УДК 517.9

©2015 р. О.Л. Півень

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ПОЧАТКОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЯВНОГО ПІВЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Встановлено теореми існування та єдиності розв'язку деяких початкових задач для неявного півлінійного абсрактного диференціального рівняння другого порядку. Результати застосовуються до рівнянь з частинними похідними не типу Ковалевської

Existence and uniqueness theorem for some initial problems for second order implicit semilinear differential-operator equation are obtained. Rezults are applied to partial differential equations, which are not equations of Kovalevskaya type.

1. Вступ Деякі задачі фізики та техніки приводять до вивчення рівняння осцилятору $\ddot{u} + 2\gamma\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$ [8, 10]. Якщо коливання вимушені, то в правій частині цього рівняння з'являється деяка нелінійна функція, що залежить від u. Коливання звукових хвиль в релаксуючому середовищі описується рівнянням типу Соболєва [1, 13], що не розв'язне відносно старшої похідної за часом – похідної другого порядку. Як зазначено в [13], виникають труднощі при дослідженні коректної розв'язності задач для цього рівняння. В абстрактній формі подібні рівняння описуються за допомоги неявного диференціально-операторного рівняння другого порядку.

У даній роботі досліджується початкова задача

$$\frac{d^2Au(t)}{dt^2} + B\frac{du(t)}{dt} + Cu(t) = f(t, u(t)), \quad \text{м.с.} \quad t \in [0, T]. \qquad (1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (Au)'(0) = y_1, \qquad (2)$$

Тут A, B, C – замкнені лінійні оператори, що діють із дійсного банахова простору X у дійсний банахів простір Y з областями визначення $D(A), D(B), D(C)$ відповідно, $D = D(A) \cap D(B) \neq \{0\}$, $f(t, x) : [0, T] \times X \to Y$. Якщо $X = Y, A = E$, E–тотожній оператор, то рівняння (1) називають *явним* , а в протилежному випадку це рівняння називають *неявним.* Якщо $\mathrm{KerA} \neq \{0\}$, то неявне рівняння (1) називається *виродженим.*

Будемо використовувати наступні позначення: $\mathcal{L}(Y, X)$–простір обмежених лінійних операторів, що діють з Y в X, $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{L}(Y, Y)$, $L_1(0, T; X)$–простір X-значних інтегрованих на $[0, T]$ функцій, $W_1^m(0, T; X)$–простір Соболєва функцій з $L_1(0, T; X)$, у яких узагальнені похідні до порядку m включно належать $L_1(0, T; X)$; $C^p([0, T], X)$, $p = 0, 1, ...$–клас X-значних функцій, p разів неперервно диференційовних на $[0, T]$, $C([0, T], X) = C^0([0, T], X)$. Будемо вважати, що функції з $W_1^m(0, T; X)$ $(m \neq 0)$ належать класу $C^{m-1}([0, T], X)$, змінівши їх значення на множині нульової міри за необхідності.

Наведемо поняття сильного та класичного розв'язку рівняння (1) з аналогією [15, п. 4.2] для явних рівнянь першого порядку. Будемо припускати, що $f(t, x)$, як функція t, належить простору $L_1(0, T; Y)$ при кожному $x \in X$. Функція $u(t) \in W_1^1(0, T; X)$ називається *сильним розв'язком* рівняння (1), якщо $Au(t) \in W_1^2(0, T; Y)$, $Bu(t) \in W_1^1(0, T; Y)$, $u(t)$ задовольняє рівняння (1) майже скрізь на $[0, T]$.

Нехай $f(t, x)$ як функція t належить простору $C([0, T], Y)$ при кожному $x \in X$. Функція $u(t) \in C^1([0, T], X)$ називається *класичним розв'язком* рівняння (1), якщо $Au(t) \in C^2([0, T], Y)$, $Bu(t) \in C^1([0, T], Y]$, $u(t)$ задовольняє рівняння (1) при будь-якому $t \in [0, T]$.

Класичним (сильним) розв'язком задачі

(1),(2) будемо називати відповідно класичний (сильний) розв'язок задачі (1),(2). Початкові умови (2) мають сенс як для класичного, так і для сильного розв'язку.

Нехай $\tilde{X}, \tilde{Y}$–комплексні оболонки просторів X, Y та $\tilde{A}, \tilde{B}$–комплексні розширення, операторів A, B [5, с. 475–480]. Розглянемо жмуток операторів $\lambda\tilde{A} + \tilde{B}$, визначений на $\tilde{D} = D(\tilde{A}) \cap D(\tilde{B})$. Цей жмуток діє у комплексних банахових просторах $\tilde{X}, \tilde{Y}$. Припускається, що для деяких сталих $C_1, C_2 > 0$ жмуток $\lambda\tilde{A} + \tilde{B}$ має резольвенту $\tilde{R}(\lambda) = (\lambda\tilde{A} + \tilde{B})^{-1} \in \mathcal{L}(\tilde{Y}, \tilde{X})$ при $|\lambda| \geq C_2$ та виконано оцінку

$$||\tilde{R}(\lambda)|| \leq C_1, \quad |\lambda| \geq C_2. \tag{3}$$

Тоді можна визначити оператор [12] $\tilde{Q}_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda|=C_2} \tilde{A}\tilde{R}(\lambda)d\lambda \in \mathcal{L}(Y)$, його звуження $Q_1 \in \mathcal{L}(Y)$ на дійсний простір Y, та оператор $Q_2 = E - Q_1 \in \mathcal{L}(Y)$. Оператори Q_1, Q_2 є обмеженими взаємно доповнюючими проекторами у просторі Y. Замкнений лінійний оператор $G = A + Q_2 B : D \to Y$ має обмежений обернений оператор $G^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$, який володіє властивостями [2]

$$AG^{-1}Q_1 = Q_1, \quad Q_2BG^{-1} = BG^{-1}Q_2 = Q_2,$$
$$Q_2AG^{-1} = AG^{-1}Q_2 = 0 \tag{4}$$

2. Теореми існування та єдиності розв'язку Існування та єдиність класичних розв'язків явних лінійних диференціально-операторних рівнянь другого порядку ($A = E$, $f(t,x)$ не залежить від x) при обмеженнях на резольвенту оператору B досліджувалось ще в монографії [7, Розділ 3, §3]. Теореми існування та єдиності класичного розв'язку початкової задачі (1), (2) для вироджених лінійних рівнянь (1) ($f(t,x)$ не залежить від x) одержані в [14, п. 6.1]. при обмеженнях на оператор-функцію $A(\lambda A + B)^{-1}$. Також згадаємо роботу [3], де досліджувались сильні розв'язки неповного півлінійного рівняння (1) другого порядку ($B = 0$), які задовольняють початкові умови $Au(0) = y_0, (Au)'(0) = y_1$. Наступна теорема містить умови розв'язності початкової задачі (1),(2) в класичному та сильному сенсі.

Теорема 1. *Нехай $D \subset D(C)$, виконано умову (3), функція $f(t,x) : [0,T] \times X \to Y$ за аргументом t належить простору $L_1(0,T;Y)$ при кожному $x \in X$ та задовольняє глобальну умову Ліпшиця*

$$||f(t,x) - f(t,u)|| \leq$$
$$\leq M||x-u|| \quad \forall x, u \in X \quad \text{м.с. } t \in [0,T] \tag{5}$$

зі сталою $M > 0$, яка не залежить від t. Тоді для будь-яких початкових векторів $u_0 \in D$, $y_1 \in Q_1(Y)$ в (2) існує єдиний сильний розв'язок $u(t)$ початкової задачі (1),(2).Якщо, додатково, функція $f(t,x) : [0,T] \times X \to Y$ за аргументом t належить простору $C([0,T],Y)$ при кожному $x \in X$, то цей розв'язок буде класичним.

Зауваження 1. *З умови Ліпшиця (5) випливає, що $f(t,u(t)) \in L_1(0,T;Y)$, якщо $u(t) \in L_1(0,T;X)$.*

Доведення Застосуємо до рівняння (1) проектори Q_1, Q_2 та скористаємось властивостями (4) оператору G^{-1}. Одержимо

$$\frac{d^2(Au(t))}{dt^2} + S\frac{d}{dt}(Au(t)) =$$
$$= Q_1(f(t,u(t)) - Cu(t)); \tag{6}$$

$$\frac{d(Q_2Bu(t))}{dt} = Q_2(f(t,u(t)) - Cu(t)), \tag{7}$$

де $S = Q_1BG^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$. В силу теореми 2.9 [15, п. 4.2] рівняння (6) з урахуванням другої початкової умови (2) еквівалентне наступному

$$\frac{d}{dt}(Au(t)) = e^{-St}y_1+$$
$$+\int\limits_0^t e^{-S(t-\tau)}Q_1(f(\tau,u(\tau)) - Cu(\tau))d\tau \tag{8}$$

Оператор-функція $W(t) = \int\limits_0^t e^{-S\tau}d\tau$ є неперервно-диференційованою на $[0,T]$ зі значеннями в $\mathcal{L}(Y)$ і є справедливою операторна тотожність $\frac{d}{dt}W(t) = e^{-St}$. Тому рівняння (8) з початковими умовами (2) записується у вигляді

$$Au(t) = Au_0 + W(t)y_1+$$

$$+\int_0^t W(t-\tau)Q_1(f(\tau,u(\tau))-Cu(\tau))d\tau \quad (9)$$

Рівняння (7) з урахуванням першої початкової умови (2) еквівалентне наступному рівнянню:

$$Q_2Bu(t)=Q_2Bu_0+$$
$$+\int_0^t Q_2(f(\tau,u(\tau))-Cu(\tau))d\tau \qquad (10)$$

У результаті додавання рівнянь (9),(10) одержимо наступне інтегральне рівняння Вольтерра відносно функції $v(t)=Gu(t)$:

$$v(t)=Gu_0+W(t)y_1+$$
$$+\int_0^t W(t-s)Q_1\{f(s,G^{-1}v(s))-CG^{-1}v(s)\}ds+$$
$$+\int_0^t Q_2\{f(s,G^{-1}v(s))-CG^{-1}v(s)\}ds \quad (11)$$

Зауважимо, що в силу вкладення $D\subset D(C)$ оператор $CG^{-1}\in\mathcal{L}(Y)$. Інтегральне рівняння (11), що розглядається у банаховому просторі $L_1(0,T;Y)$, є еквівалентним початковій задачі (1),(2). Застосовуючи до цього рівняння принцип стискаючих відображень подібно міркуванням в [6, с.13], одержимо, що рівняння (11) має єдиний розв'язок $v(t)\in L_1(0,T;Y)$. Більш того, з рівняння (11) безпосередньо випливає, що $v(t)\in W_1^1(0,T;Y)$. Оскільки $AG^{-1},BG^{-1}\in\mathcal{L}(Y)$, то $Au(t),Bu(t)\in W_1^1(0,T;Y)$. Продиференціювавши рівняння (11) з урахуванням властивостей (4), маємо

$$\frac{dv}{dt}=e^{-St}y_1+$$
$$+\int_0^t e^{-S(t-\tau)}Q_1(f(\tau,G^{-1}v(\tau))-CG^{-1}v(\tau))d\tau+$$
$$+Q_2(f(t,G^{-1}v(t))-CG^{-1}v(t)). \qquad (12)$$

Звідси, скориставшись співвідношенням $u(t)=G^{-1}v(t)$, маємо

$$\frac{d}{dt}(Au(t))=AG^{-1}\frac{dv}{dt}=AG^{-1}\Bigg(e^{-St}y_1+$$
$$+\int_0^t e^{-S(t-\tau)}Q_1(f(\tau,u(\tau))-Cu(\tau))d\tau\Bigg) \quad (13)$$

Отже, функція $Au(t)\in W_1^2(0,T;Y)$. Таким, чином функція $u(t)=G^{-1}v(t)$ – єдиний сильний розв'язок задачі (1),(2).

У випадку, коли функція $f(t,x):[0,T]\times X\to Y$ за аргументом t належить банаховому простору $C([0,T],Y)$, інтегральне рівняння Вольтерра (11) слід розв'язувати у цьому просторі. Застосовуючи, як і раніше, принцип стискаючих відображень [6, с.13], одержимо єдиний розв'язок цього рівняння $v(t)\in C([0,T],Y)$, а також властивості $u(t)=G^{-1}v(t)\in C^1([0,T],X)$, $Au(t),Bu(t)\in C^1([0,T],Y)$. Продиференціювавши рівняння (11) одержимо рівняння (13), звідки випливає $Au(t)\in C^2([0,T],Y)$. Отже, вектор-функція $u(t)$ є класичним розв'язком задачі (1),(2). Теорему повністю доведено.

Розглянемо тепер задачу Коші

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1 \qquad (14)$$

для рівняння (1). Зазначимо, що початкові умови (14), взагалі кажучи, не мають сенсу для сильних розв'язків рівняння (1), але мають сенс для класичних розв'язків. Тому будемо розглядати *розв'язок задачі Коші (1),(14) – класичний розв'язок* рівняння (1), що задовольняє початкові умови (14). Зауважимо, що в роботі [4] досліджувалось лінійне однорідне диференціально-операторне рівняння вищого порядку, для якого було введено кілька понять коректності відповідної задачі Коші та одержано різні ознаки коректності. Наведемо теорему існування та єдиності класичного розв'язку задачі Коші (1),(14).

Теорема 2. *Нехай $D\subset D(C)$, виконано обмеження (3), функция $f(t,x):[0,T]\times X\to Y$ при кожному $x\in X$ є неперервною по t та задовольняє умову Ліпшиця (5) зі сталою $M>0$, що не залежить від t. Тогда для будь-яких початкових векторів $u_0,u_1\in D$ в (14), що задовольняють умову узгодження*

$$Q_2(Bu_1+Cu_0)=Q_2f(0,u_0), \qquad (15)$$

існує єдиний розв'язок $u(t)$ задачі Коші (1),(14). Якщо додатково проекція $Q_2 f(t,x)$ є неперервно - диференційованою за сукупністю змінних на $[0,T]\times X$, то розв'язок $u(t)\in C^2([0,T],X)$ та задовольняє рівняння

$$A\frac{d^2u(t)}{dt^2}+B\frac{du(t)}{dt}+$$
$$+Cu(t)=f(t,u(t)),\ t\in[0,T]. \tag{16}$$

Доведення цієї теореми проводиться аналогічно теоремі 1, тому вкажемо на зміни, які потрібно при цьому зробити. Як і раніше, ми одержимо рівняння (6),(7). Розв'язок задачі (6),(14) подається у вигляді (пор. з (9))

$$Au(t)=Au_0+W(t)Au_1+$$
$$+\int\limits_0^t W(t-\tau)Q_1(f(\tau,u(\tau))-Cu(\tau))d\tau \tag{17}$$

Також є справедливим рівняння (10). Умову узгодження (15) одержимо після підстановки $t=0$ у рівняння (7). Після додавання рівнянь (17),(10) одержимо наступне інтегральне рівняння Вольтерра відносно функції $v(t)=Gu(t)$ (замість рівняння (11)):

$$v(t)=Gu_0+W(t)Au_1+$$
$$+\int\limits_0^t W(t-s)Q_1\{f(s,G^{-1}v(s))-CG^{-1}v(s)\}ds+$$
$$+\int\limits_0^t Q_2\{f(s,G^{-1}v(s))-CG^{-1}v(s)\}ds \tag{18}$$

Існування та єдиність розв'язку $v(t)$ рівняння (18) у банаховому просторі $C([0,T],X)$ доводиться, як і раніше, за допомоги принципу стискаючих відображень. Після цього, як і при доведенні теореми 1 перевіряється, що функція $u(t)=G^{-1}v(t)$ є розв'язком задачі Коші (1),(14).

Нехай тепер проекція $Q_2 f(t,x)$ є неперервно - диференційованою за сукупністю змінних на $[0,T]\times X$, $u(t)$– знайдений класичний розв'язок задачі (1),(14). Продиференціювавши рівняння (18) та урахувавши заміну $u(t)=G^{-1}v(t)$, маємо

$$\frac{du}{dt}=G^{-1}\Bigg(e^{-St}Au_1+$$
$$+\int\limits_0^t e^{-S(t-\tau)}Q_1(f(\tau,u(\tau))-Cu(\tau))d\tau+$$
$$+Q_2(f(t,u(t))-Cu(t))\Bigg). \tag{19}$$

Тоді з рівняння (19) випливає, що $u(t)\in C^2([0,T],X)$. Оскільки A–замкнений оператор, то звідси одержимо, що $u(t)$ задовольняє рівняння (16). Теорему доведено.

Зауваження 2. *Якщо рівняння (1) явне, то в умовах теорем 1,2 операторні коефіцієнти B,C будуть обмеженими. Дійсно, оцінка (3) при $A=E$ забезпечує обмеженість оператора B, а вкладення $D(B)\subset D(C)$ – обмеженість оператора C.*

Зауваження 3. *Теореми існування та єдиності ров'язку початкових задач для рівняння першого порядку $\frac{d}{dt}(Au(t))+Bu(t)=f(t,u(t))$ одержано у монографії [2, розділ 4], а для неповного рівняння другого порядку $\frac{d^2}{dt^2}(Au(t))+Bu(t)=f(t,u(t))$ в праці [3]. На відміну від цих теорем, у доведених теоремах 1,2 не вимагаються додаткові обмеження на константу Ліпшиця M. Тому теореми 1,2 не можуть бути одержані методом зниження порядку в рівнянні (1) та подальшим застосуванням результатів монографії [2] для рівняння першого порядку.*

3. Застосування Застосуємо абстрактні результати до наступної початково-крайової задачі:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u(t,x)+a\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x^2}\right)-$$
$$-b\frac{\partial^3u(t,x)}{\partial x^2\partial t}-c\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial x^2}=f(t,x,u(t,x)), \tag{20}$$
$$t\in[0,T],\ x\in[0,\pi];$$
$$u(t,0)=u(t,\pi)=0 \tag{21}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u(t,x) + a\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)|_{t=0} = y_1(x) \tag{23}$$

Тут a, b, c–додатні сталі, функція $f(t,x,y) : [0,T] \times [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Рівняння (20) при $f(t,x,y) \equiv 0$ описує [1, с. 85–87] поширення звукових хвиль у релаксаційному середовищі, невідома функція $u(t,x)$ позначає щільність середовища. Фізичне обгрунтування додатності сталої a наведено в [9, с. 438].

Будь-яку функцію $v : x, t \to v(t,x)$ будемо також розглядати як функцію t зі значеннями в просторі функцій змінної x та записувати як $v(t)(x)$. Припускається, що при кожному фіксованому $y \in \mathbb{R}$ функція $f(t,x,y) = f(t,y)(x)$ як функція t приймає значення в $L_2(0,\pi)$, елемент $f(t,y)(x)$ належить простору $L_1(0,T; L_2(0,\pi))$ та функція $f(t,x,y)$ для деякої сталої $M > 0$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця

$$|f(t,x,y) - f(t,x,z)| \le M|y-z|, \quad \forall y,z \in \mathbb{R} \tag{24}$$

$$\text{при майже всіх} \quad t \in [0,T],\ x \in [0,\pi]$$

У дійсному гільбертовому просторі $X = Y = L_2(0,\pi)$ початково-крайова задача (20)–(23) записується в абстрактній формі (1),(2) з диференціальними операторами

$$Ag(x) = g(x) + a\frac{d^2 g(x)}{dx^2},\ Bg(x) = -b\frac{d^2 g(x)}{dx^2},$$

$$Cg(x) = -c\frac{d^2 g(x)}{dx^2},\ D = D(A) = D(B) =$$

$$= D(C) = \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\pi) =$$

$$= \{g(x) \in W_2^2(0,\pi) : g(0) = g(\pi) = 0\}, \tag{25}$$

де $W_2^2(0,\pi)$ – простір Соболєва функцій з $L_2(0,\pi)$. Комплексною оболонкою простору $X = Y$ є комплексний простір $L_2(0,\pi)$. Комплексні розширення $\tilde{A}, \tilde{B}$ операторів A, B визначаються тими ж самими диференціальними виразами та крайовими умовами, що й оператори A, B (25), де $W_2^2(0,\pi)$ – комплексний простір Соболєва. Жмуток $\lambda\tilde{A} + \tilde{B}$, що визначено на $\tilde{D} = D(\tilde{A})$, має резольвенту (див. формулу (7.44) в [2]):

$$(\lambda\tilde{A} + \tilde{B})^{-1}g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n \sin nx}{\lambda(1-an^2) + bn^2},$$

$$g_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx dx,$$

$$\lambda(1-an^2) + bn^2 \ne 0,\ n = 1, 2, ...$$

Якщо $an^2 \ne 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то $\mathrm{Ker}A = \{0\}$, $\exists A^{-1} \in \mathcal{L}(L_2(0,\pi))$ та відповідно [12] $Q_1 = E, Q_2 = 0$. Тому умови теореми 1 виконано, якщо початкові функції в (22),(23) задовольняють вимоги $u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\pi), y_1(x) \in L_2(0,\pi)$.

Розглянемо випадок, коли $a = \frac{1}{m^2}$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Тоді оператор A є виродженим, $\mathrm{Ker}A = \mathrm{Lin}\{\sin mx\}$. Обчислюємо

$$Q_2 g = g_m \sin mx,\ g \in L_2(0,\pi). \tag{26}$$

Умова $y_1(x) \in Q_1(Y)$ еквівалентна співвідношенню

$$\int_0^{\pi} y_1(x)\sin mx dx = 0 \tag{27}$$

Отже, маємо наступний результат

Твердження 1. *Нехай значення функції $f(t,y)(x)$, як функції t, при фіксованих y належать простору $L_1(0,T; L_2(0,\pi))$. Припускається, що функція $f(t,x,y)$ для деякої сталої $M > 0$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця (24). Нехай в (22),(23) $u_0(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\pi)$, $y_1(x) \in L_2(0,\pi)$ та виконано одну з двох умов: 1^o $a \ne \frac{1}{m^2}, \forall m \in \mathbb{N}$, або 2^o $\exists m \in \mathbb{N} : a = \frac{1}{m^2}$ і для функції $y_1(x)$ є справедливим співвідношення (27). Тоді мішана задача (20)–(23) має єдиний сильний розв'язок $u(t)(x)$. Якщо додатково при кожному фіксованому $y \in \mathbb{R}$ елемент $f(t,y)(x)$ належить простору $C([0,T], L_2(0,\pi))$, то цей розв'язок є класичним.*

Замінимо початкову умову (23) на початкову умову

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x), \tag{28}$$

тобто розглянемо мішану задачу (20),(21),(22),(28). У наступному твердженні наведемо умови розв'язності цієї задачі

Твердження 2. *Нехай значення функції $f(t,y)(x)$, як функції t, при фіксованих y належать простору $C([0,T],L_2(0,\pi))$ та функція $f(t,x,y)$ для деякої сталої $M>0$ задовольняє глобальну умову Ліпшиця (24). Нехай в (22),(28) $u_0(x),u_1(x)\in\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,\pi)$ та виконано одну з двох умов: 1^o $a\neq\frac{1}{m^2},\forall m\in\mathbb{N}$, або 2^o $\exists m\in\mathbb{N}: a=\frac{1}{m^2}$ та функції $u_0(x),u_1(x)$ задовольняють умову узгодження*

$$\int\limits_0^\pi f(0,x,u_0(x))\sin mx dx=$$

$$=\int\limits_0^\pi (bm^2u_1(x)+cm^2u_0(x))\sin mx dx. \quad (29)$$

Тоді мішана задача (20),(21),(22),(28) має єдиний розв'язок $u(t)(x)$.

Це твердження випливає безпосередньо з теореми 2. Достатньо лише зазначити, що у випадку $a=\frac{1}{m^2}$ для введених операторів A,B,C умова узгодження (15) з урахуванням конструкції (26) спектрального проектору Q_2 переписується у вигляді (29).

Результати статті було виголошено на міжнародній науковій конференції [11].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. — М.:Наука, 1979. — 384 с.
2. *Власенко Л.А.* Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. — Днепропетровск: Системные технологии, 2006. — 272 с.
3. *Власенко Л.А.* Несвободные колебания бесконечномерного осциллятора при импульсных возмущениях // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, N 2. – С. 155-166.
4. *Власенко Л.А., Пивень А.Л., Руткас А.Г.* Признаки корректности задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, N 11. – С. 1484-1500.
5. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 744 с.
6. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.—456 с.
7. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т.1. Механика . — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.— 224 с.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т.6. Гидродинамика . — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.— 736 с.
10. *Мышкис А.Д.* Элементы теории математических моделей. — М.:КомКнига, 2007. — 192 с.
11. *Півень О.Л.* Глобальна розв'язність півлінійного диференціально-операторного рівняння другого порядку // Матеріали міжнародної наукової конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", присвяченої 80-річчю від дня народження професора В.І. Фодчука (28 –30 вересня 2016 рік).— Чернівці: 2016. – С. 85–86.
12. *Руткас А.Г.* Задача Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$ // Диф. уравнения. – 1975. – **11**, N 11 . – С. 1996-2010.
13. *Солдатов А.П., Шхануков М.Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // ДАН СССР. – 1987. – **297**, N 3. – С. 547–552.
14. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. — New-York-Basel-Hong-Kong: Marsel,Dekker,Inc.,1999. — 313 p.
15. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York, Berlin, Tokyo: Springer-Verlag, 1983 . — 279 p.