УДК 517.524

©2017 р. Т.М. Антонова, С.М. Возна

Національний університет "Львівська політехніка"

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ НАБЛИЖЕНЬ ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ З НЕДОДАТНИМИ ЧАСТИННИМИ ЧИСЕЛЬНИКАМИ

Досліджуються властивості наближень числового гіллястого ланцюгового дробу, який пов'язаний із задачею відповідності між формальним подвійним степеневим рядом і послідовністю раціональних наближень функції двох змінних. Встановлено деякі достатні умови монотонності та обмеженості послідовностей фігурних та звичайних наближень парного порядку досліджуваного дробу з недодатними частинними чисельниками. За наявності додаткових обмежень на елементи доведено збіжність і фігурну збіжність гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду до одної і тої самої границі.

Properties of approximants for the numerical branched continued fraction of the special form, which is connected with the correspondence problem between a formal double power series and a sequence of the rational approximants of a function of two variables are researched. We establish some sufficient conditions of monotonicity and boundedness for sequences of figured and ordinary approximants of even order for investigated continued fraction with nonpositive partial numerators. Convergence and figured convergence of branched continued fraction of the special form to the same limit are proved under additional restrictions on elements.

Вступ. Основним предметом досліджень аналітичної терії неперервних (ланцюгових) дробів та їх багатовимірних узагальнень є теорія розвинення та збіжності неперервних і гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД) загального та спеціального вигляду, елементи яких є функціями одної або багатьох змінних. Якщо ці функції є поліномами, то наближення таких дробів є раціональними функціями одної чи багатьох змінних, тому неперервні дроби та їх багатовимірні узагальнення є одним із засобів побудови раціональних наближень.

Функціональний неперервний дріб або його багатовимірний аналог називається відповідним до формального степеневого ряду, якщо розвинення кожного його n-го наближення, $n = 0, 1, \dots,$ у степеневий ряд збігається з заданим рядом до всіх членів степеня n включно. Одним з ефективних алгоритмів розвинення аналітичних функцій у неперервні дроби є побудова відповідних неперервних дробів для степеневих рядів, в які розвиваються дані функції [6]. Проблема побудови відповідних ГЛД для подвійних степеневих рядів не має однозначного розв'язку. У монографії [5] розглянуто дві конструкції двовимірних відповідних ГЛД, частинні знаменники яких дорівнюють одиниці, а частинні чисельники є поліномами не вище другого порядку від двох змінних. Одна з цих конструкцій, що пізніше отримала назву двовимірного неперервного дробу (ДНД), була запропонована Х.Й. Кучмінською [7], а також J. Murphy, M.R. O'Donohoe [8]. Основи аналітичної теорії ДНД викладені у монографії [7], а також численних журнальних публікаціях. Двовимірний відповідний ГЛД іншого вигляду був запропонований W. Siemaszko'м [9]: ,

$$b_{0,0} + F_{0,0} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i,0} z_1}{1 + F_{i,0}} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{b_{0,i} z_2}{1 + F_{0,i}}, \qquad (1)$$

$$F_{i,j} = \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{b_{i+k,j} z_1 z_2}{1}, \ i, j = 0, 1, \dots. \qquad (2)$$

Коефіцієнти $b_{i,j},\ i, j = 0, 1, \dots,$ обчислюються за певними формулами в залежності від коефіцієнтів заданого ряду, $\bar{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. При фіксованих значеннях $\bar{z}$ двовимірний відповідний ГЛД (1)-(2) перетворюється на числовий ГЛД спеціального вигляду (типу Siemaszko). Деякі ознаки збіжності таких ГЛД з комплексними елементами наведено у роботах [10, 2]. Дана робота присвячена вивченню властивостей різних наближень числових ГЛД типу Siemaszko з недодатними частинними чисельниками. При цьому використовується методика, що була застосована при вивченні властивостей звичайних наближень ГЛД загального вигляду [1], а також звичайних і фігурних наближень ДНД [3-5] з дійсними елементами.

1. Гіллясті ланцюгові дроби спеціального вигляду. Основні поняття. Постановка задачі. У даній роботі об'єктом дослідження є нескінченні ГЛД вигляду

$$b_0 + F_{0,0} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i,0}}{1+F_{i,0}} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{0,i}}{1+F_{0,i}}, \qquad (3)$$

де $F_{i,j}$ – звичайні ланцюгові (неперервні) дроби

$$F_{i,j} = \mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{\infty} \frac{a_{p+i,p+j}}{1}, \quad i,j = 0,1,\ldots, \qquad (4)$$

а $b_0,\ a_{k,j},\ j=0,1,\ldots,\ k=0,1,\ldots,\ k+j \geq 1$ — дійсні сталі.

Наближення неперервного дробу $F_{i,j}$ визначаються таким чином:

$$F_{i,j}^{(0)} = 0, \quad F_{i,j}^{(k)} = \mathop{\mathrm{D}}_{p=1}^{k} \frac{a_{p+i,p+j}}{1}, \qquad (5)$$
$$i=0,1,\ldots,\ j=0,1,\ldots,\ k=1,2,\ldots.$$

Наближення ГЛД загального і спеціального вигляду можна конструювати різними способами. У даній роботі розглядатимемо фігурні наближення (підхідні дроби за Siemaszko'м) ГЛД (3)–(4), які обчислюються за формулами

$$\tilde{f}_0 = b_0, \quad \tilde{f}_n = b_0 + F_{0,0}^{([n/2])} +$$
$$+ \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{a_{i,0}}{1+F_{i,0}^{([(n-i)/2])}} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{a_{0,i}}{1+F_{0,i}^{([(n-i)/2])}}, \qquad (6)$$

де $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ [\alpha]$ — ціла частина дійсного числа α, а також звичайні наближення ГЛД (3)–(4), які обчислюються у такий спосіб:

$$f_0 = 0,\ f_n = F_{0,0}^{(n)} +$$
$$+ \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{n} \frac{a_{i,0}}{1+F_{i+k,k}^{(n-i)}} + \mathop{\mathrm{D}}_{i=1}^{n} \frac{a_{0,i}}{1+F_{k,i+k}^{(n-i)}}, \qquad (7)$$
$$n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Залишками фігурних наближень (6) ГЛД (3)–(4) називаються такі вирази

$$\tilde{Q}_{i,0}^{(0)} = b_{i,0},\ \tilde{Q}_{0,i}^{(0)} = b_{0,i},$$
$$\tilde{Q}_{i,0}^{(k+1)} = b_{i,0} + F_{i,0}^{([(k+1)/2])} + \frac{a_{i+1,0}}{\tilde{Q}_{i+1,0}^{(k)}},$$
$$\tilde{Q}_{0,i}^{(k+1)} = b_{0,i} + F_{0,i}^{([(k+1)/2])} + \frac{a_{0,i+1}}{\tilde{Q}_{0,i+1}^{(k)}}, \qquad (8)$$
$$i = 1,2,...,\ k = 0,1,\ldots,$$

залишками звичайних наближень (7) ГЛД (3)–(4) – вирази

$$Q_{i,0}^{(0)} = b_{i,0},\ Q_{i,0}^{(k+1)} = b_{i,0} + F_{i,0}^{(k+1)} + \frac{a_{i+1,0}}{Q_{i+1,0}^{(k)}},$$
$$Q_{0,i}^{(0)} = b_{0,i},\ Q_{0,i}^{(k+1)} = b_{0,i} + F_{0,i}^{(k+1)} + \frac{a_{0,i+1}}{Q_{0,i+1}^{(k)}},$$
$$i = 1,2,...,\ k = 0,1,\ldots, \qquad (9)$$

а залишками наближень (5) звичайних ланцюгових дробів (4) – вирази

$$Q_{k+i,k+j}^{(p+1)} = b_{k+i,k+j} + \frac{a_{k+i+1,k+j+1}}{Q_{k+i+1,k+j+1}^{(p)}},$$
$$Q_{k+i,k+j}^{(0)} = b_{k+i,k+j}, \quad k = 1,2,..., \qquad (10)$$
$$i,j = 0,1,\ldots, \quad p = 0,1,\ldots.$$

Враховуючи позначення (8)–(10), можна записати:

$$F_{i,j}^{(n)} = \frac{a_{i+1,j+1}}{Q_{i+1,j+1}^{(n-1)}},\ n = 1,2,..., \qquad (11)$$

$$\tilde{f}_n = b_0 + F_{0,0}^{([n/2])} + \frac{a_{1,0}}{\tilde{Q}_{1,0}^{(n-1)}} + \frac{a_{0,1}}{\tilde{Q}_{0,1}^{(n-1)}},\ n = 1,2,..., \qquad (12)$$

$$f_n = b_0 + F_{0,0}^{(n)} + \frac{a_{1,0}}{Q_{1,0}^{(n-1)}} + \frac{a_{0,1}}{Q_{0,1}^{(n-1)}},\ n = 1,2,.... \qquad (13)$$

Вважається, що наближення $\tilde{f}_k,\ f_k$ мають сенс, якщо у процесі їх обчислень за формулами (8)–(13) не виникне невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$ (припускається, що $\dfrac{1}{0}=\infty$, $\dfrac{1}{\infty}=0$ і $\dfrac{\alpha_1}{0}+\ldots+\dfrac{\alpha_m}{0}=\dfrac{0}{0}$, якщо $m>1$).

ГЛД (3)–(4) називається збіжним (фігурно збіжним), якщо, починаючи з деякого номеру n_0, всі його звичайні наближення (фігурні наближення) мають сенс, і існує скінченна границя $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ $(\tilde f=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde f_n)$. Значення цієї границі вважається значенням збіжного ГЛД.

Важливим є питання, за яких умов $\tilde f=f$, а також, коли $\lim\limits_{n\to\infty}f_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde f_{2n}$ чи $\lim\limits_{n\to\infty}f_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde f_{2n-1}$.

Надалі розглядатимемо властивості різних наближень ГЛД вигляду (3)–(4) за умови

$$a_{i,j}\le 0,\quad i,j=0,1,\ldots,\ i+j\ge 1. \tag{14}$$

2. Формули різниці між двома наближеннями гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду. Для дослідження властивостей послідовностей наближень гіллястих ланцюгових дробів загального та спеціального вигляду використовуються формули різниці між двома їх наближеннями [5, 7]. У даній роботі для ГЛД вигляду (3)–(4) використовуватимемо такі формули:

$$\tilde f_n-\tilde f_m=F_{0,0}^{([n/2])}-F_{0,0}^{([m/2])}+\tilde P_{n,m}^{(1)}+\tilde P_{n,m}^{(2)}, \tag{15}$$

$$n>m,$$

$$\tilde P_{n,m}^{(1)}=\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{j,0}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\tilde Q_{j,0}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}\tilde Q_{j,0}^{(m-j)}}+ \tag{16}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(F_{i,0}^{([(n-i)/2])}-F_{i,0}^{([(m-i)/2])}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}(-a_{j,0})}{\prod\limits_{j=1}^{i}\tilde Q_{j,0}^{(n-j)}\tilde Q_{j,0}^{(m-j)}},$$

$$\tilde P_{n,m}^{(2)}=\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{0,j}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\tilde Q_{0,j}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}\tilde Q_{0,j}^{(m-j)}}+ \tag{17}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(F_{0,i}^{([(n-i)/2])}-F_{0,i}^{([(m-i)/2])}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}(-a_{0,j})}{\prod\limits_{j=1}^{i}\tilde Q_{0,j}^{(n-j)}\tilde Q_{0,j}^{(m-j)}};$$

$$f_n-f_m=F_{0,0}^{(n)}-F_{0,0}^{(m)}+P_{n,m}^{(1)}+P_{n,m}^{(2)}, \tag{18}$$

$$n>m,$$

$$P_{n,m}^{(1)}=\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{j,0}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}Q_{j,0}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}Q_{j,0}^{(m-j)}}+ \tag{19}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(F_{i,0}^{(n-i)}-F_{i,0}^{(m-i)}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}(-a_{j,0})}{\prod\limits_{j=1}^{i}Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(m-j)}},$$

$$P_{n,m}^{(2)}=\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{0,j}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}Q_{0,j}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}Q_{0,j}^{(m-j)}}+ \tag{20}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(F_{0,i}^{(n-i)}-F_{0,i}^{(m-i)}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}(-a_{0,j})}{\prod\limits_{j=1}^{i}Q_{0,j}^{(n-j)}Q_{0,j}^{(m-j)}};$$

$$\tilde f_n-f_m=F_{0,0}^{([n/2])}-F_{0,0}^{(m)}+\tilde S_{n,m}^{(1)}+\tilde S_{n,m}^{(2)}, \tag{21}$$

$$n>2m,$$

$$\tilde S_{n,m}^{(1)}=\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{j,0}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\tilde Q_{j,0}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}Q_{j,0}^{(m-j)}}+ \tag{22}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(F_{i,0}^{([(n-i)/2])}-F_{i,0}^{(m-i)}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}(-a_{j,0})}{\prod\limits_{j=1}^{i}\tilde Q_{j,0}^{(n-j)}Q_{j,0}^{(m-j)}},$$

$$\tilde S_{n,m}^{(2)}=\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{0,j}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}\tilde Q_{0,j}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}Q_{0,j}^{(m-j)}}+ \tag{23}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(F_{0,i}^{([(n-i)/2])}-F_{0,i}^{((m-i))}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}(-a_{0,j})}{\prod\limits_{j=1}^{i}\tilde{Q}_{0,j}^{(n-j)}Q_{0,j}^{(m-j)}};$$

$$f_n-\tilde{f}_m=F_{0,0}^{(n)}-F_{0,0}^{([m/2])}+S_{n,m}^{(1)}+S_{n,m}^{(2)},\quad n>m, \tag{24}$$

$$S_{n,m}^{(1)}=\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{j,0}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}Q_{j,0}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}\tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}}+ \tag{25}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(F_{i,0}^{(n-i)}-F_{i,0}^{([(m-i)/2])}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}(-a_{j,0})}{\prod\limits_{j=1}^{i}Q_{j,0}^{(n-j)}\tilde{Q}_{j,0}^{(m-j)}},$$

$$S_{n,m}^{(2)}=\frac{(-1)^m\prod\limits_{j=1}^{m+1}a_{0,j}}{\prod\limits_{j=1}^{m+1}Q_{0,j}^{(n-j)}\prod\limits_{j=1}^{m}\tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}}+ \tag{26}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\left(F_{0,i}^{((n-i))}-F_{0,i}^{([(m-i)/2])}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}(-a_{0,j})}{\prod\limits_{j=1}^{i}Q_{0,j}^{(n-j)}\tilde{Q}_{0,j}^{(m-j)}}.$$

Формулу різниці двох наближень неперервних дробів (4) можна записати так:

$$F_{i,j}^{(p)}-F_{i,j}^{(r)}=\frac{(-1)^r\prod\limits_{k=1}^{r+1}a_{i+k,j+k}}{\prod\limits_{k=1}^{r+1}Q_{i+k,j+k}^{(p-k)}\prod\limits_{k=1}^{r}Q_{i+k,j+k}^{(r-k)}},$$

$$r=0,1,\ldots,\ p>r,\ i,j=0,1,\ldots. \tag{27}$$

Формулу для різниці $\tilde{f}_n-\tilde{f}_m$ наведено у монографії [5, с.156]. Інші формули встановлено з використанням аналогічної методики у припущенні, що значення всіх залишків, які фігурують у цих формулах, не дорівнюють 0.

3. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай елементи ГЛД (3)–(4) задовольняють умову (2) і такі умови:*

$$\begin{gathered}-g_{i+1,1}<a_{i+1,1},\ -g_{1,i+1}<a_{1,i+1},\\ -g_{i+k,k}(1-g_{i+k-1,k-1})\le a_{i+k,k},\\ -g_{k,i+k}(1-g_{k-1,i+k-1})\le a_{k,i+k},\\ i=0,1,\ldots,k=2,3,\ldots,\end{gathered} \tag{28}$$

$$\begin{gathered}|a_{2p,0}|\ge(g_{2p-1,0}+1-|a_{2p,1}|)\times\\ \times\left(1-|a_{2p+1,1}|+\frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}\right),\\ |a_{2p,0}|\ge g_{2p-1,0}+1,\ p=1,2,\ldots,\end{gathered} \tag{29}$$

$$\begin{gathered}|a_{0,2p}|\ge(g_{0,2p-1}+1-|a_{1,2p}|)\times\\ \times\left(1-|a_{1,2p+1}|+\frac{|a_{0,2p+1}|}{g_{0,2p+1}}\right),\\ |a_{0,2p}|\ge g_{0,2p-1}+1,\ p=1,2,\ldots,\end{gathered} \tag{30}$$

$$\begin{gathered}|a_{2m+1,1}|\ge\frac{|a_{2m+1,0}|}{g_{2m+1,0}},\\ |a_{1,2m+1}|\ge\frac{|a_{0,2m+1}|}{g_{0,2m+1}},\ m=0,1,\ldots,\end{gathered} \tag{31}$$

де $g_{i,k}$ – сталі, такі, що

$$\begin{gathered}g_{i,0}>0,\ g_{0,i}>0,\ 0<g_{i,k}<1,\\ i=1,2,\ldots,\ k=1,2,\ldots.\end{gathered} \tag{32}$$

Тоді послідовності наближень парного порядку $\{\tilde{f}_{2n}\}$, $\{f_{2n}\}$, $n=1,2,\ldots$, збігаються, причому $\lim\limits_{n\to\infty}f_{2n}=\lim\limits_{m\to\infty}\tilde{f}_{2m}$,

$$\begin{gathered}\tilde{f}_2\ge\tilde{f}_4\ge\ldots\ge\tilde{f}_{2n}\ge b_0+\frac{a_{1,1}}{g_{1,1}},\\ f_2\ge f_4\ge\ldots\ge f_{2n}\ge b_0+\frac{a_{1,1}}{g_{1,1}}.\end{gathered}$$

Доведення. Оцінимо значення залишків $\tilde{Q}_{0,k}^{(p)},\tilde{Q}_{k,0}^{(p)},Q_{0,k}^{(p)},Q_{k,0}^{(p)},Q_{i,j}^{(r)},Q_{j,i}^{(r)}$ за умов теореми.

Неважко показати, що за умов (28)–(29), (32) справджуються такі нерівності [7, с.171]:

$$\begin{gathered}1\ge Q_{k+i,k}^{(p)}\ge g_{k+i,k},1\ge Q_{k,k+i}^{(p)}\ge g_{k,k+i},\\ i,p=0,1,\ldots,\ k=1,2,\ldots.\end{gathered} \tag{33}$$

Використовуючи оцінки (33) та умову (2), одержимо

$$\begin{gathered}F_{i,0}^{(0)}=F_{0,i}^{(0)}=0,\\ -|a_{i+1,1}|\ge F_{i,0}^{(p)}=-\frac{|a_{i+1,1}|}{Q_{i+1,1}^{(p-1)}}\ge-\frac{|a_{i+1,1}|}{g_{i+1,1}},\\ -|a_{1,i+1}|\ge F_{0,i}^{(p)}=-\frac{|a_{1,i+1}|}{Q_{1,i+1}^{(p-1)}}\ge-\frac{|a_{1,i+1}|}{g_{1,i+1}},\\ i=0,1,\ldots,p=1,2,\ldots.\end{gathered} \tag{34}$$

Для довільних $p = 1, 2, \ldots$, враховуючи (8), (11), (29), (34), маємо: $\tilde{Q}^{(0)}_{2p,0} = 1$,

$$-\tilde{Q}^{(1)}_{2p-1,0} = |\tilde{Q}^{(1)}_{2p-1,0}| = |a_{2p,0}| - 1 \ge g_{2p-1,0}.$$

Якщо $p > 1$, то

$$\begin{gathered}1 - |a_{2p-1,1}| \le \tilde{Q}^{(2)}_{2p-2,0} = 1 + F^{(1)}_{2p-2,0} + \\ + \frac{(-a_{2p-1,0})}{(-\tilde{Q}^{(1)}_{2p-1,0})} \le 1 - |a_{2p-1,1}| + \frac{|a_{2p-1,0}|}{|g_{2p-1,0}|},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-\tilde{Q}^{(3)}_{2p-3,0} = -1 - F^{(1)}_{2p-3,0} - \frac{a_{2p-2,0}}{\tilde{Q}^{(2)}_{2p-2,0}} \ge -1 + \\ + |a_{2p-2,1}| + \frac{|a_{2p-2,0}|}{1 - |a_{2p-1,1}| + \dfrac{|a_{2p-1,0}|}{g_{2p-1,0}}} \ge \\ \ge g_{2p-3,0}.\end{gathered}$$

Продовжуючи аналогічно, одержимо

$$\begin{gathered}1 - \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} \le \tilde{Q}^{(2k)}_{2p,0} = 1 + F^{(k)}_{2p,0} + \\ + \frac{|a_{2p+1,0}|}{|\tilde{Q}^{(2k-1)}_{2p+1,0}|} \le 1 - |a_{2p+1,1}| + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}, \\ p = 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots,\end{gathered} \tag{35}$$

$$\begin{gathered}-\tilde{Q}^{(2k+1)}_{2p-1,0} \ge \frac{|a_{2p,0}|}{1 - |a_{2p+1,1}| + \dfrac{a_{2p+1,0}}{g_{2p+1,0}}} - \\ -1 - F^{(k)}_{2p-1,0} \ge \frac{|a_{2p,0}|}{1 - |a_{2p+1,1}| + \dfrac{a_{2p+1,0}}{g_{2p+1,0}}} - \\ -1 + |a_{2p,1}| \ge g_{2p-1,0}, \\ p = 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots,\end{gathered} \tag{36}$$

Діючи у той самий спосіб, доходимо висновку, що

$$\begin{gathered}1 - \frac{|a_{1,2p+1}|}{g_{1,2p+1}} \le \tilde{Q}^{(2k)}_{0,2p} \le 1 - |a_{1,2p+1}| + \\ + \frac{|a_{0,2p+1}|}{g_{0,2p+1}},\ -\tilde{Q}^{(2k+1)}_{0,2p-1} \ge g_{0,2p-1}, \\ p = 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots,\end{gathered} \tag{37}$$

З формули (27) і нерівностей (33) випливає, що

$$\begin{gathered}F^{(p)}_{i,0} - F^{(r)}_{i,0} = -\frac{\prod\limits_{j=1}^{r+1}(-a_{i+j,j})}{\prod\limits_{j=1}^{r+1} Q^{(p-j)}_{i+j,j} \prod\limits_{j=1}^{r} Q^{(r-j)}_{i+j,j}} \le 0, \\ r = 1, 2, \ldots,\ p > r.\end{gathered}$$

отже, для довільних $i = 1, 2, \ldots$, послідовності $\{F^{(p)}_{i,0}\}$, $\{F^{(p)}_{0,i}\}$, а також $\{F^{(p)}_{0,0}\}$, незростаючі:

$$\begin{gathered}F^{(0)}_{i,0} \ge F^{(1)}_{i,0} \ge F^{(2)}_{i,0} \ge \ldots, \\ F^{(0)}_{0,i} \ge F^{(1)}_{0,i} \ge F^{(2)}_{0,i} \ge \ldots, \\ F^{(0)}_{0,0} \ge F^{(1)}_{0,0} \ge F^{(2)}_{0,0} \ge \ldots.\end{gathered} \tag{38}$$

Беручи до уваги формули (15)–(17), нерівності (35)–(38) та умови (2), (31), одержимо для $n > m$:

$$\begin{gathered}\tilde{P}^{(1)}_{2n,2m} = -\frac{\prod\limits_{j=1}^{2m}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|\tilde{Q}^{(2n-j)}_{j,0}\tilde{Q}^{(2m-j)}_{j,0}\right|} \times \\ \times \left(\left|F^{(n-m)}_{2m,0}\right| + \frac{|a_{2m+1,0}|}{\left(-|\tilde{Q}^{(2n-2m-1)}_{2m+1,0}|\right)}\right) + \\ - \sum_{i=1}^{2m-1} \frac{\left|F^{([n-i/2])}_{i,0} - F^{([m-i/2])}_{i,0}\right| \prod\limits_{j=1}^{i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left|\tilde{Q}^{(2n-j)}_{j,0}\tilde{Q}^{(2m-j)}_{j,0}\right|} \le 0,\end{gathered}$$

оскільки $\left|F^{(n-m)}_{2m,0}\right| - \dfrac{|a_{2m+1,0}|}{\left|\tilde{Q}^{(2n-2m-1)}_{2m+1,0}\right|} \ge$
$\ge |a_{2m+1,1}| - \dfrac{a_{2m+1,1}}{g_{2m+1,1}} \ge 0.$

Аналогічно, $\tilde{P}^{(2)}_{2n,2m} \le 0$. Тому

$$\begin{gathered}\tilde{f}_{2n} - \tilde{f}_{2m} = -\left|F^{(n)}_{0,0} - F^{(m)}_{0,0}\right| + \\ + \tilde{P}^{(1)}_{2n,2m} + \tilde{P}^{(2)}_{2n,2m} \le 0, \quad n > m,\end{gathered}$$

а це означає, що послідовність $\{\tilde{f}_{2p}\}$ незростаюча: $\tilde{f}_0 \ge \tilde{f}_2 \ge \tilde{f}_4 \ldots.$

Крім того, $\tilde{f}_{2p} = b_0 + F^{(p)}_{0,0} + \dfrac{|a_{1,0}|}{|\tilde{Q}^{(2p-1)}_{1,0}|} + \dfrac{|a_{0,1}|}{|\tilde{Q}^{(2p-1)}_{0,1}|} \ge b_0 - \dfrac{|a_{1,1}|}{g_{1,1}}$, тому послідовність $\{\tilde{f}_{2p}\}$ збігається.

Використовуючи описану вище методику, означення (9) залишків звичайних наближень, нерівності (30), (34), можна переконатись у правильності таких оцінок:

$$\begin{gathered}1-\frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}}\le Q^{(2k)}_{2p,0}\le 1-|a_{2p+1,1}|+\\ +\frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}},\quad -Q^{(2k-1)}_{2p-1,0}\ge g_{2p-1,0},\\ p=1,2,\ldots,\ k=1,2,\ldots,\end{gathered}\tag{39}$$

$$\begin{gathered}1-\frac{|a_{1,2p+1}|}{g_{1,2p+1}}\le Q^{(2k)}_{0,2p}\le 1-|a_{1,2p+1}|+\\ +\frac{|a_{0,2p+1}|}{g_{0,2p+1}},\quad -Q^{(2k-1)}_{0,2p-1}\ge g_{0,2p-1},\\ p=1,2,\ldots,\ k=1,2,\ldots.\end{gathered}\tag{40}$$

Враховуючи формули (18)–(20), умови (2), (31) і нерівності (34)–(40), доходимо висновку, що $f_0\ge f_2\ge\ldots\ge f_{2p}\ge b_0-\dfrac{|a_{1,1}|}{g_{1,1}}$, звідки випливає збіжність послідовності $\{f_{2p}\}$.

З формул (21)–(23), умов (2), (31) і нерівностей (35)–(40) випливає, що

$$\begin{gathered}\tilde S^{(1)}_{2n,2m}=-\frac{\prod\limits_{j=1}^{2m}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|\tilde Q^{(2n-j)}_{j,0}Q^{(2m-j)}_{j,0}\right|}\times\\ \times\left(\left|F^{(n-m)}_{2m,0}\right|+\frac{|a_{2m+1,0}|}{\tilde Q^{(2n-2m-1)}_{2m+1,0}}\right)-\\ -\sum_{i=1}^{2m-1}\frac{\left|F^{([n-i/2])}_{i,0}-F^{(2m-i)}_{i,0}\right|\prod\limits_{j=1}^{i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left|\tilde Q^{(2n-j)}_{j,0}Q^{(2m-j)}_{j,0}\right|}\le 0,\\ \tilde S^{(2)}_{2n,2m}\le 0,\\ \tilde f_{2n}-f_{2m}=-\left|F^{(n)}_{0,0}-F^{(2m)}_{0,0}\right|+\\ +\tilde S^{(1)}_{2n,2m}+\tilde S^{(2)}_{2n,2m}\le 0,\quad n\ge 2m+1,\end{gathered}$$

а з формул (24)–(26) і вказаних умов і нерівностей – $f_{2m}-\tilde f_{2l}\le 0$, $m>l$.

Отже, $\tilde f_{2n}\le f_{2m}\le\tilde f_{2l}$, $l=1,2,\ldots$, $m>l$, $n>2m$, тому $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde f_{2n}=\lim\limits_{m\to\infty}f_{2m}$. Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай елементи ГЛД (3)–(4) задовольняють умову (2) і такі умови:*

$$\begin{gathered}(1+g_{i+2k-1,2k-1})\left(1-\frac{a_{i+2k+1,2k+1}}{g_{i+2k+1,2k+1}}\right)+\\ +a_{i+2k,2k}\le 0,\ 1+a_{i+2k-1,2k-1}>0,\\ i=0,1,\ldots,k=1,2,\ldots,\end{gathered}\tag{41}$$

$$\begin{gathered}(1+g_{2k-1,i+2k-1})\left(1-\frac{a_{2k+1,i+2k+1}}{g_{2k+1,i+2k+1}}\right)+\\ +a_{2k,i+2k}\le 0,\ 1+a_{2k-1,i+2k-1}>0,\\ i=0,1,\ldots,k=1,2,\ldots,\end{gathered}\tag{42}$$

$$\begin{gathered}|a_{2p,0}|\ge\left(g_{2p-1,0}+1+\frac{|a_{2p,1}|}{g_{2p,1}}\right)\times\\ \times\left(1+\frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}}+\frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}\right),\\ p=1,2,\ldots,\end{gathered}\tag{43}$$

$$\begin{gathered}|a_{0,2p}|\ge\left(g_{0,2p-1}+1+\frac{|a_{1,2p}|}{g_{1,2p}}\right)\times\\ \times\left(1+\frac{|a_{1,2p+1}|}{g_{1,2p+1}}+\frac{|a_{0,2p+1}|}{g_{0,2p+1}}\right),\\ p=1,2,\ldots,\end{gathered}\tag{44}$$

де $g_{i,k}$, $i=0,1,\ldots$, $k=0,1,\ldots$, $i+k\ge 1$, – *додатні сталі.*

Тоді послідовності наближень парного порядку $\{\tilde f_{2n}\}$, $\{f_{2n}\}$, $n=1,2,\ldots$, *збігаються, причому* $\lim\limits_{n\to\infty}f_{2n}=\lim\limits_{m\to\infty}\tilde f_{2m}$,

$$\begin{gathered}\tilde f_{2m}\le\tilde f_{2m+2p}\le M,\ f_{2m}\le f_{2m+2}\le M,\\ m=1,2,\ldots,\ p=2,3,\ldots,\end{gathered}$$

де

$$M=b_0+\frac{|a_{1,1}|}{g_{1,1}}+\frac{|a_{1,0}|}{g_{1,0}}+\frac{|a_{0,1}|}{g_{0,1}}.\tag{45}$$

Якщо, до того ж,

$$\begin{gathered}1+a_{2p+1,0}>0,\ 1+a_{0,2p+1}>0,\\ p=1,2,\ldots,\end{gathered}\tag{46}$$

то ГЛД (3)–(4) фігурно за Siemaszko'м збігається, причому

$$\begin{gathered}\tilde f_{2m+1}\le\tilde f_{2m+2p+1}\le M,\\ m=1,2,\ldots,\ p=2,3,\ldots,\end{gathered}$$

а за додаткової умови

$$\begin{gathered}1+a_{2p+1,0}+a_{2p+1,1}>0,\\ 1+a_{0,2p+1}+a_{1,2p+1}>0,\ p=1,2,\ldots,\end{gathered}\tag{47}$$

ГЛД (3)–(4) збігається і фігурно за Siemaszko'м збігається до одної і тої ж самої границі і $f_{2m-1}\le f_{2m+1}\le M$, $m=1,2,\ldots$.

Доведення. Так само, як при доведенні теореми 1, спочатку оцінимо значення залишків різних наближень ГЛД (3)–(4).

За умов (41), (42) справджуються такі нерівності [1]:

$$0 < Q^{(p)}_{i+2k,2k} \le 1 + \frac{a_{i+2k+1,2k+1}}{g_{i+2k+1,2k+1}}, \quad Q^{(p+1)}_{i+2k-1,2k-1} \le -g_{i+2k-1,2k-1}, \quad i = 0,1,\ldots,\ k = 1,2,\ldots,\ p = 0,1,\ldots, \tag{48}$$

$$0 < Q^{(p)}_{2k,i+2k} \le 1 + \frac{a_{2k+1,i+2k+1}}{g_{2k+1,i+2k+1}}, \quad Q^{(p+1)}_{i+2k-1,2k-1} \le -g_{i+2k-1,2k-1}, \quad i = 0,1,\ldots,\ k = 1,2,\ldots,\ p = 0,1,\ldots. \tag{49}$$

Тому

$$F^{(1)}_{i,0} = a_{1,0} \le 0 = F^{(0)}_{i,0} \le F^{(n)}_{i,0} \le \frac{|a_{i+1,1}|}{g_{i+1,1}}, \quad F^{(1)}_{0,i} = a_{0,1} \le 0 = F^{(0)}_{0,i} \le F^{(n)}_{0,i} \le \frac{|a_{1,i+1}|}{g_{1,i+1}}, \quad i = 0,1,\ldots,\ n = 2,3\ldots. \tag{50}$$

$$F^{(2n+3)}_{i,0} - F^{(2n)}_{i,0} = = \frac{-\prod\limits_{k=1}^{2n+1}|a_{i+k,k}|}{(-1)^{2n+1}\prod\limits_{k=1}^{2n+1}|Q^{(2n+3-k)}_{i+k,k}|\prod\limits_{k=1}^{2n}|Q^{(2n-k)}_{i+k,k}|} > 0,$$

$$F^{(2n+3)}_{i,0} - F^{(2n+2)}_{i,0} = = \frac{-\prod\limits_{k=1}^{2n+3}|a_{i+k,k}|}{\prod\limits_{k=1}^{2n+2}|Q^{(2n+3-k)}_{i+k,k}|\prod\limits_{k=1}^{2n+2}|Q^{(2n+2-k)}_{i+k,k}|} < 0,$$

$$i = 0,1,\ldots,\ n = 0,1,\ldots.$$

отже,

$$F^{(2n)}_{i,0} \le F^{(2n+3)}_{i,0} \le F^{(2n+2)}_{i,0}, \quad i = 0,1,\ldots,\ n = 0,1,\ldots. \tag{51}$$

Аналогічно,

$$F^{(2n)}_{0,i} \le F^{(2n+3)}_{0,i} \le F^{(2n+2)}_{0,i}, \quad i = 0,1,\ldots,\ n = 0,1,\ldots. \tag{52}$$

Використовуючи схему оцінювання залишків, застосовану при доведенні теореми 1, умови (43) та нерівності (50), одержимо

$$\tilde{Q}^{(0)}_{2p,0} = 1,\ -\tilde{Q}^{(1)}_{2p-1,0} \ge g_{2p-1,0},\ p = 1,2,\ldots.$$

Якщо $p > 1$, то

$$1 - |a_{2p-1,1}| \le \tilde{Q}^{(2)}_{2p-2,0} \le 1 - |a_{2p-1,1}| + + \frac{|a_{2p-1,0}|}{|g_{2p-1,0}|}, \quad -\tilde{Q}^{(3)}_{2p-3,0} \ge g_{2p-3,0}, \tag{53}$$

$$1 \le \tilde{Q}^{(2k)}_{2p,0} = 1 + F^{(k)}_{2p,0} + \frac{a_{2p+1,0}}{\tilde{Q}^{(2k-1)}_{2p+1,0}} \le \le 1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}},$$

$$-\tilde{Q}^{(2k+1)}_{2p-1,0} = \frac{|a_{2p,0}|}{\tilde{Q}^{(2k)}_{2p,0}} - 1 - F^{(k)}_{2p-1,0} \ge \ge \frac{|a_{2p,0}|}{1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}} - 1 - \frac{|a_{2p,1}|}{g_{2p,1}} \ge \ge g_{2p-1,0}, \quad p = 1,2,\ldots,\ k = 2,3,\ldots. \tag{54}$$

Діючи у той самий спосіб, можна переконатись у правильності нерівностей

$$\tilde{Q}^{(0)}_{0,2p} = 1,\ -\tilde{Q}^{(1)}_{0,2p-1} \ge g_{0,2p-1},\ p = 1,2,\ldots.$$

Якщо $p > 1$, то

$$1 - |a_{1,2p-1}| \le \tilde{Q}^{(2)}_{0,2p-2} \le 1 - |a_{1,2p-1}| + + \frac{|a_{0,2p-1}|}{|g_{0,2p-1}|}, \quad -\tilde{Q}^{(3)}_{0,2p-3} \ge g_{0,2p-3}, \tag{55}$$

$$1 \le \tilde{Q}^{(2k)}_{0,2p} \le 1 + \frac{|a_{1,2p+1}|}{g_{1,2p+1}} + \frac{|a_{0,2p+1}|}{g_{0,2p+1}}, \quad -\tilde{Q}^{(2k+1)}_{0,2p-1} \ge g_{0,2p-1}, \quad p = 1,2,\ldots,\ k = 2,3,\ldots. \tag{56}$$

Тому $\tilde{f}_{2n} \le M,\ n = 1,2,\ldots,$ де M визначається згідно з (45).

З формул (15)–(17) і нерівностей (50)–(56), з урахуванням умов (2), (43), (44) отримаємо:

$$\tilde{P}^{(1)}_{2m+2p,2m} = = \sum_{i=1}^{2m} \frac{\left(F^{([n-i/2])}_{i,0} - F^{([m-i/2])}_{i,0}\right)\prod\limits_{j=1}^{i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left|\tilde{Q}^{(2n-j)}_{j,0}\tilde{Q}^{(2m-j)}_{j,0}\right|} - - \frac{\prod\limits_{j=1}^{2m+1}|a_{j,0}|}{\tilde{Q}^{(2p-1)}_{2m+1,0}\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|\tilde{Q}^{(2m+2p-j)}_{j,0}\tilde{Q}^{(2m-j)}_{j,0}\right|} \ge 0,$$

$$\tilde{P}^{(2)}_{2m+2p,2m} \ge 0,$$

$$\tilde f_{2m+2p}-\tilde f_{2m}\geq 0,\ m=1,2,\ldots,\ p=2,3,\ldots,$$

звідки випливає, що
а) $p=2,\ m=2k-1,\ k=1,2,\ldots,$

$$\tilde f_2\leq \tilde f_6\leq\ldots\leq M,$$

послідовність $\{f_{4k-2}\}$ збігається;
б) $p=2,\ m=2k,\ k=1,2,\ldots,$

$$\tilde f_4\leq \tilde f_8\leq\ldots\leq M,$$

послідовність $\{f_{4k}\}$ збігається;
в) $p=2,\ m=6l,\ l=1,2,\ldots,$

$$\tilde f_6\leq \tilde f_{12}\leq\ldots\leq M,$$

послідовність $\{f_{6l}\}$ збігається.

Оскільки $\{\tilde f_{12n}\}\subset\{\tilde f_{6l}\}$, $\{\tilde f_{12n}\}\subset\{\tilde f_{4k}\}$, $\{\tilde f_{12n-6}\}\subset\{\tilde f_{6l}\}$, $\{\tilde f_{12n-6}\}\subset\{\tilde f_{4k-2}\}$, то

$$\lim_{l\to\infty}\tilde f_{6l}=\lim_{k\to\infty}\tilde f_{4k}=\lim_{k\to\infty}\tilde f_{4k+2}=\lim_{n\to\infty}\tilde f_{2n},$$

тобто послідовність $\{\tilde f_{2n}\}$ збігається.

Використовуючи описану вище методику, означення (9) залишків звичайних наближень (7), нерівності (50), можна переконатись у правильності таких оцінок:

$$\begin{gathered}1\leq Q^{(2k)}_{2p,0}\leq 1+\frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}}+\frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}},\\ 1\leq Q^{(2k)}_{0,2p}\leq 1+\frac{|a_{1,2p+1}|}{g_{1,2p+1}}+\frac{|a_{0,2p+1}|}{g_{0,2p+1}},\\ -Q^{(2k+1)}_{2p-1,0}\geq g_{2p-1,0},\ -Q^{(2k+1)}_{0,2p-1}\geq g_{0,2p-1},\\ p=1,2,\ldots,\ k=1,2,\ldots,\end{gathered}\tag{57}$$

$$f_{2n}\leq M,\ n=1,2,\ \ldots.$$

Беручи до уваги формули (18)–(20), нерівності (50)–(52), (57), з урахуванням умов (2), (43), доходимо висновку, що

$$P^{(1)}_{2m+2,2m}\geq 0,\ P^{(2)}_{2m+2,2m}\geq 0,$$

$$f_{2m+2}-f_{2m}\geq 0,\ m=1,2,\ldots.$$

Тому послідовність $\{f_{2m}\}$ неспадна, обмежена, отже, збіжна.

Для того, щоб переконатись у тому, що $\lim\limits_{n\to\infty}f_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde f_{2n}$, скористаємось формулами (21)–(26):

$$\begin{gathered}\tilde S^{(1)}_{4m+4,2m}=\\ =\sum_{i=1}^{2m}\frac{\left|F^{([2m+2-i/2])}_{i,0}-F^{(2m-i)}_{i,0}\right|\prod\limits_{j=1}^{i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left|\tilde Q^{(4m+4-j)}_{j,0}Q^{(2m-j)}_{j,0}\right|}+\\ +\frac{\prod\limits_{j=1}^{2m+1}|a_{j,0}|}{\tilde Q^{(2m+3)}_{2m+1,0}\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|\tilde Q^{(4m+4-j)}_{j,0}Q^{(2m-j)}_{j,0}\right|}\geq 0,\\ \tilde S^{(2)}_{4m+4,2m}\geq 0,\\ \tilde f_{4m+4}-f_{2m}=\left|F^{(2m+2)}_{0,0}-F^{(2m)}_{0,0}\right|+\\ +\tilde S^{(1)}_{4m+4,2m}+\tilde S^{(2)}_{4m+4,2m}\geq 0,\ m=1,2,\ldots,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}S^{(1)}_{4m+8,4m+4}=\\ =\sum_{i=1}^{4m+4}\frac{\left|F^{(4m+8-i)}_{i,0}-F^{([2m+2-i/2])}_{i,0}\right|\prod\limits_{j=1}^{i}|a_{j,0}|}{\prod\limits_{j=1}^{i}\left|Q^{(4m+8-j)}_{j,0}\tilde Q^{(4m+4-j)}_{j,0}\right|}-\\ -\frac{\prod\limits_{j=1}^{4m+5}|a_{j,0}|}{Q^{(3)}_{4m+5,0}\prod\limits_{j=1}^{2m}\left|\tilde Q^{(4m+4-j)}_{j,0}Q^{(4m+8-j)}_{j,0}\right|}\geq 0,\\ S^{(2)}_{4m+8,4m+4}\geq 0,\\ f_{4m+8}-\tilde f_{4m+4}=\left|F^{(4m+8)}_{0,0}-F^{(2m+2)}_{0,0}\right|+\\ +S^{(1)}_{4m+8,4m+4}+S^{(2)}_{4m+8,4m+4}\geq 0.\end{gathered}$$

Отже, $f_{2m}\leq\tilde f_{4m+4}\leq f_{4m+8}$, $m=1,2,\ldots$, тому послідовності $\{f_{2n}\}$, $\{\tilde f_{2n}\}$ збігаються до одної і тої ж самої границі.

Розглянемо тепер залишки вигляду $\tilde Q^{(r)}_{2p+1-r,0}$, $r=1,2,\ldots,2p$, за умов (41)–(44) і додаткової умови (46). Маємо:

$$\begin{gathered}\tilde Q^{(0)}_{2p+1,0}=1,\ 1\geq\tilde Q^{(1)}_{2p,0}=1+a_{2p+1,0}>0,\\ -\tilde Q^{(2)}_{2p-1,0}=\frac{|a_{2p,0}|}{\tilde Q^{(1)}_{2p,0}}-1-F^{(1)}_{2p,0}\geq\\ \geq|a_{2p,0}|+|a_{2p+1,1}|-1\geq g_{2p-1,0}.\end{gathered}\tag{58}$$

Якщо $p>1$, то

$$\begin{gathered}1-|a_{2p-1,1}|\leq\tilde Q^{(3)}_{2p-2,0}\leq 1-|a_{2p-1,1}|+\\ +\frac{|a_{2p-1,0}|}{|g_{2p-1,0}|},\quad -\tilde Q^{(4)}_{2p-3,0}\geq g_{2p-3,0},\end{gathered}\tag{59}$$

$$1 \le \tilde{Q}_{2p,0}^{(2k+1)} = 1 + F_{2p,0}^{(k)} + \frac{a_{2p+1,0}}{\tilde{Q}_{2p+1,0}^{(2k)}} \le$$
$$\le 1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}},$$
$$-\tilde{Q}_{2p-1,0}^{(2k+2)} = \frac{|a_{2p,0}|}{\tilde{Q}_{2p,0}^{(2k+1)}} - 1 - F_{2p-1,0}^{(k+1)} \ge$$
$$\ge \frac{|a_{2p,0}|}{1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}} - 1 - \frac{|a_{2p,1}|}{g_{2p,1}} \ge$$
$$\ge g_{2p-1,0}, \quad p = 1,2,\ldots,\ k = 2,3,\ldots. \tag{60}$$

Діючи у той самий спосіб, можна переконатись у правильності аналогічних нерівностей для $\tilde{Q}_{0,2p+1-r}^{(r)}$, $r = 1,2,\ldots,2p$.

Беручи до уваги нерівності (58)–(60), одержимо:

$$\tilde{P}_{2m+2p+1,2m+1}^{(1)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{2m} \left(F_{i,0}^{([m+p+(1-i)/2])} - F_{i,0}^{([m+(1-i)/2])} \right) \times$$
$$\times \frac{\prod_{j=1}^{i} |a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^{i} |\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+2p+1-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m+1-j)}|} -$$
$$- \frac{\prod_{j=1}^{2m+1} |a_{j,0}|}{\tilde{Q}_{2m+1,0}^{(2p)} \prod_{j=1}^{2m} |\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+2p+1-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m+1-j)}|} \times$$
$$\times \left(-F_{2m+1,0}^{(p)} + \frac{|a_{2m+2,0}|}{\tilde{Q}_{2m+2,0}^{(2p-1)}} \right) \ge 0,$$
$$m = 1,2,\ldots,\ p = 2,3,\ldots.$$

Аналогічно, $\tilde{P}_{2m+2p+1,2m+1}^{(2)} \ge 0$,

$$\tilde{f}_{2m+5} - \tilde{f}_{2m} = F_{0,0}^{(m+2)} - F_{0,0}^{(m)} +$$
$$\tilde{P}_{2m+5,2m}^{(1)} + \tilde{P}_{2m+5,2m}^{(2)} \ge 0,\ m = 1,2,\ldots,$$

$$\tilde{f}_{2m+2p+1} - \tilde{f}_{2m+1} = F_{0,0}^{(m+p)} - F_{0,0}^{(m)} +$$
$$+ \tilde{P}_{2m+2p+1,2m+1}^{(1)} + \tilde{P}_{2m+2p+1,2m+1}^{(2)} \ge 0,$$
$$m = 1,2,\ldots,\ p = 2,3,\ldots.$$

Крім того, $\tilde{f}_{2n+1} \le M$, $n = 1,2,\ldots$, де M визначається згідно з (45).

Знову розглянемо 3 випадки:
а) $p = 2,\ m = 2k-1,\ k = 1,2,\ldots,$

$$\tilde{f}_3 \le \tilde{f}_7 \le \ldots \le M,$$

послідовність $\{f_{4k-1}\}$ збігається;
б) $p = 2,\ m = 2k,\ k = 1,2,\ldots,$

$$\tilde{f}_5 \le \tilde{f}_9 \le \ldots \le M,$$

послідовність $\{f_{4k+1}\}$ збігається;
в) $p = 2,\ m = 6l,\ l = 1,2,\ldots,$

$$\tilde{f}_7 \le \tilde{f}_{13} \le \ldots \le M,$$

послідовність $\{f_{6l+1}\}$ збігається.

Оскільки $\{\tilde{f}_{12n+1}\} \subset \{\tilde{f}_{6l+1}\}$, $\{\tilde{f}_{12n+1}\} \subset \{\tilde{f}_{4k+1}\}$, $\{\tilde{f}_{12n-5}\} \subset \{\tilde{f}_{6l+1}\}$, $\{\tilde{f}_{12n-5}\} \subset \{\tilde{f}_{4k-1}\}$, то $\lim\limits_{l\to\infty} \tilde{f}_{6l+1} = = \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{f}_{4k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \tilde{f}_{4k+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_{2n+1}$, тобто послідовність $\{\tilde{f}_{2n+1}\}$ збігається.

Далі,

$$\tilde{P}_{2m+5,2m}^{(1)} = \frac{-\prod_{j=1}^{2m+1} |a_{j,0}|}{\tilde{Q}_{2m+1,0}^{(4)} \prod_{j=1}^{2m} |\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+5-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}|} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{2m} \left(F_{i,0}^{([m+(5-i)/2])} - F_{i,0}^{([m-i/2])} \right) \times$$
$$\times \frac{\prod_{j=1}^{i} |a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^{i} |\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+5-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m-j)}|} \ge 0,\ \tilde{P}_{2m+5,2m}^{(2)} \ge 0,$$

$$\tilde{f}_{2m+5} - \tilde{f}_{2m} = F_{0,0}^{(m+2)} - F_{0,0}^{(m)} +$$
$$+ \tilde{P}_{2m+5,2m}^{(1)} + \tilde{P}_{2m+5,2m}^{(2)} \ge 0,\ m = 1,2,\ldots, \tag{61}$$

$$\tilde{P}_{2m+10,2m+5}^{(1)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{2m+4} \left(F_{i,0}^{([m+5-i/2])} - F_{i,0}^{([m+(5-i)/2])} \right) \times$$
$$\times \frac{\prod_{j=1}^{i} |a_{j,0}|}{\prod_{j=1}^{i} |\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+10-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m+5-j)}|} +$$
$$+ \frac{\prod_{j=1}^{2m+5} |a_{j,0}|}{\left(-\tilde{Q}_{2m+5,0}^{(5)}\right) \prod_{j=1}^{2m+4} |\tilde{Q}_{j,0}^{(2m+10-j)} \tilde{Q}_{j,0}^{(2m+5-j)}|} \times$$
$$\times \left(\frac{|a_{2m+6,0}|}{\tilde{Q}_{2m+6,0}^{(4)}} - F_{2m+5,0}^{(2)} \right) \ge 0,$$
$$\tilde{P}_{2m+10,2m+5}^{(2)} \ge 0,$$

$$\tilde f_{2m+10} - \tilde f_{2m+5} = F_{0,0}^{(m+5)} - F_{0,0}^{(m+2)} + \\ +\tilde P^{(1)}_{2m+10,2m+5} + \tilde P^{(2)}_{2m+10,2m+5} \geq 0, \quad (62) \\ m = 1, 2, \ldots .$$

З нерівностей (61), (62) і збіжності послідовностей $\{\tilde f_{2k+1}\}$, $\{\tilde f_{2k}\}$, випливає рівність $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde f_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \tilde f_{2k+1}$.

Розглянемо тепер залишки вигляду $Q^{(r)}_{2p+1-r,0}$, $r = 1, 2, \ldots, 2p$, за умов (41)–(44) і додаткової умови (47). Маємо: $Q^{(0)}_{2p+1,0} = 1$,

$$1 \geq Q^{(1)}_{2p,0} = 1 + a_{2p+1,0} + a_{2p+1,1} > 0, \\ -Q^{(2)}_{2p-1,0} \geq |a_{2p,0}| - \frac{|a_{2p,1}|}{g_{2p,1}} - 1 \geq g_{2p-1,0};$$

$$1 \leq \tilde Q^{(2k+1)}_{2p,0} \leq 1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}, \\ -\tilde Q^{(2k+2)}_{2p-1,0} = \frac{|a_{2p,0}|}{\tilde Q^{(2k+1)}_{2p,0}} - 1 - F^{(2k+2)}_{2p-1,0} \geq \\ \geq \frac{|a_{2p,0}|}{1 + \frac{|a_{2p+1,1}|}{g_{2p+1,1}} + \frac{|a_{2p+1,0}|}{g_{2p+1,0}}} - 1 - \frac{|a_{2p,1}|}{g_{2p,1}} \geq \\ \geq g_{2p-1,0}, \quad p = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots .$$

Міркуючи так само, одержимо аналогічні нерівності для $Q^{(r)}_{0,2p+1-r}$, $r = 1, 2, \ldots, 2p$.

Враховуючи формули (18)–(20), умови (43), (44), нерівності (50)–(52), і оцінки залишків $Q^{(k)}_{p,0}$, $Q^{(k)}_{0,p}$, $p = 1, 2, \ldots$, $k = 0, 1, \ldots$, доходимо висновку, що

$$f_{2m+3} - f_{2m+1} = F_{0,0}^{(2m+3)} - F_{0,0}^{(2m+1)} + \\ +P^{(1)}_{2m+3,2m+1} + P^{(2)}_{2m+3,2m+1} \geq 0, \quad (63) \\ m = 1, 2, \ldots .$$

$$f_{2m+3} - f_{2m} = F_{0,0}^{(2m+3)} - F_{0,0}^{(2m)} + \\ +P^{(1)}_{2m+3,2m} + P^{(2)}_{2m+3,2m} \geq 0,\ m = 1, 2, \ldots, \quad (64)$$

$$f_{2m+6} - f_{2m+3} = F_{0,0}^{(2m+6)} - F_{0,0}^{(2m+3)} + \\ +P^{(1)}_{2m+6,2m+3} + P^{(2)}_{2m+6,2m+3} \geq 0, \quad (65) \\ m = 1, 2, \ldots .$$

Крім того,

$$f_1 < b_0 < f_{2n+1} \leq M,\ n = 1, 2, \ldots, \quad (66)$$

де M визначається згідно з (45).

З нерівностей (63), (66) випливає, що послідовність $\{f_{2k-1}\}$ неспадна, обмежена і тому збіжна.

З нерівностей (64), (65) і збіжності послідовностей $\{f_{2k-1}\}$, $\{f_{2k}\}$, випливає рівність $\lim\limits_{k\to\infty} f_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} f_{2k+1}$.

Беручи до уваги ще й рівність $\lim\limits_{k\to\infty} f_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} \tilde f_{2k}$, доходимо висновку про збіжність і фігурну збіжність ГЛД (3)–(4) до одної і тої ж самої границі. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Антонова Т. М.* Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 1. – С. 11-15.

2. *Антонова Т. М., Возна С. М.* Дослідження абсолютної та фігурно абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Математика и кибернетика – прикладные аспекты. – 2015. – 6/4(78) – С. 119-126.

3. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Про властивості деяких послідовностей наближень парного порядку двовимірних неперервних дробів // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2006. – Вип. 12-13. – С. 4-9.

4. *Антонова Т. М., Сусь О. М.* Деякі достатні умови збіжності послідовностей фігурних наближень парного і непарного порядків для двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами // Вісник Національного університету "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки. – 2009. – № 660. – С. 49-55.

5. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. — К.: Наук. думка, 1986. — 176 с.

6. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: пер. с англ. — М.: Мир, 1985. — 414 с.

7. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. — Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики, 2010. — 218 с.

8. *Murphy J., O'Donohoe M. R.* A two-variable generalization of the Stieltjes-type continued fractions // J. Comp. and Appl. Math. – 1978. – № 4. – P. 181-190.

9. *Siemaszko W. J.* Branched continued fractions for double power series // J.Comp. and Appl.Math. – 1980. – **6**, № 2. – P. 121-125.

10. *Siemaszko W. J.* On some conditions for convergence of branched continued fractions // Lecture Notes in Math. – 1981. – **888**. – P. 363-370.