УДК 517.956.4

©2016 р. Л.М. Мельничук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

СТРУКТУРА ТА ВЛАСТИВОСТІ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРАМИ БЕССЕЛЯ

Для одного класу параболічних рівнянь другого порядку із зростаючими за змінною $x \in \mathbb{R}^k$ при $|x| \to +\infty$ коефіцієнтами та з операторами Бесселя за змінними $y \in \mathbb{R}^m_+$ знайдені в явному вигляді фундаментальні розв'язки задачі Коші та вивчені деякі їх властивості.

Fundamental solution of the Cauchy problem is found in an explicit form and some their properties are investigated for one class of parabolic second order equations with growing coefficients on a variable $x \in \mathbb{R}^k$ as $|x| \to +\infty$ and with Bessel operators on a variable $y \in \mathbb{R}^m_+$.

У даний час для рівномірно параболічних рівнянь з обмеженими коефіцієнтами достатньо повно досліджені властивості фундаментального розв'язку і коректна розв'язність задачі Коші (див. [1–3]). Для параболічних рівнянь з необмеженими коефіцієнтами аналогічні питання досліджені ще недостатньо, хоч ця тематика є популярною (див., наприклад, [2, 4–7]).

У статті [6] розглядається параболічне рівняння другого порядку

$$\partial_t u(t,x,y) = \sum_{j,l=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{x_l}(a_{jl}(t,x,y)) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u(t,x,y)) + B_y u(t,x,y),$$

$$t > 0, x \in \mathbb{R}^n, y > 0, \qquad (*)$$

де всі a_{jl} сталі, а матриця $(a_{jl})^n_{j,l=1}$ симетрична і додатно визначена; $B_y \equiv \partial_y^2 + \frac{2\nu+1}{y} dy$ – оператор Бесселя порядку $\nu \geq 0$. У цьому рівнянні коефіцієнти при перших похідних по x_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, необмежено зростають при $|x| \to +\infty$, а коефіцієнт при першій похідній по y необмежений в околі точки $y = 0$. У працях [6, 7] для рівняння $(*)$ знайдено в явному вигляді фундаментальний розв'язок, вивчено його властивості та встановлено коректну розв'язність задачі Коші в спеціальних вагових L_p-просторах.

У даній статті деякі результати поширюються на клас рівнянь з багатьма операторами Бесселя.

Нехай $\{n,k,m\} \subset \mathbb{N}$, $k \leq n$; $\mathbb{R}^m_+ \equiv \{y = (y_1,\ldots,y_n)\,|y_1 > 0,\ldots,y_m > 0\}$, $y^l \equiv y_1^l \cdot y_2^l \cdot \ldots \cdot y_m^l$; $x' \equiv (x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k$, $x'' \equiv (x_{k+1},\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$, $x \equiv (x', x'')$.

Розглянемо задачу Коші

$$\partial_t u(t,x,y) = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j} u(t,x,y) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \partial_{x_j}(x_j u(t,x,y)) + \sum_{j=1}^{m} B_{y_j} u(t,x,y),$$

$$t > 0, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m_+, \qquad (1)$$

$$u(t,x,y)\Big|_{t=0} = \varphi(x,y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m_+, \quad (2)$$

$$\partial_{y_j} u(t,x,y)\Big|_{y_j=0} = 0, t > 0,$$

$$x \in \mathbb{R}^n, j \in \{1,2,\ldots,m\}, \qquad (3)$$

де $B_{y_j} \equiv \partial^2_{y_j} + \frac{2\nu+1}{y_j}\partial_{y_j}$ – оператори Бесселя за змінними y_j порядку $\nu \geq 0$.

Визначимо обернене і пряме перетворення Фур'є-Бесселя функції w відповідно рівностями

$$F^{-1}_{\sigma\to x} F^{-1}_{B,\eta\to y}[w(\sigma,\eta)] \equiv$$

$$\equiv 2^{-2\nu m}(\Gamma(\nu+1))^{-2m}(2\pi)^{-n} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^m_+} e^{i(x,\sigma)} w(\sigma,\eta) \Big(\prod_{l=1}^{m} j_\nu(\eta_l y_l)\Big) \times$$

$$\times\eta^{2\nu+1}d\eta d\sigma,\quad x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m_+,$$

$$F_{\sigma\to x}F_{B,y\to\eta}[w(x,y)]\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m_+}e^{-i(x,\sigma)}\times$$

$$\times w(x,y)\Big(\prod_{l=1}^m j_\nu(\eta_l y_l)\Big)y^{2\nu+1}dydx,$$

$$\sigma\in\mathbb{R}^n,\eta\in\mathbb{R}^m_+,$$

де $(x,\sigma)\equiv\sum\limits_{j=1}^n x_j\sigma_j$; $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, $\alpha>0$; i – уявна одиниця; $j_\nu(z)\equiv 2^\nu\Gamma(\nu+1)z^{-\nu}J_\nu(z)$ – нормована функція Бесселя; J_ν – функція Бесселя першого роду порядку ν.

Розв'язок задачі Коші (1) – (3) шукаємо у вигляді

$$u(t,x,y)=F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[v(t,\sigma,\eta)],$$

$$t>0,x\in\mathbb{R}^n,\eta\in\mathbb{R}^m_+,\qquad(4)$$

де v – невідома функція.

Підставивши (4) в (1) і вважаючи, що всі операції законні, одержимо

$$\partial_t v(t,\sigma,\eta)+\sum_{j=1}^k\sigma_j\partial_{\sigma_j}v(t,\sigma,\eta)=$$

$$=(-|\sigma|^2-|\eta|^2)v(t,\sigma,\eta),\qquad(5)$$

$$t>0,\sigma\in\mathbb{R}^n,\eta\in\mathbb{R}^m_+.$$

Тут використана рівність з [8]

$$B_{y_j}[j_\nu(\eta_j y_j)]=-\eta_j^2 j_\nu(\eta_j y_j).$$

Далі підставимо (4) в початкову умову (2):

$$u(t,x,y)|_{t=0}=F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[v(0,\sigma,\eta)]=$$

$$=\varphi(x,y),x\in\mathbb{R}^n,y\in\mathbb{R}^m_+.$$

Припустимо, що для φ існує перетворення Фур'є-Бесселя, тоді

$$v(t,\sigma,\eta)|_{t=0}=F_{x\to\sigma}F_{B,y\to\eta}[\varphi(x,y)]\equiv$$

$$\equiv\Psi(\sigma,\eta),\sigma\in\mathbb{R}^n,\eta\in\mathbb{R}^m_+.\qquad(6)$$

Умова (3) виконується, оскільки за властивостями j_ν (див. [8])

$$\partial_{y_j}j_\nu(\eta_j y_j)\Big|_{y_j=0}=0.$$

Задачу (5), (6) для рівняння з частинними похідними першого порядку розв'яжемо методом характеристик. Відповідна система характеристичних рівнянь така:

$$\frac{dt}{1}=\frac{d\sigma_1}{\sigma_1}=\dots=\frac{d\sigma_k}{\sigma_k}=\frac{d\sigma_{k+1}}{0}=\dots=$$

$$=\frac{d\sigma_n}{0}=\frac{d\eta_j}{0}=\frac{dv}{(-|\sigma|^2-|\eta|^2)v}.$$

Розв'язавши цю систему, одержимо перші інтеграли

$$\begin{cases} C_j=\sigma_j e^{-t}, & j\in\{1,\dots,k\},\\ C_j=\sigma_j, & j\in\{k+1,\dots,n\},\\ C'_j=\eta_j, & j\in\{1,\dots,m\},\\ C_{n+1}=v(t,\sigma,\eta)\times & \\ \times\exp\Big\{\frac{|\sigma'|^2}{2}+|\sigma''|^2t+|\eta|^2t\Big\} & ,\end{cases}\qquad(7)$$

де $\sigma'\equiv(\sigma_1,\dots,\sigma_k)$, $\sigma''\equiv(\sigma_{k+1},\dots,\sigma_n)$. Задовольнимо умову (6). З останньої рівності системи (7) маємо:

$$v|_{t=0}=C_{n+1}\exp\Big\{-\frac{|\sigma'|^2}{2}\Big\}=\Psi(\sigma,\eta).$$

Оскільки $\sigma_j|_{t=0}=C_j$, $j\in\{1,\dots,n\}$, $\eta_j|_{t=0}=C'_j$, $j\in\{1,\dots,m\}$, то

$$\Psi(C_1,\dots,C_n,C'_1,\dots,C'_m)=$$

$$=C_{n+1}\exp\Big\{-\frac{C_1^2+\dots+C_k^2}{2}\Big\}.$$

Підставимо замість сталих вирази з (7). Тоді

$$C_{n+1}=\Psi(\sigma_1e^{-t},\dots,\sigma_ke^{-t},\sigma_{k+1},\dots,$$

$$\sigma_n,\eta_1,\dots,\eta_m)\times$$

$$\times\exp\Big\{\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\dots+\sigma_k^2)e^{-2t}\Big\}.$$

Підставивши цю сталу в останню рівність з системи (7), одержимо розв'язок задачі (5), (6)

$$v(t,\sigma,\eta)=\Psi(\sigma'e^{-t},\sigma'',\eta)\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{|\sigma'|^2}{2}(1-e^{-2t})-|\sigma''|^2t-|\eta|^2t\Big\},$$

$$t>0,\sigma\in\mathbb{R}^n,\eta\in\mathbb{R}^m_+.\qquad(8)$$

Далі на підставі (4) знайдемо u

$$u(t,x,y)=F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}\Big[\Psi(\sigma'e^{-t},\sigma'',\eta)\times$$

$$\times \exp\Big\{-\frac{|\sigma'|^2}{2}(1-e^{-2t})-|\sigma''|^2t-|\eta|^2t\Big\}\Big]. \quad (9)$$

Використаємо властивості згортки

$$F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[f_1(\sigma,\eta)\cdot f_2(\sigma,\eta)] =$$
$$= F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[f_1(\sigma,\eta)]\otimes$$
$$\otimes F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[f_2(\sigma,\eta)],$$

де згортка $\otimes$ визначається так:

$$(g_1\otimes g_2)(x,y)\equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m_+} T^\eta_y[g_1(x-\sigma,y)]\times$$
$$\times g_2(\sigma,\eta)\eta^{2\nu+1}d\eta d\xi,$$

а оператор узагальненого зсуву

$$T^\eta_y[f(y)]\equiv T^{\eta_1}_{y_1}[T^{\eta_2}_{y_2}[\dots[T^{\eta_m}_{y_m}[f(y)]]\dots]],$$
$$T^{\eta_j}_{y_j}[f(y)]\equiv \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\frac12)}\times$$
$$\times\int\limits_0^\pi f(\sqrt{y_j^2+\eta_j^2-2y_j\eta_j\cos\varphi})\times$$
$$\times\sin^{2\nu}\varphi d\varphi.$$

Зокрема, якщо $f(y)=\prod\limits_{j=1}^m f_j(y_j)$, то

$$T^\eta_y[f(y)]=\prod_{j=1}^m T^{\eta_j}_{y_j}[f_j(y_j)].$$

З врахуванням цих властивостей з (9) маємо

$$u(t,x,y)=F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}\Big[\exp\Big\{-\frac{|\sigma'|^2}{2}\times$$
$$\times(1-e^{-2t})-|\sigma''|^2t-|\eta|^2t\Big\}\Big]\otimes$$
$$\otimes F^{-1}_{\sigma\to x}F^{-1}_{B,\eta\to y}[\Psi(\sigma'e^{-t},\sigma'',\eta)]\equiv$$
$$\equiv W_1(t,x,y)\otimes W_2(t,x,y). \quad (10)$$

W_1 обчислюється, використовуючи відомий інтеграл Вебера з [8]

$$\int\limits_0^{+\infty}\exp\{-\eta_j^2t\}J_\nu(\eta_jy_j)\eta_j^{\nu+1}d\eta_j=$$
$$=\frac{y_j^\nu}{(2t)^{\nu+1}}\exp\Big\{-\frac{y^2}{4t}\Big\}.$$

Одержуємо

$$W_1(t,x,y)=2^{-n+\frac{k}{2}-m(2\nu+1)}\pi^{-\frac{n}{2}}\times$$
$$\times\Gamma^{-m}(\nu+1)(\sqrt{1-e^{-2t}})^{-k}\times$$
$$\times t^{-\frac{n-k}{2}-m(\nu+1)}\times$$
$$\times\exp\Big\{-\frac{|x'|^2}{2(1-e^{-2t})}-\frac{|x''|^2}{4t}-\frac{|y|^2}{4t}\Big\}. \quad (11)$$

При обчисленні W_2 проводять заміну $\beta'=\sigma'e^{-t}$, $\beta''=\sigma''$ і використовують (6). Тоді

$$W_2(t,x,y)=e^{kt}\varphi(x'e^t,x'',y). \quad (12)$$

Підставляючи (11) і (12) в (10), з урахуванням означення згортки маємо

$$u(t,x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m_+}T^\eta_y[W_1(t,x-\xi,y)]\times$$
$$\times e^{kt}\varphi(\xi'e^t,\xi'',\eta)\eta^{2\nu+1}d\eta d\xi.$$

Здійснивши в інтегралі по ξ заміну $\beta'=\xi'e^t$, $\beta''=\xi''$, одержимо розв'язок задачі (1) – (3) у вигляді інтеграла Пуассона

$$u(t,x,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m_+}G(t,x,y;0,\beta,\eta)\times$$
$$\times\varphi(\beta,\eta)\eta^{2\nu+1}d\eta d\beta,$$
$$t>0, x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m_+, \quad (13)$$

з ядром

$$G(t,x,y;0,\beta,\eta)=G_1(t,x',\beta')\times$$
$$\times G_2(t,x'',\beta'')G_3(t,y,\eta), \quad (14)$$

де

$$G_1(t,x',\beta')=(2\pi)^{-\frac{k}{2}}(\sqrt{1-e^{-2t}})^{-k}\times$$
$$\times\exp\Big\{-\frac{|x'-\beta'e^{-t}|^2}{2(1-e^{-2t})}\Big\}, \quad (15)$$
$$G_2(t,x'',\beta'')=(2\sqrt{\pi t})^{k-n}\times$$
$$\times\exp\Big\{-\frac{|x''-\beta''|^2}{4t}\Big\}, \quad (16)$$
$$G_3(t,y,\eta)=2^{-m(2\nu+1)}\Gamma^{-m}(\nu+1)\times$$

$$\times t^{-m(\nu+1)} T_y^\eta \Big[e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \Big] =$$

$$= 2^{-m(2\nu+1)} \Gamma^{-m}(\nu+1) t^{-m(\nu+1)} \times$$

$$\times \exp\Big\{ -\frac{|y|^2+|\eta|^2}{4t} \Big\} \prod_{j=1}^{m} j_\nu \Big(-i \frac{y_j \eta_j}{2t} \Big). \quad (17)$$

Якщо припускати, що φ – неперервна і обмежена в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$, то можна переконатися, що (13) справді є розв'язком задачі (1) – (3), тобто що G є фундаментальним розв'язком цієї задачі Коші. Це також випливає з того, що G_1, G_2, G_3 є фундаментальними розв'язками задач Коші відповідно для рівнянь (див. [1, 4, 6])

$$\partial_t u(t,x') = \sum_{j=1}^{k} (\partial_{x_j}^2 u(t,x') +$$

$$+ \partial_{x_j}(x_j u(t,x'))), t > 0, x' \in \mathbb{R}^k,$$

$$\partial_t u(t,x'') = \sum_{j=k+1}^{n} \partial_{x_j}^2 u(t,x''), t > 0,$$

$$x \in \mathbb{R}^{n-k},$$

$$\partial_t u(t,y) = \sum_{j=1}^{m} B_{y_j} u(t,y), t > 0, y \in \mathbb{R}_+^m.$$

Із зображень (14) – (17) випливають такі оцінки похідних фундаментального розв'язку G:

$$|\partial_x^l \partial_\beta^p G(t,x,y;0,\beta,\eta)| \le$$

$$\le C_{lp} (1-e^{-2t})^{-\frac{k+|l'|+|p'|}{2}} \times$$

$$\times t^{-\frac{n-k+|l''|+|p''|}{2} - m(\nu+1)} \times$$

$$\times \exp\Big\{ -|p'|t - c_1 \frac{|x'-\beta' e^{-t}|^2}{1-e^{-2t}} -$$

$$-c_2 \frac{|x''-\beta''|^2}{t} - c_3 \frac{|y-\eta|^2}{t} \Big\} \times$$

$$\times T_y^\eta \Big[\exp\Big\{ -\Big(\frac{1}{4} - c_3\Big) \frac{y^2}{t} \Big\} \Big],$$

де $l' = (l_1, \ldots, l_k)$, $l'' = (l_{k+1}, \ldots, l_n)$, $l = (l', l'')$, $|l'| = l_1 + \cdots + l_k$, $|l''| = l_{k+1} + \cdots + l_n$, $l_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p = (p', p'')$; C_{kp}, c_1, c_2, c_3 – додатні сталі.

Безпосередньо обчислюючи інтеграли за допомогою (14) – (17), одержуємо властивість

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}_+^m} G(t,x,y;0,\beta,\eta) \eta^{2\nu+1} d\eta d\xi = e^{kt}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.

2. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – 152. – 390 p.

3. *Эйдельман С.Д.* Параболические уравнения // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. – 1990. – Т. 63. – С. 201–313.

4. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб. – 1955. – Т. 36, № 2. – С. 299–310.

5. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

6. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник ЧНУ. Вип. 288. Математика: Зб. наук. праць. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 5–11.

7. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Задача Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник ЧНУ. Вип. 314–315. Математика: Зб. наук. праць. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 7–16.

8. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 287 с.