УДК 517.9

©2016 р. В.В. Могильова[1], О. Є. Лаврова[2]

[1]Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка

АПРОКСИМАЦІЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НА ВІДРІЗКУ СІМ'ЄЮ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

В роботі доведено, що сім'я функцій Белмана $V_\lambda(t_0,x)$ задачі оптимального керування на $[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ локально рівномірно збігається в $\mathbb{R}^d$ до функції Белмана $V(t_0,x)$ задачі оптимального керування на $[t_0,t_1]$, при умові, що $\sup_{t\in[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}}\mu_\lambda(t)\to 0$, при $\lambda\to 0$, де $\mu_\lambda(t)$ – функція зернистості $\mathbb{T}_\lambda$.

There is proved that the family value functions $V_\lambda(t_0,x)$ of the optimal control problem on $[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ converges locally uniformly in $\mathbb{R}^d$ to the value function $V(t_0,x)$ of the optimal control in the $[t_0,t_1]$, provided that $\sup_{t\in[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}}\mu_\lambda(t)\to 0$, with $\lambda\to 0$, where $\mu_\lambda(t)$ is the graininess function of $\mathbb{T}_\lambda$.

Вступ. Дана робота присвячена вивченню граничної поведінки розв'язку задачі оптимального керування динамічних рівнянь, заданих на сім'ї часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$, при умові, що функція зернистості μ_λ прямує до нуля, при $\lambda\to 0$. При цьому відрізок часової шкали $[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}=[t_0,t_1]\cap\mathbb{T}_\lambda$ прямує до $[t_0,t_1]$ (наприклад, в метриці Хаусдорфа) і виникає природне питання про зв'язок задач керування на часових шкалах і на $[t_0,t_1]$.

Задачі дослідження якісної поведінки розв'язків добре вивчені у випадку ейлерових часових шкал (за класифікацією [6]), тобто у випадку $\mathbb{T}_\lambda=\lambda\mathbb{Z}_+$, $\lambda>0$, при цьому рівняння на часовій шкалі переходить у різницеве рівняння. Так, в роботі [9], досліджено зв'язок між існуванням обмежених на осі розв'язків диференціальних та відповідних їм різницевих рівнянь. В роботі [10] вивчено властивість збереження коливання розв'язків при переході від диференціальних рівнянь до різницевих і навпаки.

Ключову роль в перерахованих вище роботах відіграє метод ламаних Ейлера, який гарантує близькість відповідних розв'язків диференціальних і різницевих рівнянь на скінчених часових інтервалах при малих різницевих кроках. Однак, цей метод добре працює для неперервних правих частин диференціальних рівнянь. В цьому випадку їх розв'язки є гладкими функціями, що дозволяє досить легко отримати оцінки близькості між розв'язками диференціального рівняння і його різницевою апроксимацією. Але в задачах оптимального керування, про які йде мова в даній роботі, праві частини систем залежать від параметра керування – функції $u(t)$, яка, взагалі кажучи, є тільки вимірною. Тому розв'язок диференціального рівняння є лише абсолютно неперервною функцією, що значно ускладнює процедуру отримання відповідних оцінок близькості.

З цього приводу відзначимо роботи [12]–[14], де отримані оцінки близькості між розв'язками диференціальних рівнянь і їх різницевими апроксимаціями з використанням техніки опуклого аналізу. Маючи такі оцінки автори довели збіжність функцій Белмана задач оптимального керування для різницевих схем до функцій Белмана задач оптимального керування відповідних диференціальних рівнянь, коли крок апроксимації прямує до нуля.

Наша робота узагальнює результати [12]–[14] про граничну поведінку функції Белмана на випадок загальних часових шкал. Однак, у зв'язку зі складністю топологічної структури часової шкали, методи дослідження тут інші. Основну трудність тут становить доведення рівномірної збіжності розв'язку задачі Коші на $[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ до розв'язку відповідної задачі Коші на $[t_0,t_1]$. Ця складність викликана двома причинами: по-перше, праві частини наших рівнянь не є кусково неперервними, а, по-друге, на відміну від [12]–[14], ми маємо справу з більш складною часовою шкалою ніж ейлерова.

Сама робота складається зі вступу і трьох розділів. В першому розділі приведені основні поняття, пов'язані з теорією часових шкал (підрозділ 1.1) і розглядається постановка задачі (підрозділ 1.2). Другий розділ присвячений вивченню властивостей функції Белмана, за допомогою яких в третьому розділі встановлено основний результат роботи про збіжність функції Белмана.

1.1 Основні поняття, пов'язані з теорією часових шкал.

Нехай $\mathbb{T}$ – часова шкала, тобто довільна, непорожня, замкнена підмножина $\mathbb{R}^1$ [15]. Для кожної підмножини A з $\mathbb{R}$ позначимо $A_{\mathbb{T}} = A\cap\mathbb{T}$. Вважаємо, що $\sup\mathbb{T} = +\infty$.

Визначимо прямий і обернений оператори стрибка $\sigma,\rho : \mathbb{T}\to\mathbb{T}$ як $\sigma(t) = \inf\{s\in\mathbb{T} \mid s > t\}$ і $\rho(t) = \sup\{s\in\mathbb{T}\mid s < t\}$. Функція зернистості $\mu : \mathbb{T}\to[0,\infty)$ визначається наступним чином $\mu(t) = \sigma(t) - t$. Точка $t\in\mathbb{T}$ називається *ліво-граничною* (*ліво-розсіяною*, *право-граничною* або *право-розсіяною*), якщо $\rho(t) = t$ ($\rho(t) < t$, $\sigma(t) = t$ або $\sigma(t) > t$). Визначимо поняття Δ–похідної.

Означення 1. *Функція $f : [a,b]_{\mathbb{T}}\to\mathbb{R}^1$ має Δ–похідну в $t\in\mathbb{T}$, якщо існує $\alpha\in\mathbb{R}^1$, що для $\varepsilon > 0$ існує окіл B точки t такий, що*

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \alpha(\sigma(t) - s)| \le \varepsilon|\sigma(t) - s|,$$

для всіх $s\in B\cap\mathbb{T}$. При цьому $f^{\Delta}(t) = \alpha$.

Позначимо через RS (SS, LS, LD) відповідно множину всіх право-розсіяних (право-граничних, ліво-розсіяних, ліво-граничних точок) з часової шкали $\mathbb{T}$.

1.2 Постановка задачі.

Опишемо коротко постановку задачі. Нехай $\mathbb{T}_\lambda$ – сім'я часових шкал таких, що $\sup\mathbb{T}_\lambda = \infty$, $\lambda\in\Lambda\subset\mathbb{R}^1$ і 0 – гранична точка Λ. Нехай для довільного $\lambda\in\Lambda$, $t_0,t_1\in\mathbb{T}_\lambda$. Позначимо $\mu_\lambda = \sup_{t\in[t_0,t_1]_{\mathbb{T}_\lambda}}\mu(t)$. Будемо вважати, що $\mu_\lambda\to 0$, при $\lambda\to 0$.

На кожній з часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$ розглянемо наступну задачу оптимального керування

$$\begin{gathered} x^{\Delta} = f(t,x(t),u(t)),\\ x(t_0) = x, \\ J_\lambda(u) = \int_{[t_0,t_1)_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t,x(t),u(t))\Delta t\to\inf . \end{gathered} \tag{1}$$

Тут $x\in\mathbb{R}^d$ – фазовий вектор, $u = u(t)$ – вектор керування, тобто Δ-вимірна функція, що приймає значення в деякому компакті $U\subset\mathbb{R}^m$.

Нехай $V_\lambda(t,x)$ – сім'я функцій Белмана задачі 1. Основний результат роботи – доведення локальної рівномірної збіжності $V_\lambda(t_0,x)$ до $V(t_0,x)$ при $\mu_\lambda\to 0$, коли $\lambda\to 0$, де $V(t_0,x)$ – функція Белмана неперервної задачі

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = f(t,x(t),u(t)),\\ x(t_0) = x,\\ J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt\to\inf . \end{gathered}$$

2. Властивості функції Белмана.

Нехай $\mathbb{T}$ – часова шкала, $\sup\mathbb{T} = +\infty$ і $t_0,t_1\in\mathbb{T}$. Нехай $Q = [t_0,t_1)_{\mathbb{T}}\times\mathbb{R}^d$, $\overline{Q} = [t_0,t_1]_{\mathbb{T}}\times\mathbb{R}^d$ – замикання множини Q, а $\partial Q = \{t_1\}\times\mathbb{R}^d$ – її границя.

Розглянемо наступну задачу оптимального керування

$$\begin{gathered} x^{\Delta} = f(t,x,u),\\ x(t_0) = x_0, \\ J(u) = \int_{[t_0,t_1)_{\mathbb{T}}} L(s,x(s),u(s))\Delta s + \Psi(x(t_1))\to\inf . \end{gathered} \tag{2}$$

Нехай $U\subset\mathbb{R}^m$ – компакт в $\mathbb{R}^m$. Для кожного $t\in[t_0,t_1)_{\mathbb{T}}$ нехай $\mathcal{U}(t) = L^{\infty}([t,t_1]_{\mathbb{T}},U)$ – множина обмежених, Δ-вимірних [5] функцій, які визначені на $[t,t_1]_{\mathbb{T}}$ і приймають значення в U. В задачі (2) допустимими будемо вважати керування $u(\cdot)\in\mathcal{U}(t_0)$. Помістимо задачу (2) в сім'ю задач

$$x^{\Delta} = f(t,x,u), \tag{3}$$

$$x(t) = x, \tag{4}$$

$$J(t,x,u) = \int_{[t_0,t_1)_{\mathbb{T}}} L(s,x(s),u(s))\Delta s + \Psi(x(t_1))\to\inf, \tag{5}$$

де $t \in [t_0, t_1)_{\mathbb{T}}$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Стандартним чином введемо функцію Белмана:

$$V(t,x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} J(t,x,u). \tag{6}$$

Відносно функцій $f : [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^d$, $L : [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \times \mathbb{R}^d \times U \to \mathbb{R}^1$ і $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ вважаємо виконаними наступні умови:

1) f – неперервна за сукупністю змінних, задовольняє глобальну умову Ліпшиця по x зі сталою K;

2) L і Ψ – неперервні за своїми аргументами функції, що задовольняють по змінній x глобальну умову Ліпшиця зі сталою K.

Відзначимо, що при виконанні умови 1) для керування з $\mathcal{U}(t)$ розв'язок задачі Коші (3)–(5) існує на всьому інтервалі $[t, t_1]_{\mathbb{T}}$ і єдиний [3].

Відносно властивостей функції Белмана справедлива теорема.

Теорема 1. *Нехай функції f, L і Ψ задовольняють умови 1) і 2). Тоді фунція Белмана є локально обмеженою і локально ліпшицевою в $\overline{Q}$.*

Доведення. Зафіксуємо $r > 0$ і розглянемо $B_r = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \le r\}$ – кулю радіуса r. Зафіксуємо $(t,x), (t,y) \in \overline{Q}$, так, щоб $x, y \in B_r$ і $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)$. Нехай $x(\cdot)$ і $y(\cdot)$ – розв'язки (3) такі, що $x(t) = x, y(t) = y$ відповідно. Тоді для $s \in [t, t_1]_{\mathbb{T}}$ маємо

$$|x(s)| \le |x| + \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} |f(s, x(s), u(s))|\, \Delta s \le$$

$$\le |x| + \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} K\, |x(s)|\, \Delta s + \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} |f(s, 0, u(s))|\, \Delta s \le$$

$$\le |x| + A + \int_{[t,s)_{\mathbb{T}}} K\, |x(s)|\, \Delta s, \tag{7}$$

для деякої сталої $A > 0$, оскільки f – неперервна, а U – компакт.

З нерівності Гроноула [4, p.257] для $s \in [t, t_1]_{\mathbb{T}}$, маємо

$$|x(t)| \le (r + A) e_K(s,t), \tag{8}$$

тут $e_K(s,t)$ – експоненціальна функція [4].

Для подальшого доведення нам потрібна наступна лема.

Лема 1. *Експоненціальна функція $e_K(t, t_0)$ – обмежена на $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ з оцінкою, що не залежить від часової шкали [4].*

Доведення. Добре відомо, що $e_K(t, t_0)$ – розв'язок задачі Коші

$$x^{\Delta} = Kx,\ x(t_0) = 1.$$

Тоді

$$x(t) = 1 + K \int_{[t_0,t)_{\mathbb{T}}} x(\tau) \Delta\tau. \tag{9}$$

Розв'язуючи (9) методом послідовних наближень, маємо:

$$|x_1(t)| \le 1 + K \int_{[t_0,t)_{\mathbb{T}}} \Delta s \le 1 + K(t - t_0).$$

Тоді з [3, Лема 3], маємо

$$|x_2(t)| \le 1 + K \int_{[t_0,t)_{\mathbb{T}}} |x_1(s)| \Delta s \le$$

$$\le 1 + K(t - t_0) + \frac{K^2 (t - t_0)^2}{2}.$$

Тоді для всіх $n \in \mathbb{N}$, отримаємо

$$|x_n(t)| \le e^{K(t - t_0)},$$

що і доводить лему 1.

З (8) і леми 1 ми маємо наступну оцінку

$$|x(t)| \le (r + A) e^{K(t_1 - t_0)} = A_1, \tag{10}$$

для $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ і $x \in B_r$. Тоді локальна обмеженість функції Белмана легко випливає з обмеженості L і Ψ для $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$, $|x| \le A_1$ і $u \in U$. Для $s \in [t, t_1]_{\mathbb{T}}$ маємо наступну оцінку

$$|x(s) - y(s)| \le |x - y| e_K(s,t). \tag{11}$$

Тоді з (11) і леми 1 ми отримаємо оцінку

$$|x(s) - y(s)| \le C_1 |x - y|, \tag{12}$$

для довільних $s \in [t, t_1]_{\mathbb{T}}$ і $x \in \mathbb{R}^d$, і деякої сталої $C_1 > 0$, що не залежить від t, x, u. Отже,

$$|J(t,x,u) - J(t,y,u)| \le$$

$$\le \int_{[t,t_1)_{\mathbb{T}}} |L(s, x(s), u(s)) - L(s, y(s), u(s))|\, \Delta s +$$

$$+ |\Psi(x(t_1)) - \Psi(y(t_1))| \le K C_1 (t_1 - t) |x - y| +$$

$$+ K C_1 |x - y| \le C_2 |x - y|. \tag{13}$$

Таким чином, з (13) випливає, що

$$|V(t,x) - V(t,y)| = |\sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} J(t,x,u) - \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} J(t,y,u)| \le$$

$$\leq \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} |J(t,x,u) - J(t,y,u)| \leq C_3|x-y|, \qquad (14)$$

Зафіксуємо $(t,x) \in \overline{Q}$, $|x| \leq r$, $\tau \in [t,t_1]_{\mathbb{T}}$ і $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t)$. Звуження $u(\cdot)$ на $[\tau, t_1]$ є елементом $\mathcal{U}(\tau)$, яке ми знову позначимо через $u(\cdot)$. Тоді з урахуванням (13) маємо

$$|J(t,x,u) - J(\tau,x,u)| \leq |J(t,x,u) - J(\tau,x(\tau),u)| +$$

$$+|J(\tau,x(\tau),u) - J(\tau,x,u)| \leq C(r)|\tau - t| + C_2|x(\tau) - x|. \qquad (15)$$

Стала $C(r)$ в силу локальної обмеженості L, звісно, залежить від r. Але

$$x(\tau) = x + \int_{[t,\tau)_{\mathbb{T}}} f(s,x(s),u(s))\Delta s,$$

тоді з обмеженості f на $t \in [t_0,t_1]_{\mathbb{T}}$, $|x| \leq r$, $u \in U$ маємо

$$|x(\tau) - x| \leq C(r)|\tau - t|.$$

Таким чином, з (15) маємо

$$|V(t,x) - V(\tau,x)| \leq \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} |J(t,x,u) - J(\tau,x,u)| \leq$$

$$\leq C(r)|\tau - t| + C_2C|\tau - t| = C_4(r)|\tau - t|. \qquad (16)$$

Тоді з (14) і (16) для (t,x) і $(s,y) \in \overline{Q}$ отримаємо

$$|V(t,x) - V(s,y)| \leq |V(t,x) - V(s,x)| +$$

$$+|V(s,x) - V(s,y)| \leq C_4(r)|t-s| + C_3|x-y|,$$

що і доводить теорему.

Зауваження 1. *Якщо функції f, L, Ψ – обмежені, то з доведення теореми в цьому випадку можна легко отримати, що функція Белмана є глобально ліпшицевою по x і t, і глобально обмеженою.*

3. Основний результат. Збіжність функції Белмана.

На кожній з часових шкал $\mathbb{T}_\lambda$ розглянемо задачу оптимального керування

$$x^\Delta = f(t,x,u), \qquad (17)$$

$$x(t_0) = x_0, \qquad (18)$$

$$J_\lambda(u) = \int_{[t_0,t_1)_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t,x(t),u(t))\Delta t \to \inf. \qquad (19)$$

Аналогічно попередньому пункту введемо сім'ю функцій Белмана $V_\lambda(t,x)$ як

$$V_\lambda(t,x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t)} J_\lambda(t,x,u).$$

В цьому пункті ми з'ясуємо умови збіжності функції Белмана $V_\lambda(t_0,x)$ до $V(t_0,x)$ функції Белмана неперервної задачі на відрізку $[t_0,t_1]$.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t),u(t)),$$

$$x(t_0) = x, \qquad (20)$$

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt \to \inf.$$

Клас допустимих керувань визначається аналогічно пункту 2. Основним результатом даного розділу є теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) *функції f, f_x і L визначені і неперервні за сукупністю змінних на $[t_0,t_1] \times R^d \times U$;*

2) *f і L в області визначення задовольняють по змінній x глобальну умову Ліпшиця зі сталою $K > 0$.*

Тоді $V_\lambda(t_0,x) \to V(t_0,x)$ локально рівномірно в $\mathbb{R}^d$ при $\mu_\lambda \to 0$, коли $\lambda \to 0$, де $V(t_0,x)$ – функція Белмана неперервної задачі (20) на $\mathbb{T}_0$.

Доведення. Не втрачая загальності вважаємо, що $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. Доведення теореми розіб'ємо на кілька етапів.

Крок 1. Візьмемо довільну часову шкалу $\mathbb{T}_\lambda$ і довільне допустиме керування $u_\lambda(t)$ на ній. Нехай $x_\lambda(t)$ – відповідна допустима траєкторія. Позначимо через $\tilde{u}_\lambda(t)$ розширення $u_\lambda(t)$ на весь відрізок $[0,1]$, побудоване наступним чином:

$$\tilde{u}_\lambda(t) = \begin{cases} u_\lambda(t), t \in [0,1]_{\mathbb{T}_\lambda} \\ u_\lambda(r), t \in [r, \sigma(r)), \end{cases} \qquad (21)$$

де $r \in \mathrm{RS}$. Побудоване таким чином керування є допустим для задачі (20). За допустимим керуванням $\tilde{u}_\lambda(t)$ побудуємо допустиму траєкторію $x(t)$ як розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\tilde{u}_\lambda(t))$$
$$x(0) = x_0.$$

Покажемо, що

$$\left|\int_{[0,1)_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t))\Delta t - \int_0^1 L(t, x(t), \tilde{u}_\lambda(t))dt\right| \to 0, \tag{22}$$

при $\lambda \to 0$.

Використовуючи аналог нерівності Гронуола на часових шкалах [4], а також лему 1, можна встановити, що для кожного $r > 0$ існує стала $C(r) > 0$, що

$$|x_\lambda(t)| \le C(r),\ t \in [0,1]_{\mathbb{T}_\lambda},\ |x(t)| \le C(r), |x_0| \le r, \tag{23}$$

де $t \in [0,1]$. Відзначимо, що оцінки (23), в силу компактності U є рівномірними за всіма допустимими керуваннями. Тому існує $C_1(r) > 0$, що

$$|L(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t))| \le C_1(r),\ |f(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t))| \le C_1(r),$$

$$|f_x(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t))| \le C_1(r),\ \forall t \in [0,1]_{\mathbb{T}_\lambda} \tag{24}$$

Тоді

$$\int_{[0,1)_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t))\Delta t =$$

$$= \int_{[0,1)_{\mathbb{T}} \setminus \mathrm{RS}} L(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t))\Delta t + \sum_{r \in \mathrm{RS}} L(r, x_\lambda(r), u_\lambda(r))\mu(r). \tag{25}$$

В силу (24), сума (скінченна або нескінченна) в (25) мажорується сумою $C_1 \sum_{r \in \mathrm{RS}} \mu_\lambda(r)$. Тоді

$$\sum_{r \in \mathrm{RS}} L(r, x_\lambda(r), u_\lambda(r))\mu(r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} L(r_k, x_\lambda(r_k), u_\lambda(r_k))\mu(r_k) +$$

$$\sum_{k=N+1} L(r_k, x_\lambda(r_k), u_\lambda(r_k))\mu(r_k). \tag{26}$$

Для кожного λ виберемо $N(\lambda)$ так, щоб

$$\sum_{k=N+1} \mu(r_k) \le \frac{\mu_\lambda}{2}. \tag{27}$$

Викинемо тепер з часової шкали ті праворозсіяні точки, що фігурують в сумі (27). Їх загальна Δ-міра не більша ніж $\frac{\mu_\lambda}{2}$. Позначимо через $A = \cup_r [r_k, \sigma(r_k))$, де об'єднання береться по всім викинутим r. Очевидно, що міра Лебега $\lambda(A) \le \frac{\mu_\lambda}{2}$. Нехай $B = [0,1] \setminus A$.

Доповнимо функцію $x_\lambda(t)$ до функції $\tilde{x}_\lambda(t)$, яка визначена на всьому інтервалі $[0,1]$ за правилом (21). Аналогічно доповнимо функцію $L(t,x,u)$ як функцію по t, визначену на $\mathbb{T}_\lambda$ до функції $\widetilde{L}(t,x,u)$, яка визначена на всьому $[0,1]$. Очевидно, що $|\widetilde{L}(t,x,u)| \le C$. Тоді згідно з [7]

$$\int_{[0,1]_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t))\Delta t = \int_0^1 \widetilde{L}(t, \tilde{x}_\lambda(t), \tilde{u}_\lambda(t))dt.$$

Тому ліва частина в (22) не перевущує

$$\left|\int_A (\widetilde{L}(t, \tilde{x}_\lambda(t), \tilde{u}_\lambda(t)) - L(t, x(t), \tilde{u}_\lambda(t)))\right| dt +$$

$$+ \left|\int_B (\widetilde{L}(t, \tilde{x}_\lambda(t), \tilde{u}_\lambda(t)) - L(t, x(t), \tilde{u}_\lambda(t)))\right| dt \le$$

$$\le C\mu_\lambda + \int_B \left|(\widetilde{L}(t, \tilde{x}_\lambda(t), \tilde{u}_\lambda(t)) - L(t, x(t), \tilde{u}_\lambda(t)))\right| dt. \tag{28}$$

Оцінимо другий доданок в (28). Множина B складається зі скінченної кількості праворозсіяних точок $(r_1, \ldots, r_N)$ і інтервалів між ними (якщо вони є), які складаються з граничних точок.

В силу оцінок (23), компактності множини U, тепер функції $f(t,x,u)$ і $L(t,x,u)$ можна розглядати лише на деякому компакті, де вони рівномірно неперервні. Тому можна вибрати $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$ так, щоб виконувались нерівності

$$|L(t,x,u) - L(s,x,u)| < \varepsilon,\ |f(t,x,u) - f(s,x,u)| < \varepsilon, \tag{29}$$

якщо $|t - s| < \varepsilon_1$. Будемо вважати також, що

$$\mu_\lambda < \varepsilon_1. \tag{30}$$

Позначимо $B_1 = B \setminus \cup_{i=1}^N [r_i, \sigma(r_i))$. Тоді

$$\int_B \widetilde{L}(t, \tilde{x}_\lambda(t), \tilde{u}_\lambda(t))dt =$$

$$= \int_{B_1} L(t, x_\lambda(t), u_\lambda(t))dt + \sum_{i=1}^N \int_{r_i}^{\sigma(r_i)} L(r_i, \tilde{x}_\lambda(t), \tilde{u}_\lambda(t))dt.$$

Звідси

$$\int_B |\widetilde{L}(t, \tilde{x}_\lambda(t), \tilde{u}_\lambda(t)) - L(t, x(t), \tilde{u}_\lambda(t))| dt \le$$

$$\le K \int_B |x_\lambda(t) - x(t)| dt + \varepsilon. \tag{31}$$

Оцінимо тепер різницю $|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)|$. Не втрачаючи загальності можна вважати, що часова шкала $\mathbb{T}_\lambda$ має наступну структуру (рис.1).

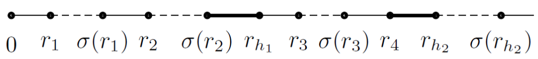

Рис. 1

Неперервною лінією позначені відрізки, що складаються з граничних точок; пунктиром позначені відрізки $[r_i, \sigma(r_i))$, де r_i – право-розсіяні точкі, що залишились; жирною лінією позначені множини, що складаються з викинутих точок (множина A).

Для інших структур часової шкали доведення аналогічне.

1) На $[0, r_1]$ маємо, що $u_\lambda(t) = \tilde{u}_\lambda(t)$, тому $\tilde{x}_\lambda(t) = x_\lambda(t)$.

2) На інтервалі $[r_1, \sigma(r_1))$ маємо, що $\tilde{x}_\lambda(t) = x_\lambda(r_1) = x(r_1)$, $\tilde{u}_\lambda(t) = u_\lambda(r_1)$. Але

$$x(t) = x(r_1) + \int_{r_1}^{t} f(s, x(s), u_\lambda(r_1))ds, \quad (32)$$

а тому при $t \in [r_1, \sigma(r_1))$ $x(t)$ – двічі гладка функція. Тому, використовуючи формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа, отримаємо

$$x(t) = x(r_1) + f(r_1, x(r_1), u_\lambda(r_1))(t - r_1) +$$

$$+ f'_x(s_1, x(s_1), u_\lambda(r_1)) \cdot f(s_1, x(s_1), u_\lambda(r_1)) \frac{(t - r_1)^2}{2}, \quad (33)$$

тут s_1 – деяка точка на $[r_1, \sigma(r_1)]$, а f'_x – матриця Якобі. З (24) випливає, що

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} |f'_x(t, x(t), u_\lambda(t)) f(t, x(t), u_\lambda(t))| \le C_1^2. \quad (34)$$

Таким чином, при $t \in [r_1, \sigma(r_1))$, отримаємо

$$|x(t) - \tilde{x}_\lambda(t)| \le \int_{r_1}^{\sigma(r_1)} |f(t, x(t), u_\lambda(r_1))| \, dt \le C_1 \mu(r_1). \quad (35)$$

Але в точці $\sigma(r_1)$ отримаємо

$$\tilde{x}_\lambda(\sigma(r_1)) = x_\lambda(r_1) + f(r_1, x_\lambda(r_1), u_\lambda(r_1))\mu(r_1) =$$

$$= x(r_1) + f(r_1, x(r_1), u_\lambda(r_1))\mu(r_1).$$

Звідси, з урахуванням (33) і (34), отримаємо

$$|x(\sigma(r_1)) - \tilde{x}_\lambda(\sigma(r_1))| \le C_1^2 \frac{\mu_\lambda^2(r_1)}{2} := \delta_1. \quad (36)$$

3) При $t \in [\sigma(r_1), r_2]$, аналогічно інтервалу $[0, r_1]$, маємо

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \delta_1 e^{K(r_2 - \sigma(r_1))} := \delta_2. \quad (37)$$

4) На $[r_2, \sigma(r_2))$, аналогічно інтервалу $[r_1, \sigma(r_1))$, отримаємо

$$|x(t) - \tilde{x}_\lambda(t)| \le \delta_2 + \mu_\lambda(r_2) C_1, \quad (38)$$

$$|x(\sigma(r_2)) - \tilde{x}_\lambda(\sigma(r_2))| \le (1 + K\mu_\lambda(r_2)) *$$

$$* \delta_2 + \frac{\mu_\lambda^2(r_2)}{2} C_1^2 := \delta_3.$$

5) На $[\sigma(r_2), r_{h_1}]$ маємо

$$|\tilde{x}(r_{h_1}) - \tilde{x}(\sigma(r_2))| \le C_1(r_{h_1} - r_2) = C_1 \mu_1,$$

$$|x(r_{h_1}) - x(\sigma(r_2))| \le C_1 \mu_1.$$

Таким чином,

$$|\tilde{x}_\lambda(r_{h_1}) - x(r_{h_1})| \le 2C_1\mu_1 + \delta_3 := \delta_4. \quad (39)$$

6) На інтервалі $[r_{h_1}, r_3]$, маємо

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \delta_4 e^{K(r_3 - r_{h_1})} := \delta_5. \quad (40)$$

7) На $[r_3, \sigma(r_3))$, отримаємо оцінки

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \delta_5 + \mu_\lambda(r_3) C_1, \quad (41)$$

$$|\tilde{x}_\lambda(\sigma(r_3)) - x(\sigma(r_3))| \le \delta_5(1 + K\mu_\lambda(r_3)) +$$

$$+ \frac{\mu_\lambda^2(r_3)}{2} C_1^2 := \delta_6. \quad (42)$$

8) Аналогічно на $[\sigma(r_3), r_4]$ маємо

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \delta_6 e^{K(r_4 - \sigma(r_3))} := \delta_7. \quad (43)$$

9) На (r_4, r_{h_2}) маємо

$$|\tilde{x}_\lambda(r_{h_2}) - x(r_{h_2})| \le \delta_7 + 2C_1\mu_2 := \delta_8.$$

10) На інтервалі $[r_{h_2}, \sigma(r_{h_2}))$, маємо

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \delta_8 + 2C_1\mu_2 + \mu_\lambda(r_{h_2}) C_1, \quad (44)$$

$$|\tilde{x}_\lambda(\sigma(r_{h_2})) - x(\sigma(r_{h_2}))| \le \delta_8(1 + K\mu_\lambda(r_{h_2})) +$$

$$+ \frac{\mu_\lambda^2(r_{h_2})}{2} C_1^2 := \delta_9 \quad (45)$$

11) На $[\sigma(r_{h_2}), r_5]$, отримаємо

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \delta_9 \cdot e^{K(r_5 - \sigma(r_{h_2}))}. \quad (46)$$

Розписуючи останню нерівність з урахуванням введених позначень, отримаємо для $t \notin [r_k, \sigma(r_k))$ наступну оцінку

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \le \Pi e^K 2C_1 \sum_i \mu_i + \frac{1}{2} \Pi C_1^2 e^K \sum_i \mu^2(r_i) \le$$

$$\leq \mu_\lambda(\Pi e^K C_1 + \frac{1}{4}\Pi C_1^2 e^K) \to 0,\ \lambda \to 0, \qquad (47)$$

де через Π ми позначили наступний вираз

$$\Pi = (1+K\mu_\lambda(r_1))(1+K\mu_\lambda(r_2))(1+K\mu_\lambda(r_3))*$$

$$*(1+K\mu_\lambda(r_{h_2}))\dots(1+K\mu_\lambda(r_N)).$$

При $t \in [r_k, \sigma(r_k))$, отримаємо оцінку

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \leq \mu_\lambda \Pi e^K (C_1 + \frac{C_1^2}{4}) + 2C_1\mu_i +$$

$$+\mu_\lambda(r_k)C_1 \leq \mu_\lambda(\Pi e^K(C_1 + \frac{C_1^2}{4}) + 3C_1). \qquad (48)$$

Тому

$$|\tilde{x}_\lambda(t) - x(t)| \to 0,\ \lambda \to 0,$$

рівномірно по всім $t \in [0,1]$.

Таким чином ми показали, що для довільної часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ і довільного допустимого керування задачі (19) $u_\lambda(t)$ на ній існує допустиме керування $\tilde{u}_\lambda(t)$ задачі (20), що

$$|J_\lambda(u_\lambda) - J(\tilde{u}_\lambda)| \to 0,\ \lambda \to 0, \qquad (49)$$

що і доводить (22).

Крок 2. Візьмемо довільне допустиме керування $u(\cdot)$ задачі (20). Покажемо, що за ним можна для кожної часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ побудувати допустиме керування $u_{ts}^\lambda(\cdot)$ задачі (19), що

$$|J(u) - J_\lambda(u_{ts}^\lambda)| \to 0,\ \lambda \to 0. \qquad (50)$$

Нехай $u_{ts}^\lambda(\cdot)$ – довільне допустиме керування задачі (19), а $x_{ts}^\lambda(\cdot)$ – відповідна допустима траєкторія. Аналогично, нехай $x(\cdot)$– допустима траєкторія задачі (20), що відповідає допустимому керуванню $u(\cdot)$. Тоді

$$\int_{[0,1)_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t, x_{ts}^\lambda(t), u_{ts}^\lambda(t))\Delta t =$$

$$= \int_{[0,1)_{\mathbb{T}} \setminus \mathrm{RS}} L(t, x_{ts}^\lambda(t), u_{ts}^\lambda(t))\Delta t + \sum_{r\in \mathrm{RS}} L(r, x_{ts}^\lambda(r), u_{ts}^\lambda(r))\mu(r). \qquad (51)$$

Для фіксованого $R > 0$, при $|x_0| \leq R$ і $t \in [0,1]_{\mathbb{T}_\lambda}$ виконані оцінки (24). Отже, сума в (51) абсолютно збігається і мажорується сумою (скінченною або нескінченною)

$$C_1 \sum_{r\in \mathrm{RS}} \mu_\lambda(r), \qquad (52)$$

незалежно від $u_{ts}^\lambda(\cdot)$. Аналогічно (26), отримаємо

$$\sum_{r\in \mathrm{RS}} L(r, x_{ts}^\lambda(r), u_{ts}^\lambda(r))\mu(r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} L(r_k, x_{ts}^\lambda(r_k), u_{ts}^\lambda(r_k))\mu(r_k) +$$

$$+ \sum_{k=N+1} L(r_k, x_{ts}^\lambda(r_k), u_{ts}^\lambda(r_k))\mu(r_k).$$

Для кожного λ знову виберемо $N(\lambda)$ так, щоб

$$\sum_{k=N+1} \mu(r_k) \leq \frac{\mu_\lambda}{2}.$$

Тоді як і раніше $A = \cup_{r=N+1}[r_k, \sigma(r_k))$, її міра Лебега $\lambda(A) \leq \frac{\mu_\lambda}{2}$. Нехай $B = [0,1]_{\mathbb{T}_\lambda} \backslash A$. Тоді для $u(\cdot)$ і $u_{ts}^\lambda(\cdot)$

$$\left| \int_0^1 L(t, x(t), u(t))dt - \int_{[0,1)_{\mathbb{T}_\lambda}} L(t, x_{ts}^\lambda(t), u_{ts}^\lambda(t))\Delta t \right| \leq$$

$$\leq \mu_\lambda + \left| \int_{[0,1]\setminus A} L(t, x(t), u(t))dt - \int_B L(t, x_{ts}^\lambda(t), u_{ts}^\lambda(t))dt \right|. \qquad (53)$$

Нехай $r_1, \dots, r_N$ – право-розсіяні точки з B. Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$ і зафіксуємо його. За теоремою Лузіна існує неперервна на $[0,1]$ функція $u_\varepsilon(t)$, що міра Лебега множини

$$A_\varepsilon = \{t \in [0,1] : u(t) \neq u_\varepsilon(t)\},\ \lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Нехай $B_\varepsilon = [0,1] \setminus A_\varepsilon$. В силу рівномірної неперервності f і L за своїми змінними на компакті $[0,1] \times \{|x| \leq C_1\} \times U$ для довільного $\varepsilon > \varepsilon_1 > 0$ існує таке $0 < \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$, що якщо $|u - u_1| < \varepsilon_2$, то

$$|f(t,x,u) - f(t,x,u_1)| + |L(t,x,u) - L(t,x,u_1)| < \varepsilon_1. \qquad (54)$$

для довільних $t \in [0,1]$ і $|x| \leq C_1$. Будемо вважати, що $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. Відмітимо, що $u_\varepsilon(t)$ – рівномірно неперервна на $[0,1]$ функція. Тому для вказаного ε_2 існує $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$, що якщо $|t-s| < \varepsilon_3$, то $|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s)| < \varepsilon_2$. Нехай тепер $\mu_\lambda < \varepsilon_3$.

Побудуємо тепер на $[0,1]$ за керуванням $u(t)$ і функцією $u_\varepsilon(t)$ нове допустиме керування u_c^λ, що враховує структуру часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$. На викинутих інтервалах, тобто в точках множини A, покладемо:

$$u_c^\lambda(t) = u(r),\ t \in [r, \sigma(r)).$$

Нехай $r_1, \dots, r_N$ – залишені право-розсіяні точки. На інтервалах $[\sigma(r_i), r_{i+1})$ покладемо

$$u_c^\lambda(t) = u(t), i = \overline{1, N-1}.$$

На $[r_i,\sigma(r_i))$, $i=\overline{1,N}$ поступаємо наступним чином:

1) якщо на $[r_i,\sigma(r_i))$ немає точок з множини B_ε, тоді $u_c^\lambda(t)=u(r_i)$.

2) якщо на $[r_i,\sigma(r_i))$ є точки з множини B_ε, то покладемо $u_c^\lambda(t)=u_\varepsilon(t_\varepsilon^i)$, тут t_ε^i – довільна точка множини $B_\varepsilon\cap[r_i,\sigma(r_i))$. Оскільки $t_\varepsilon^i\in B_\varepsilon$, то $u_\varepsilon(t_\varepsilon^i)=u(t_\varepsilon^i)\in U$, таким чином на $[r_i,\sigma(r_i))$ керування $u_c^\lambda(t)$ – допустиме.

Нехай $x_c^\lambda(t)$ – допустима траєкторія задачі (20). З побудови $u_c^\lambda(t)$ випливає, що воно є розширенням деякого допустимого керування $u_{ts}^\lambda(t)$, яке побудоване за формулою (21) на часовій шкалі $\mathbb{T}_\lambda$. Тоді, як випливає з (49)

$$|J_\lambda(u_{ts}^\lambda)-J(u_c^\lambda)|\to 0,\ \lambda\to 0. \tag{55}$$

Покажемо, що

$$|J(u)-J(u_c^\lambda)|\to 0, \lambda\to 0. \tag{56}$$

Маємо

$$\left|\int_0^1(L(t,x(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t)))dt\right|\le$$

$$\le\left|\int_{A_\varepsilon}(L(t,x(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t)))dt\right|+$$

$$+\left|\int_{B_\varepsilon}(L(t,x(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t)))dt\right|. \tag{57}$$

Перший доданок в (57) не перевищує $C_1(R)\lambda(A_\varepsilon)\le C_1(R)\varepsilon$. Оцінимо другий доданок в (57)

$$\left|\int_{B_\varepsilon}(L(t,x(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t)))dt\right|\le$$

$$\le K\int_{B_\varepsilon}|x(t)-x_c^\lambda(t)|dt+$$

$$+\int_{B_\varepsilon}\left|L(t,x_c^\lambda(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))dt\right|. \tag{58}$$

Але

$$\int_{B_\varepsilon}\left|L(t,x_c^\lambda(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))\right|dt\le$$

$$\le C_1(R)\mu_\lambda+\int_{B_\varepsilon\cap\bar{A}}\left|L(t,x_c^\lambda(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))\right|dt. \tag{59}$$

Далі

$$\int_{B_\varepsilon\cap\bar{A}}|L(t,x_c^\lambda(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))|dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{N-1}\int_{[\sigma(r_i),r_{i+1})\cap B_\varepsilon}|L(t,x_c^\lambda(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))|dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{[r_i,\sigma(r_i))\cap B_\varepsilon}|L(t,x_c^\lambda(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))|dt. \tag{60}$$

За побудовою u_c^λ перший доданок в (60) дорівнює нулю, в сумі деякі доданки також можуть дорівнювати нулю, якщо на інтервалі $[r_i,\sigma(r_i))$ немає точок з множини B_ε. Оскільки $\mu_\lambda<\varepsilon_3$, то в силу рівномірної неперервності $u_\varepsilon(t)$ і (54) сума в (60) оцінюється виразом

$$\varepsilon_1\sum_{i=1}^{N}\mu(r_i)\le\varepsilon_1. \tag{61}$$

Тоді з (58), (59) і (61) маємо

$$\int_{B_\varepsilon}|L(t,x(t),u(t))-L(t,x_c^\lambda(t),u_c^\lambda(t))|dt\le$$

$$\le K\int_{B_\varepsilon}|x(t)-x_c^\lambda(t)|dt+C_1(R)\mu_\lambda+\varepsilon_1. \tag{62}$$

Оцінимо в (62) різницю $|x(t)-x_c^\lambda(t)|$. Нехай структура часової шкали така як на рис.1. Для інших випадків викладки аналогічні.

1) На відрізку $[0,r_1]$, $u(t)=u_c^\lambda(t)$ і $x(t)=x_c^\lambda(t)$.

2) На $(r_1,\sigma(r_1)]$, маємо

$$|x(t)-x_c^\lambda(t)|\le\int_{r_1}^t K|x(s)-x_c^\lambda(s)|ds+$$

$$+\int_{[r_1,\sigma(r_1))\cap A_\varepsilon}\left|f(t,x_c^\lambda(t),u(t))-f(t,x_c^\lambda(t),u(r_1))\right|dt+$$

$$+\int_{[r_1,\sigma(r_1))\cap B_\varepsilon}\left|f(t,x_c^\lambda,u_\varepsilon(t))-f(t,x_c^\lambda(t),u_\varepsilon(t_\varepsilon^1))\right|dt\le$$

$$\le\int_{r_1}^t K|x(s)-x_c^\lambda(s)|ds+\varepsilon_1\mu(r_1)+$$

$$+2C_1(R)\lambda([r_1,\sigma(r_1))\cap A_\varepsilon),$$

в силу рівномірної неперервності f на $[0,1]\times\{|x|\le C_1\}\times U$. Тоді з нерівності Гронуола отримаємо

$$|x(t)-x_c^\lambda(t)|\le(\varepsilon\mu(r_1)+2C_1(R)*$$

$$*\lambda([r_1,\sigma(r_1))\cap A_\varepsilon))e^{K\mu(r_1)}=\delta_1e^{K\mu(r_1)}, \tag{63}$$

3) На $[\sigma(r_1), r_2]$, маємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \leq \delta_1 e^{K\mu(r_1)} e^{K(r_2-\sigma(r_1))} := \delta_2. \quad (64)$$

4) На $[r_2, \sigma(r_2))$ є точки з множини B_ε, тоді маємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \leq \delta_2 + \int_{r_2}^{t} K|x(s) - x_c^\lambda(s)|ds+$$

$$+\int_{[r_2,\sigma(r_2))\cap A_\varepsilon} \left|f(t, x_c^\lambda, u(t)) - f(t, x_c^\lambda, u_c^\lambda(t))\right| dt+$$

$$+\int_{[r_2,\sigma(r_2))\cap B_\varepsilon} \left|f(t, x_c^\lambda(t), u_\varepsilon(t)) - f(t, x_c^\lambda(t), u_c^\lambda(t_\varepsilon^2))\right| dt \leq$$

$$\leq \delta_2 + 2C_1(R)\lambda([r_2, \sigma(r_2)) \cap A_\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon_1\mu(r_2) + \int_{r_2}^{t} K|x(s) - x_c^\lambda(s)|ds.$$

Тоді

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \leq \delta_2 + 2C_1(R)\lambda([r_2, \sigma(r_2)) \cap A_\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon_1\mu(r_2))e^{K\mu(r_2)} := \delta_3. \quad (65)$$

5) На $[\sigma(r_2), r_{h_1}]$, отримаємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \leq \delta_3 + 2C_1(R)\mu_1.$$

6) Далі на $[r_{h_1}, r_3]$, матимемо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \leq (\delta_3 + 2C_1(R)\mu_1)e^{K(r_3-r_{h_1})} := \delta_4.$$

7) На $[r_3, \sigma(r_3))$ є точки з множини B_ε, тоді маємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \leq (\delta_4 + 2C_1(R)*$$

$$*\lambda([r_3, \sigma(r_3)) \cap A_\varepsilon) + \varepsilon_1\mu(r_3))e^{K\mu(r_3)} := \delta_5.$$

8) Розглянемо інтервал $[\sigma(r_3), r_{h_2})$. В силу нерівності Гроноула маємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \leq \delta_5 e^{K(r_4-\sigma(r_3))}.$$

9) На викинутому інтервалі $[r_{h_2}, r_5)$, маємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \leq \delta_5 e^{K(r_4-\sigma(r_3))} + 2C_1(R)\mu_2.$$

10) На $[r_5, \sigma(r_5))$ є точки з множини B_ε, тоді маємо

$$|x(t) - x_c^\lambda(t)| \leq (\delta_5 e^{K(r_{h_2}-\sigma(r_3))} + 2C_1(R)*$$

$$*\lambda([r_5, \sigma(r_5))\cap A_\varepsilon)+2C_1(R)\mu_2+\varepsilon_1\mu(r_5))e^{K\mu(r_5)}.$$

Розписуючи останню нерівність, з урахуванням введених позначень, для довільного $t \in [0, 1]$ ми отримаємо

$$|x(t)-x_c^\lambda(t)| \leq (\varepsilon_1 \sum_{i=1}^{N(\lambda)} \mu(r_i)+2C_1(R) \sum_{i=1}^{N(\lambda)} \lambda([r_i, \sigma(r_i))\cap A_\varepsilon)+$$

$$+C_1(R)\sum_i \mu_i)e^K \leq (\varepsilon_1 + 2C_1(R)\varepsilon + C_1(R)\mu_\lambda)e^K. \quad (66)$$

Тоді з (57)–(62) отримаємо оцінку

$$\left|\int_0^1 (L(t, x(t), u(t)) - L(t, x_c^\lambda(t), u_c^\lambda(t)))\right| dt \leq$$

$$\leq K(\varepsilon_1 + 2C_1(R)\varepsilon + C_1(R)\mu_\lambda)e^K+$$

$$+C_1(R)\mu_\lambda + \varepsilon_1 + C_1(R)\varepsilon.$$

Таким чином, в силу довільності ε і ε_1

$$|J(u) - J(u_c^\lambda)| \to 0, \lambda \to 0. \quad (67)$$

Тоді з (55) і (67) ми маємо (50), що і потрібно було показати.

В кроці 1 ми показали, що для довільної часової шкали $\mathbb{T}_\lambda$ і довільного допустимого керування задачі (19) $u_\lambda(t)$ на ній існує допустиме керування $\tilde{u}_\lambda$ задачі (20), що

$$|J_\lambda(u_\lambda) - J(\tilde{u}_\lambda)| = \varphi(\lambda) \to 0,\ \lambda \to 0.$$

Отже,

$$J(\tilde{u}_\lambda) \leq J_\lambda(u_\lambda) + \varphi(\lambda).$$

Звідси і з означення функції Белмана, маємо

$$V(0, x) \leq J_\lambda(u_\lambda) + \varphi(\lambda). \quad (68)$$

Нерівність (68) виконується для довільного допустимого керування u_λ, а отже і для інфінума по всім допустимим керуванням, тобто

$$V(0, x) \leq V_\lambda(0, x) + \varphi(\lambda). \quad (69)$$

В умовах теореми 2 справедлива теорема 1. Таким чином, сім'я функцій Белмана $V_\lambda(0, x)$ компактна в довільній кулі $|x| \leq R$, $R > 0$. Тому існує рівномірно на $|x| \leq R$ збіжна підпослідовність $V_\lambda(0, x)$, що

$$V_{\lambda_n}(0, x) \rightrightarrows V_0(0, x), \quad (70)$$

при $n \to \infty$ ($\lambda_n \to 0$).

Переходячи в (69) до границі при $\lambda_n \to 0$, маємо

$$V(0, x) \leq V_0(0, x). \quad (71)$$

Покажемо, що нерівність $V(0,x) < V_0(0,x)$ неможлива.

Дійсно, нехай

$$V(0,x) < V_0(0,x). \tag{72}$$

Тоді існує $\delta > 0$ і λ_{n_0}, що при $\lambda_n \le \lambda_{n_0}$

$$V_{\lambda_n}(0,x) > V(0,x) + \delta. \tag{73}$$

Для даного $\delta > 0$, очевидно, існує допустиме керування $u(t)$ системи (20), що

$$J(u) + \frac{\delta}{2} < V_{\lambda_n}(0,x). \tag{74}$$

Однак тоді для даного керування $u(t)$ системи (20) існує допустиме керування $u_{ts}^{\lambda_n}$ з виконанням (50). Тоді при достатньо малих λ_n маємо

$$J_{\lambda_n}(u_{ts}^{\lambda_n}) < V_{\lambda_n}(0,x),$$

що неможливо.

Отже, $V(0,x) = V_0(0,x)$. Таким чином, довільна збіжна послідовність $V_{\lambda_n}(0,x)$ має границю – $V(0,x)$. Тому в силу компактності сім'ї $V_\lambda(0,x)$ і вся послідовність $V_\lambda(0,x) \to V_0(0,x)$ при $\mu_\lambda \to 0$, коли $\lambda \to 0$, що і доводить теорему 2.

Зауваження 2. *Результат теореми 2 справедливий і для функціоналів більш загального вигляду*

$$J_\lambda(u) = \int_{[t_0,t_1)_\mathbb{T}} L(t,x(t),u(t))\Delta t + \Psi(x(t_1))$$

і відповідно

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t))dt + \Psi(x(t_1)),$$

якщо $\Psi(x)$ задовольняє для $x \in \mathbb{R}^d$ глобальну умову Ліпшиця.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Zhan Z., Wei W., Xu H.* Hamilton-Jacobi-Bellman equations on time scales // Math. Comput. Modelling. –2009. – **49**, N1. – P. 2019-2028.

2. *Lastivka I., Lavrova O.* The method of dynamic programming for systems of differential equations on time scales // Bulletin of Kyiv Shevchenko National University, –2014. –, N2. – P. 71-76. (in Ukrainian)

3. *Bourdin L., Trelat E.* General Cauchy-Lipschits theory for Δ–Cauchy problems with Caratheodory dynamics on time scales // Journal of Difference Equations and Applications. – 2014. – **20**, N4. – P. 526-547.

4. *Bohner M., Peterson A.* Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. — Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001. — 369 p.

5. *Bohner M., Peterson A.* Advances in dynamic equations on time scales. — Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2003. — 369 p.

6. Hall K., Oberste-Vorth R. Totally discrete and Eulerian time scales // Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials (S. Elaydi, J. Cushing, R. Lasser, A. Ruffing, V. Papageorgion, W. Van Assche, eds.)., World Scientific. – 2007 – P. 462-470.

7. Bohner M., Stanzhytskyi O, Bratochkina A. Stohastic dynamic equastions on general time scales // Electronic Journal of Differential Equations. – 2013. – P. 1-15.

8. Fleming W., Soner H. Controlled Markov Processes and Viscosity Solution. — Springer Science and Business Media, Inc., 2006.

9. Karpenko O., Stanzhytskyi O. The relation between the existence of bounded solutions of differential equations and the corresponding difference equations // Journal of Difference Eq. and Appl. - 2013 – **19**, N12. – P. 1967-1982.

10. Bohner M., Karpenko O., Stanzhytskyi O. Oscillation of solutions of second-order linear differential equations and corresponding difference equations // Journal of Difference Eq. and Appl. -2013 – **20**, N7. – P. 1112-1126.

11. Grune L. Asymptotic behavior of dynamical and control systems perturbation and discretization — Springer-Verlag, Berlin, 2002. —231p.

12. Capuzzo Dolcetta I. On a discrete approximation of the Hamilton-Jacobi equation of dynamic programming // Appl. Math. Optim. -1983 – **10**, – P. 1831-1847.

13. Capuzzo Dolcetta I., Ishii H. Approximate solutions of the Bellman equation of deterministic control theory // Appl. Math. Optim. -1984 – **11**, – P. 161-181.

14. Gonzalez R., Tidball M. On a discrete time approximation of the Hamilton-Jacobi equation of dynamic programming // Report de recherche, INRIA. -1991,№1375.

15. Hilger S. Ein Maßkettenkalkül mit Anvendung auf Zentrums// PhD thesis, Universität Würzburg. - 1988.