\xi\xi}}(\xi,\tau) d\xi d\tau - \\ - \int_0^t \int_0^l \int_0^h G_{11_\xi}^*(x,y,t,\xi,\eta,\tau) \times \\ \times f_\xi(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta d\tau + \\ + \int_0^t \int_0^l G_{11\xi}^*(x,y,t,h,\eta,\tau) \times \\ \times \Big(b_1(h,\eta,\tau) u_\xi^{(2)}(h,\eta,\tau) + b_2(h,\eta,\tau) \mu_{2\eta}(\eta,\tau) + \\ + c(h,\eta,\tau) \mu_2(\eta,\tau) \Big) d\eta d\tau - \\ - \int_0^t \int_0^l G_{11\xi}^*(x,y,t,0,\eta,\tau) \times \\ \times \Big(b_1(0,\eta,\tau) u_\xi^{(2)}(0,\eta,\tau) + b_2(0,\eta,\tau) \mu_{1\eta}(\eta,\tau) +$$

$$+ c(0,\eta,\tau)\mu_1(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^l\int_0^h G^*_{11_\xi}(x,y,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times(b_1(\xi,\eta,\tau)u^{(2)}_{\xi\xi}+b_2(\xi,\eta,\tau)u^{(2)}_{\eta\xi}+$$

$$+(b_{1_\xi}(\xi,\eta,\tau)+c(\xi,\eta,\tau))u^{(2)}_\xi+$$

$$+b_{2_\xi}(\xi,\eta,\tau)u^{(2)}_\eta+c_\xi(\xi,\eta,\tau)u^{(2)})d\xi d\eta d\tau. \tag{64}$$

Аналогічне зображення має $u^{(2)}_{yy}$. Підставимо ці вирази в (61), (62). Дослідимо для прикладу поведінку одного з доданків ядра рівняння (61), що відповідає другому інтегралу у виразі для $u^{(2)}_{xx}$:

$$I=\Big|\int_0^t\int_0^l\int_0^h \tilde{G}_{11x}(0,y_0,t,\xi,\eta,\tau)\times$$

$$\times\tau^{\beta_1}d\xi d\eta d\tau\int_0^\tau\int_0^l G^*_{11\xi_1}(\xi,\eta,\tau,0,\eta_1,\tau_1)\times$$

$$\times\Big(\mu_{1\tau_1}(\eta_1,\tau_1)-a^{(2)}_2(\tau_1)\tau_1^{\beta_2}\mu_{1\eta_1\eta_1}(\eta_1,\tau_1)-$$

$$-f(0,\eta_1,\tau_1)\Big)d\eta_1 d\tau_1\Big|\le C_{23}\int_0^t\tau^{\beta_1}d\tau\times$$

$$\times\int_0^h\tilde{G}_{1x}(0,t,\xi,\tau)d\xi\int_0^\tau G^*_{1\xi_1}(\xi,\tau,0,\tau_1)d\tau_1.$$

Знайдемо похідну

$$G^*_{1\xi_1}(\xi,\tau,0,\tau_1)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^3}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}\right),$$

де $\theta(t)=\int\limits_0^t\tau^{\beta_1}a^{(2)}_1(\tau)d\tau$. Використовуючи відому оцінку функції Гріна [18], отримаємо

$$|\tilde{G}_{1x}(0,t,\xi,\tau)|\le C_{24}\frac{\xi}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{\frac32}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\xi^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}\right).$$

Тоді

$$I\le C_{25}\int_0^t\tau^{\beta_1}d\tau\int_0^\tau d\tau_1\int_0^h\tilde{G}_{1x}(0,t,\xi,\tau)\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^3}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\xi+2nh|\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(\xi+2nh)^2}{4(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}\right)d\xi.$$

Виділимо з підінтегрального ряду I_0, що відповідає $n=0$:

$$I_0\le C_{26}\int_0^t\tau^{\beta_1}d\tau\int_0^\tau d\tau_1\int_0^h\frac{\xi^2}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{\frac32}}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}-\frac{\xi^2}{4(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}\right)\times$$

$$\times(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))^{-rac32}d\xi.$$

Зробимо заміну $z=\dfrac{\xi}{2\sqrt{\theta(\tau)-\theta(\tau_1)}}$, тоді

$$I_0\le\int_0^t\tau^{\beta_1}d\tau\int_0^\tau d\tau_1\int_0^\infty\frac{z^2}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{\frac32}}\times$$

$$\times\exp\left(-z^2-\frac{z^2(\theta(\tau)-\theta(\tau_1))}{\theta(t)-\theta(\tau)}\right)dz=$$

$$=\int_0^t\tau^{\beta_1}d\tau\int_0^\tau d\tau_1\int_0^\infty\frac{z^2}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{\frac32}}\times$$

$$\times\exp\left(-z^2\frac{\theta(t)-\theta(\tau_1)}{\theta(t)-\theta(\tau)}\right)dz.$$

Покладемо $y=z\sqrt{\dfrac{\theta(t)-\theta(\tau_1)}{\theta(t)-\theta(\tau)}}$:

$$I_0\le\int_0^t\tau^{\beta_1}d\tau\int_0^\tau d\tau_1\times$$

$$\times\int_0^\infty\frac{\theta(t)-\theta(\tau)}{(\theta(t)-\theta(\tau_1))(\theta(t)-\theta(\tau))^{\frac32}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{\theta(t)-\theta(\tau)}{\theta(t)-\theta(\tau_1)}}y^2\exp(-y^2)dy=$$

$$= C_{27} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\beta_1} d\tau}{\theta(t) - \theta(\tau)} \int\limits_0^\tau \frac{d\tau_1}{\sqrt{(\theta(t) - \theta(\tau_1)}} \leq$$

$$\leq C_{28} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\beta_1} d\tau}{t^{\beta_1+1} - \tau^{\beta_1+1}} \int\limits_0^\tau \frac{d\tau_1}{\sqrt{t^{\beta_1+1} - \tau_1^{\beta_1+1}}} \leq$$

$$\leq C_{28} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\beta_1} d\tau}{(t^{\beta_1+1} - \tau^{\beta_1+1}) t^{\frac{\beta_1}{2}}} \times$$

$$\times \int\limits_0^\tau \frac{d\tau_1}{\sqrt{t - \tau_1}} = 2 \frac{C_{28}}{t^{\frac{\beta_1}{2}}} \times$$

$$\times \int\limits_0^t \frac{\tau^{\beta_1}}{t^{\beta_1+1} - \tau^{\beta_1+1}} \left(\sqrt{t} - \sqrt{t - \tau} \right) \leq$$

$$\leq 2C_{28} t^{\frac{1-\beta_1}{2}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\beta_1} d\tau}{t^{\beta_1+1} - \tau^{\beta_1+1}} =$$

$$= 2C_{28} t^{\frac{1-\beta_1}{2}} \int\limits_0^1 \frac{z^{\beta_1} dz}{1 - z^{\beta_1+1}} \leq$$

$$\leq 2C_{28} t^{\frac{1-\beta_1}{2}}.$$

Аналогічно можна оцінити інші інтеграли у виразах для $u_{xx}^{(2)}$, $u_{yy}^{(2)}$, звідки буде випливати, що ядра у (61), (62) є інтегровними. Оскільки інтегральні рівняння (61), (62) є однорідними, то вони мають тільки тривіальний розв'язок $A_1(t) \equiv 0$, $A_2(t) \equiv 0$, $t \in [0, T]$. Звідси та з (55)-(58) випливає, що $U(x, y, t) \equiv 0, (x, y, t) \in \overline{Q}_T$. Отже, розв'язок задачі (1)-(6) єдиний. $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lorenzi A., Paparoni E.* Direct and inverse problems in the theory of materials with memory // Rend. Sem. Univ. Padova. – 1992. – **87**. – P. 105-138.

2. *Hazanee A., Lesnic D.* Determination of a time-dependent coefficient in the bioheat equation // International Journal of Mechanical Sciences. – 2014. – **88**. – P. 259-266.

3. *Kaltenbacher B., Klibanov M.* An Inverse Problem for a Nonlinear Parabolic Equation with Applications in Population Dynamics and Magnetics // SIAM J. Math. Anal. – 2008. – **39**, №6. – P. 1863–1889.

4. *Di Blasio G., Lorenzi A.* An Identification Problem in Age-Dependent Population Diffusion // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2013. – **34**, №1. – P. 36-73.

5. *Bouchouev I., Isakov V.* The inverse problem of option pricing // Inverse Problems. – 1997. – **13**. – P. 7–11.

6. *Kabanikhin S. I.* Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2008. – **16**. – P. 317–357.

7. *Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння зі слабким виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 3. – С. 7–17.

8. *Іванчов М., Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з сильним степеневим виродженням // Укр. мат. журнал. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1487-1500.

9. *Ivanchov M., Saldina N.* An inverse problem for strongly degenerate heat equation // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2006. – **14**, №5. – С. 465-480.

10. *Cannarsa P., Tort J., Yamamoto M.* Determination of source terms in a degenerate parabolic equation // Inverse Problems. – 2010. – **26**, №10. – 105003.

11. *Deng Z., Yang L.* An inverse problem of identifying the coefficient of first-order in a degenerate parabolic equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2011. – **235**. – P. 4404-4417.

12. *Tort J.* Determination of source terms in a degenerate parabolic equation from a locally distributed observation // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. – 2010. – **348**. – P. 1287-1291.

13. *Сагайдак Р.* Про одну обернену задачу для двовимірного рівняння параболічного типу в прямокутнику // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – **62**. – С. 117-128.

14. *Баранська І., Іванчов М.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності в області з вільними межами // Укр. мат. вісн. – 2007. – **4**, №4. – С. 457-484.

15. *Баранська І. Є.* Обернена задача в області з вільною межею для анізотропного рівняння параболічного типу // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2008. – **374**. – С. 13-29.

16. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. — VNTL Publishers, 2003.

17. *Іванчов М., Власов В.* Обернена задача для двовимірного рівняння теплопровідності зі слабким виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – **70**. – С. 91-102.

18. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.