УДК 517.95

©2016 р. Г. П. Лопушанська, В. Р. Шумська

Львівський національний університет імені Івана Франка

ЗНАХОДЖЕННЯ ДВОХ МОЛОДШИХ КОЕФІЦІЄНТІВ У ТЕЛЕГРАФНОМУ РІВНЯННІ З ДРОБОВИМИ ПОХІДНИМИ

Встановлюємо однозначну розв'язність оберненої задачі Коші для рівняння $u_t^{(\alpha)} - r(t)u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}u - b(t)u = F_0(x)g(t)$, $(x,t) \in \mathrm{R}^n \times (0,T]$, з дробовими похідними, заданими узагальненими функціями F_0 та у правих частинах початкових умов. Задача полягає у знаходженні трійки функцій: узагальненого розв'язку u (неперервного й інтегровного за часом в узагальненому сенсі) та невідомих неперервних та інтегровних коефіцієнтів $b(t)$, $r(t)$.

We establish the unique solvability of an inverse Cauchy problem for the equation $u_t^{(\alpha)} - r(t)u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}u - b(t)u = F_0(x)g(t)$, $(x,t) \in \mathrm{R}^n \times (0,T]$, with fractional derivatives, given distributions F_0 and in right-hand sides of the initial conditions. The problem is to find the generalized solution u (continuous and integrable in time in generalized sense) and unknown continuous and integrable coefficients $b(t)$, $r(t)$.

Вступ. У [1, 2] досліджена задача Коші для певних класів параболічних рівнянь із псевдодиференціальним оператором у просторах узагальнених функцій типу Шварца. У [3–7] доведені теореми існування і єдиності, а також одержано зображення за допомогою функцій Гріна класичних розв'язків задач Коші для рівнянь із дробовою похідною за часом.

Обернені задачі для рівнянь із дробовими похідними виникають у багатьох галузях науки і техніки.

Обернені крайові задачі на визначення або головного коефіцієнта, або правої частини, або порядку дробової похідної у рівнянні, або невідомої крайової умови вивчались у [8–14] та інших працях, розв'язність прямої й оберненої задач для одного класу рівнянь із псевдодиференціальним оператором встановлено у [15]. Обернені задачі з невідомими молодшими коефіцієнтами у рівняннях із дробовими похідними мало вивчені.

У даній статті ми досліджуємо існування і єдиність розв'язку (u, r, b) оберненої задачі Коші

$$u_t^{(\alpha)} - r(t)u_t^{(\beta)} + a^2(-\Delta)^{\gamma/2}u - b(t)u = \\ = F_0(x)g(t), \quad (x,t) \in \mathrm{R}^n \times (0,T], \tag{1}$$

$$u(x,0) = F_1(x),$$

$$u_t(x,0) = F_2(x), \ x \in \mathrm{R}^n, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \big(u(\cdot,t), \varphi_1(\cdot)\big) &= \Phi_1(t), \\ \big(u(\cdot,t), \varphi_2(\cdot)\big) &= \Phi_2(t), \quad t \in (0,T] \end{aligned} \tag{3}$$

з дробовими похідними Рімана-Ліувіля $u_t^{(\alpha)}, u_t^{(\beta)}$ та $(-\Delta)^{\gamma/2}u$, визначеною з використанням перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}[(-\Delta)^{\gamma/2}u] = |\lambda|^\gamma \mathcal{F}[u]$$

при умові

(L) $\alpha \in (1,2)$, $\beta \in (0,1)$, $\gamma > \alpha$,
$\min\{n, 2, \gamma\} > (n-1)/2$,

де F_0, F_1, F_2 – задані узагальнені функції, $g, \Phi_1, \Phi_2, \varphi_1, \varphi_2$ – задані гладкі функції, через (f, φ) позначено значення узагальненої функції f на основній функції φ, a^2 – додатна стала.

Зауважимо, що однозначну розв'язність задачі Коші для рівняння (1) при $b(t) = r(t) = 0$, $t \in [0,T]$ у просторах узагальнених функцій було доведено в [16, 17], зокрема, у [17] – у просторах беселевих потенціалів при $\alpha \in (0,1]$.

1. Позначення, формулювання задачі й допоміжні результати. Нехай N – множина натуральних чисел, $\mathrm{Z}_+ = \mathrm{N} \cup 0$, $Q = \mathrm{R}^n \times (0,T]$, $n \in \mathrm{N}$, $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$ – простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями в R^n, $\mathcal{E}(\mathrm{R}^n) = C^\infty(\mathrm{R}^n)$,

$\mathcal{D}(\bar{Q})$ – простір нескінченно диференційовних функцій із компактними носіями і таких, що $(\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0$, $k \in \mathrm{Z}_+$, $\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)$ – простір функцій із $C^k(\mathrm{R}^n)$ з компактними носіями, $||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)} = \max\limits_{|\kappa|\le k} \max\limits_{x\in supp\varphi} |D^\kappa \varphi(x)|$, де $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$, $\kappa_j \in \mathrm{Z}_+$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $|\kappa| = \kappa_1 + \cdots + \kappa_n$, $D^\kappa\varphi(x) = \frac{\partial^{|\kappa|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}}$, $\mathcal{D}'(\mathrm{R}^n)$, $\mathcal{E}'(\mathrm{R}^n)$ і $\mathcal{D}'(\bar{Q})$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на $\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$, $\mathcal{E}(\mathrm{R}^n)$ і $\mathcal{D}(\bar{Q})$. Зауважимо, що $\mathcal{E}'(\mathrm{R}^n)$ – простір узагальнених функцій із компактними носіями. Нехай

$$\mathcal{D}'_+(\mathrm{R}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathrm{R}) : f = 0, t < 0\},$$
$$\mathcal{D}'_C(\bar{Q}) = \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}) : (v(\cdot,t), \varphi(\cdot)) \in C[0,T] \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)\},$$
$$\mathcal{D}'_{C,L}(Q) = \{v \in \mathcal{D}'(\bar{Q}) : (v(\cdot,t), \varphi(\cdot)) \in C(0,T] \cap L(0,T) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)\}.$$

Через $f*g$ позначаємо згортку узагальних функцій f і g, використовуємо функцію

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} \theta(t)t^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda), & \lambda > 0, \\ f'_{1+\lambda}(t), & \lambda \le 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(z)$ – гама-функція, $\theta(t)$ – функція Хевісайда. Зауважимо, що
$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$
Нагадаємо, що похідна Рімана-Ліувіля порядку $\beta > 0$ визначена формулою

$$v_t^{(\beta)}(x,t) = f_{-\beta}(t) * v(x,t),$$

а похідна Капуто – формулою
$$D_t^\alpha v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} v(\tau) d\tau$$
при $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}$.

Позначаємо
$C_{\alpha,\gamma}(Q) = \{v \in C(Q) : (-\Delta)^{\gamma/2} v, D_t^\alpha v \in C(Q)\}$,
$C_{\alpha,\gamma}(\bar{Q}) = \{v \in C_{\alpha,\gamma}(Q) \mid v, v_t \in C(\bar{Q})\}$,
$(Lv)(x,t) = v_t^{(\alpha)}(x,t) + a^2(-\Delta)^{\gamma/2} v(x,t)$,
$(L^{reg}v)(x,t) = D_t^\alpha v(x,t) + a^2(-\Delta)^{\gamma/2} v(x,t)$,
$(\widehat{L}v)(x,t) = f_{-\alpha}(t) \hat{*} v(x,t) + a^2(-\Delta)^{\gamma/2} v(x,t)$, $(x,t) \in Q$,
де при $v \in \mathcal{D}(\bar{Q})$
$$f_{-\alpha}(t) \hat{*} v(x,t) = \big(f_{-\alpha}(\tau), v(x,t+\tau)\big).$$

Правильна формула Гріна [16]:

$$\int\limits_Q v(y,\tau)(\widehat{L}\psi)(y,\tau)dyd\tau =$$
$$= \int\limits_Q (L^{reg}v)(y,\tau)\psi(y,\tau)dyd\tau -$$
$$- \int\limits_{\mathrm{R}^n} v(y,0)dy \int\limits_0^T f_{2-\alpha}(\tau)\psi_\tau(y,\tau)d\tau +$$
$$+ \int\limits_{\mathrm{R}^n} v_t(y,0)dy \int\limits_0^T f_{2-\alpha}(\tau)\psi(y,\tau)d\tau$$
$$\forall v \in C_{\alpha,\gamma}(\bar{Q}) \quad \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}).$$

Припущення:

(A1) $F_0, F_1, F_2 \in \mathcal{E}'(\mathrm{R}^n)$,
$s \in [0, \min\{(\alpha-\beta)/2, 1-\beta\})$,
$t^s g \in C[0,T]$,

(A2) $ln\, t\, \Phi_j, t^\beta\, ln\, t\, \Phi_j^{(\beta)}, t^s\, \Phi_j^{(\alpha)} \in C[0,T]$,
$\varphi_j \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$, $j = 1,2$, $d(t) :=$
$t^\beta(1 + |\, ln\, t|)[\Phi_1^{(\beta)}(t)\Phi_2(t) - \Phi_1(t)\Phi_2^{(\beta)}(t)]$,
$\inf\limits_{t\in(0,T]} |d(t)| = d_0 > 0$.

Означення 1. Трійка функцій $(u, r, b) \in U = U(T) := \mathcal{D}'_{C,L}(Q) \times (C(0,T] \cap L(0,T))^2$, яка задовольняє тотожність

$$(u, \widehat{L}\psi) = \int\limits_0^T g(t)\big(F_0(\cdot), \psi(\cdot,t)\big)dt +$$
$$+ \int\limits_0^T r(t)\big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t), \psi(\cdot,t)\big)dt +$$
$$+ \int\limits_0^T b(t)\big(u(\cdot,t), \psi(\cdot,t)\big)dt +$$
$$+ \sum_{j=1}^2 \big(F_j(x) f_{j-\alpha}(t), \psi(x,t)\big) \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}) \tag{4}$$

та умови (3), називається розв'язком задачі (1)-(3).

Зауважимо, що у подібному формулюванні в [18] встановлена однозначна розв'язність у просторі $\mathcal{D}'_C(\bar{Q}) \times C(0,T]$ задачі Коші для рівняння (1) при $b(t) = 0$ та одній додатковій умові в (3). Тут розглядаємо задачу з двома невідомими коефіцієнтами та коли регулярні дані задачі можуть мати слабкі особливості при $t = 0$.

Для доведення розв'язності задачі використовуємо метод функції Гріна.

Означення 2. Вектор-функція $\big(G_0(x,t), G_1(x,t), G_2(x,t)\big)$ така, що при достатньо регулярних g_0, g_1, g_2 функція

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathrm{R}^n} G_0(x-y,t-\tau) g_0(y,\tau) dy$$
$$+\sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathrm{R}^n} G_j(x-y,t) g_j(y) dy, \quad (x,t) \in \bar{Q} \tag{5}$$

є класичним (із $C_{\alpha,\gamma}(\bar{Q})$) розв'язком задачі Коші

$$L^{reg} u(x,t) = g_0(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u(x,0) = g_1(x), \quad u_t(x,0) = g_2(x), \quad x \in \mathrm{R}^n$$

називається вектор-функцією Гріна цієї задачі. Позначаємо

$$(\widehat{\mathcal{G}}_0 \varphi)(y,\tau) = \int\limits_\tau^T \int\limits_{\mathrm{R}^n} G_0(x-y,t-\tau)\varphi(x,t) dxdt,$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_j \varphi)(y) = \int\limits_0^T \int\limits_{\mathrm{R}^n} G_j(x-y,t)\varphi(x,t) dxdt,$$
$$j = 1,2,$$

$$(\widehat{G_j} \varphi)(y,t) = \int\limits_{\mathrm{R}^n} G_j(x-y,t)\varphi(x)\, dx,$$
$$j = 0,1,2.$$

Лема 1 [16]. Правильні наступні співвідношення:

$$G_j(x,t) = \big(f_{j-\alpha}(\tau), G_0(x,t-\tau)\big),$$
$$(x,t) \in Q, \quad j = 1,2,$$

$$(\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y,\tau) = \psi(y,\tau), \quad (y,\tau) \in \bar{Q},$$
$$(\widehat{\mathcal{G}}_j(\widehat{L}\psi))(y) = \big(f_{j-\alpha}(\tau), \psi(y,\tau)\big),$$
$$y \in \mathrm{R}^n, \quad j = 1,2, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\bar{Q}). \tag{6}$$

Лема 2. Вектор-функція Гріна задачі Коші (1), (2) існує.

Доведення. У [5, 16] одержано зображення компонент вектор-функції Гріна

$$G_0(x,t) = \frac{\pi^{-n/2} t^{\alpha-1}}{|x|^n} \times$$
$$H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\gamma}{2^\gamma a^2 t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (\alpha,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,\gamma/2) & (1,\gamma/2) \end{matrix} \right),$$

$$G_j(x,t) = \frac{\pi^{-n/2} t^{j-1}}{|x|^n} \times$$
$$H^{2,1}_{2,3}\left(\frac{|x|^\gamma}{2^\gamma a^2 t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (1,1) & (j,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,\gamma/2) & (1,\gamma/2) \end{matrix} \right),$$

$j = 1,2$, де $H^{m,n}_{p,q}\left(z \middle| \begin{matrix} (a_1,\gamma_1) & \dots & (a_p,\gamma_p) \\ (b_1,\alpha_1) & \dots & (b_q,\alpha_q) \end{matrix} \right)$ –Н-функція Фокса [19, 20].

Для функцій G_j, $j = 0,1,2$ маємо
$$a^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=n+1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i - \sum_{i=m+1}^{q} \beta_i =$$
$$= 2 - \alpha > 0,$$
$$\Delta^* = \sum_{i=1}^{q} \beta_i - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = \gamma - \alpha > 0.$$

Тому за припущення (L) за теоремою 1.1 [20] ці функції існують для всіх $x \neq 0$, $t > 0$.

Лема 3. Для всіх $k \in \mathrm{Z}_+$, мультиіндексів κ, $|\kappa| = k$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$,

$$D^\kappa_y(\widehat{G_j}\varphi) \in C(Q), \quad D^\kappa_y(\widehat{G_j}\varphi)^{(\beta)}_t \in C(Q),$$

$j = 0,1,2$, і правильні наступні оцінки:

$$\left| D^\kappa_y(\widehat{G_0}\varphi)(y,t) \right| \leq c t^{\alpha-1}(1 + |ln\, t|)||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},$$
$$\left| D^\kappa_y(\widehat{G_j}\varphi)(y,t) \right| \leq c t^{j-1}(1 + |ln\, t|)||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},$$
$$\left| D^\kappa_y(\widehat{G_0}\varphi)^{(\beta)}_t(y,t) \right| \leq$$
$$\leq c_\beta t^{\alpha-\beta-1}(1 + |ln\, t|)||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},$$
$$\left| D^\kappa_y(\widehat{G_j}\varphi)^{(\beta)}_t(y,t) \right| \leq$$
$$c_\beta t^{j-\beta-1}(1 + |ln\, t|)||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},$$
$$(y,t) \in Q, j = 1,2.$$

Тут і далі $b_i, c, c_\beta, C_i, C^*_i, c_i, c^*_i$ $(i \in \mathrm{Z}_+)$– додатні сталі.

Доведення. Лема доводиться з використанням оцінок компонент вектор-функції Гріна. Вони були отримані в роботі [16] на базі властивостей та асимптотики H-функцій Фокса [20]. Враховуючи теорему 1.7 із [20], одержано оцінки

$$|G_0(x,t)| \leq \frac{C_0 t^{\alpha-1}}{|x|^n}, \ \ |G_j(x,t)| \leq \frac{C_j t^{j-1}}{|x|^n}, \quad j=1,2 \quad \text{при} \quad |x|^\gamma > t^\alpha, \tag{7}$$

а за наслідком з теореми 1.12 [20] у випадку

$$\gamma \neq \frac{n+2l}{\sigma}, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \sigma \in \mathbb{N} \tag{8}$$

одержано оцінки при $|x|^\gamma < t^\alpha$:

$$|G_0(x,t)| \leq \frac{C_0^*}{t|x|^{n-\gamma}}, \quad \text{якщо} \quad \gamma < n, \tag{9}$$

$$|G_0(x,t)| \leq C_0^* t^{\alpha-1-n\alpha/\gamma} \quad \text{для} \quad \gamma \geq n, \tag{10}$$

$$|G_j(x,t)| \leq \frac{C_j^* t^{j-1-\alpha}}{|x|^{n-\gamma}} \quad \text{при} \quad \gamma < n, \tag{11}$$

$$|G_j(x,t)| \leq C_j^* t^{j-1-n\alpha/\gamma} \text{для} \quad \gamma \geq n, j=1,2. \tag{12}$$

У загальному випадку правильні такі ж оцінки, але з множниками $ln^N \frac{t^\alpha}{|x|^\gamma}$ при деяких натуральних N у формулах (9)–(12). Не обмежуючи загальності, далі розглядаємо випадок (8).

Із наведених оцінок випливає інтегровність функцій $G_j(x,t)$ в $\mathbb{R}^n$ для кожного $t>0$, $j=0,1,2$. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial y_i} G_j(x-y,t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} G_j(x-y,t), \quad i=1,\ldots,n, \ \ j=0,1,2$$

і подібно для похідних вищих порядків, то для всіх $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ та мультиіндексів κ

$$D^\kappa(\mathcal{G}_j \varphi)(y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t) D^\kappa \varphi(x) dx$$

за умови рівномірної збіжності інтегралів

$$v_{j,\kappa}(y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_j(x-y,t) D^\kappa \varphi(x) dx, \ j=0,1,2.$$

За цих умов з попередньої рівності одержимо, що $D^\kappa(\widehat{G}_j\varphi) \in C(Q)$ для довільного мультиіндексу κ, а отже, $\widehat{G}_j\varphi \in C^\infty(Q)$ при $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $j=0,1,2$.

Покажемо рівномірну збіжність інтегралів $v_{j,\kappa}(y,t)$ для кожного κ.

Враховуючи оцінки (7), (9) функції $G_0(x-y,t)$, фінітність та обмеженість функцій $D^\kappa \varphi(x,t)$ в Q_T, у випадку $|\kappa| = k$, $\gamma < n$ одержуємо

$$|v_{0,\kappa}(y,t)| \leq \leq \Big[\int\limits_{x:|x-y|^\gamma < t^\alpha} |G_0(x-y,t)| \cdot |D^\kappa \varphi(x)| dx + \int\limits_{x:|x-y|^\gamma > t^\alpha} |G_0(x-y,t)| \cdot |D^\kappa \varphi(x)| dx \Big] \leq$$

$$\leq d_{0,\kappa,0} \Big[\int\limits_{x:|x-y|^\gamma < t^\alpha} \frac{|D^\kappa \varphi(x)|}{t|x-y|^{n-\gamma}} dx + \int\limits_{x:|x-y|^\gamma > t^\alpha} \frac{t^{\alpha-1}|D^\kappa \varphi(x)|}{|x-y|^n} dx \Big] dt \leq$$

$$\leq d_{0,\kappa,1} \Big[\frac{1}{t} \int\limits_0^{t^{\alpha/\gamma}} r^{\gamma-1} dr + t^{\alpha-1}|ln\, t| \Big] \, ||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)}$$

$$\leq d_{0,\kappa,2} t^{\alpha-1-\varepsilon} \, ||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},$$

а з (7), (10) при $\gamma \geq n$

$$|v_{0,\kappa}(y,t)| \leq$$

$$\leq d_{0,\kappa,0} \Big[t^{\alpha-1-n\alpha/\gamma} \int\limits_{x:|x-y|^\gamma < t^\alpha} |D^\kappa \varphi(x)| dx + t^{\alpha-1} \int\limits_{x:|x-y|^\gamma > t^\alpha} \frac{|D^\kappa \varphi(x)|}{|x-y|^n} dx \Big] dt \leq$$

$$\leq d_{0,\kappa,1} \Big[t^{\alpha-1-n\alpha/\gamma} \int\limits_0^{t^{\alpha/\gamma}} r^{n-1} dr + t^{\alpha-1}|ln\, t| \Big] \, ||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)} \leq$$

$$\leq d_{0,\kappa,2} t^{\alpha-1-\varepsilon} \, ||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)} \ \ \forall \varepsilon \in (0,1).$$

Тут і далі $d_{j,\kappa,0} = \max\{C_j, C_j^*\}$, $d_{j,\kappa,k}, d_{j,\kappa,k}$ $(j=0,1,2,\ k \in \mathbb{Z}_+)$ – додатні сталі.

Аналогічно, враховуючи оцінки (7), (11) функцій $G_j(x-y,t)$, $j=1,2$, при $\gamma < n$ одержуємо

$$\Big| v_{j,\kappa}(y,t)| \le$$
$$\le |\int\limits_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha} G_j(x-y,t)D^\kappa\varphi(x)dx+$$
$$+\int\limits_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha} G_j(x-y,t)D^\kappa\varphi(x)dx\Big| \le$$
$$\le d_{j,\kappa,0}\Big[t^{j-1-\alpha}\int\limits_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha}\tfrac{|D^\kappa\varphi(x)|}{|x-y|^{n-\gamma}}dx+$$
$$+t^{j-1}\int\limits_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha}\tfrac{|D^\kappa\varphi(x)|}{|x-y|^n}dx\Big] \le$$
$$\le d_{j,\kappa,1}\Big[t^{j-1-\alpha}\int\limits_0^{t^{\alpha/\gamma}} r^{\gamma-1}dr+$$
$$+t^{j-1}\int\limits_{t^{\alpha/\gamma}}^{+\infty}|D^\kappa\varphi(x)|r^{-1}dr\Big] \le$$
$$\le d_{j,\kappa,2}t^{j-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},\ k=|\kappa|.$$

У випадку $\gamma \ge n$ з врахуванням оцінок (7), (12), матимемо

$$|v_{j,\kappa}(y,t)| \le d_{j,\kappa,0}t^{j-1}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha}\tfrac{|D^\kappa\varphi(x)|}{t^{n\alpha/\gamma}}dx+$$
$$+\int\limits_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha}\tfrac{|D^\kappa\varphi(x)|}{|x-y|^n}dx\Big] \le$$
$$\le d_{j,\kappa,1}t^{j-1}[1+|lnt|]\,||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)} \le$$
$$\le d_{j,\kappa,2}t^{j-1-\varepsilon}\,||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},\quad j=1,2.$$

Використовуючи властивість 2.3 [20]

$$H^{m,n}_{p,q}\left(\tfrac{1}{z}\middle|\begin{matrix}(a_1,\alpha_1) & \dots & (a_p,\alpha_p)\\ (b_1,\beta_1) & \dots & (b_q,\beta_q)\end{matrix}\right)=$$
$$=H^{n,m}_{q,p}\left(z\middle|\begin{matrix}(1-b_1,\beta_1) & \dots & (1-b_q,\beta_q)\\ (1-a_1,\alpha_1) & \dots & (1-a_p,\alpha_p)\end{matrix}\right)$$

H-функції Фокса, можемо подати функції $G_j(x,t)$ як

$$G_0(x,t)=\tfrac{\pi^{-n/2}t^{\alpha-1}}{|x|^n}$$
$$H^{1,2}_{3,2}\left(\tfrac{2^\gamma a^2}{|x|^\gamma}t^\alpha\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\gamma/2) & (0,\gamma/2)\\ (0,1) & (1-\alpha,\alpha) & \end{matrix}\right),$$
$$G_j(x,t)=\tfrac{\pi^{-n/2}t^{j-1}}{|x|^n}$$
$$H^{1,2}_{3,2}\left(\tfrac{2^\gamma a^2}{|x|^\gamma}t^\alpha\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\gamma/2) & (0,\gamma/2)\\ (0,1) & (1-j,\alpha) & \end{matrix}\right),$$
$$j=1,2.$$

За теоремою 2.7 із [20] про дробове диференціювання H-функцій

$$f_{1-\beta}(t)*G_0(x,t)=\tfrac{\pi^{-n/2}t^{\alpha-\beta}}{|x|^n}\times$$
$$\times H^{1,2}_{3,2}\left(t^\alpha\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\gamma/2) & (0,\gamma/2)\\ & (0,1) & (\beta-\alpha,\alpha)\end{matrix}\right).$$

За властивістю 2.8 [20] про диференціювання знаходимо

$$(f_{1-\beta}(t)*G_0)_t=\tfrac{\pi^{-n/2}t^{\alpha-\beta-1}}{|x|^n}\times$$
$$\times H^{2,1}_{2,3}\left(\tfrac{|x|^\gamma}{2^\gamma a^2t^\alpha}\middle|\begin{matrix}(1,1) & (\alpha-\beta,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,\gamma/2) & (1,\gamma/2)\end{matrix}\right).$$

Подібно обчислюємо

$$f_{1-\beta}(t)*G_j(x,t)=\tfrac{\pi^{-n/2}t^{j-\beta}}{|x|^n}\times$$
$$\times H^{1,2}_{3,2}\left(\tfrac{2^\gamma a^2}{|x|^\gamma}t^\alpha\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\gamma/2) & (0,\gamma/2)\\ (0,1) & (\beta-j,\alpha) & \end{matrix}\right),$$
$$\tfrac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_j(x,t)\big)=\tfrac{\pi^{-n/2}t^{j-\beta-1}}{|x|^n}\times$$
$$\times H^{1,2}_{3,2}\left(\tfrac{2^\gamma a^2}{|x|^\gamma}t^\alpha\middle|\begin{matrix}(0,1) & (1-n/2,\gamma/2) & (0,\gamma/2)\\ (0,1) & (1+\beta-j,\alpha) & \end{matrix}\right)$$
$$=\tfrac{\pi^{-n/2}t^{j-\beta-1}}{|x|^n}\times$$
$$\times H^{2,1}_{2,3}\left(\tfrac{|x|^\gamma}{2^\gamma a^2t^\alpha}\middle|\begin{matrix}(1,1) & (j-\beta,\alpha) & \\ (1,1) & (n/2,\gamma/2) & (1,\gamma/2)\end{matrix}\right),$$
$$j=1,2.$$

Для всіх функцій $\frac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_j(x,t)\big)$ $(j=0,1,2)$ маємо $\Delta^*=\gamma-\alpha>0$, $a^*=2-\alpha>0$. Тому за теоремою 1.1 із [20] ці функції існують для всіх $x\ne 0$, $t>0$.

Враховуючи теорему 1.7 із [20], знаходимо оцінки

$$|\frac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_0(x,t)\big)| \le \frac{c_0t^{\alpha-\beta-1}}{|x|^n},$$

$$|\frac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_j(x,t)\big)| \le \frac{c_jt^{j-\beta-1}}{|x|^n},\quad j=1,2$$
$$\text{при}\quad |x|^\gamma>t^\alpha.$$

За наслідком з теореми 1.12 [20] одержуємо оцінки при $|x|^\gamma<t^\alpha$:

$$|\frac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_0(x,t)\big)| \le$$
$$\le \frac{c_0^*t^{\alpha-\beta-1}}{|x|^n}\Big(\frac{|x|^\gamma}{t^\alpha}\Big)^{\min\{1,n/\gamma\}}=$$
$$=\begin{cases}\frac{c_0^*}{t^{\beta+1}|x|^{n-\gamma}}, & \gamma<n\\ \frac{c_0^*}{t^{\beta+1+\alpha(\frac{n}{\gamma}-1)}}, & \gamma\ge n\end{cases},$$

$$|\frac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_j(x,t)\big)|\le$$
$$\le\frac{c_j^* t^{j-1-\beta}}{|x|^n}\big(\frac{|x|^\gamma}{t^\alpha}\big)^{\min\{1,n/\gamma\}}=$$
$$=\begin{cases}\frac{c_j^*}{t^{\alpha+\beta+1-j}|x|^{n-\gamma}}, & \gamma<n\\ \frac{c_j^*}{t^{\beta+1-j+\alpha\frac{n}{\gamma}}}, & \gamma\ge n\end{cases},\quad j=1,2.$$

Нехай

$$w_{j,\gamma}(y,t)=\big((\widehat{(f_{1-\beta(t)}*G_j)_t}\varphi)(y,t)=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial t}\big(f_{1-\beta}(t)*G_j(x-y,t)\big)D^\gamma\varphi(x)dx,$$
$$j=0,1,2,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Використовуючи знайдені вище оцінки, у випадку $\gamma<n$ матимемо

$$|w_{0,\gamma}(y,t)|\le$$
$$\le d_{0,\gamma,3}\Big[\frac{1}{t^{\beta+1}}\int\limits_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha}\frac{|D^\gamma\varphi(x)|}{|x-y|^{n-\gamma}}dx+$$
$$+t^{\alpha-\beta-1}\int\limits_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha}\frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Big]\le$$
$$\le d_{0,\gamma,4}t^{\alpha-\beta-1}(1+|ln\,t|)||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)}\le$$
$$\le d_{\gamma,5}t^{\alpha-\beta-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},\ \forall\varepsilon>0,$$

$$|w_{j,\gamma}(y,t)|\le$$
$$\le d_{j,\gamma,3}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha}\frac{|D^\gamma\varphi(x)|}{t^{\alpha+\beta+1-j}|x-y|^{n-\gamma}}dx+$$
$$+\int\limits_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha}\frac{t^{j-\beta-1}|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Big]\le$$
$$\le d_{j,\gamma,4}t^{j-\beta-1}(1+|ln\,t|)||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)}\le$$
$$d_{j,\gamma,5}t^{j-\beta-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},\ \forall\varepsilon>0,\ j=1,2,$$

а у випадку $\gamma\ge n$

$$|w_{0,\gamma}(y,t)|\le$$
$$\le d_{0,\gamma,3}\Big[\frac{1}{t^{\beta+1+\alpha(\frac{n}{\gamma}-1)}}\int\limits_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha}|D^\gamma\varphi(x)|dx+$$
$$+t^{\alpha-\beta-1}\int\limits_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha}\frac{|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Big]\le$$
$$\le d_{0,\gamma,4}t^{\alpha-\beta-1}(1+|ln\,t|)||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)}\le$$
$$\le d_{0,\gamma,5}t^{\alpha-\beta-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},\ \forall\varepsilon>0,$$

$$|w_{j,\gamma}(y,t)|\le$$
$$\le d_{j,\gamma,3}\Big[\int\limits_{x:|x-y|^\gamma<t^\alpha}\frac{|D^\gamma\varphi(x)|}{t^{\beta+1-j+\alpha\frac{n}{\gamma}}}dx+$$
$$+\int\limits_{x:|x-y|^\gamma>t^\alpha}\frac{t^{j-\beta-1}|D^\gamma\varphi(x,t)|}{|x-y|^n}dx\Big]\le$$
$$\le d_{j,\gamma,4}t^{j-\beta-1}(1+|ln\,t|)||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)}\le$$
$$\le d_{j,\gamma,5}t^{j-\beta-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^k(\mathrm{R}^n)},\ \forall\varepsilon>0,$$
$$j=1,2,\ k=|\gamma|.$$

Теорема 1. *Нехай виконані припущення (L), (A1) при $s\in[0,\alpha-\beta)$. Тоді існує єдиний розв'язок $u\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ задачі (1), (2) із $r(t)=b(t)=0$, $t\in[0,T]$ такий, що $u_t^{(\beta)}\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$. Він визначений формулою*

$$\Big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\Big)=h_\varphi(t)\qquad\qquad(13)$$
$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n),\ t\in(0,T],$$

де

$$h_\varphi(t)=\sum_{j=1}^{2}\Big(F_j(\cdot),(\widehat{G}_j\varphi)(\cdot,t)\Big)+$$
$$+\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(\cdot),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\Big)d\tau,\quad t\in(0,T].$$

Доведення. Використовуємо схему доведення теореми 3 із [21]. Узагальнені функції F_j мають скінченні порядки сингулярностей $s(F_j)\le k_j$, $j=0,1,2$: існують числа $k_0,k_1,k_2\in\mathbb{Z}_+$ і функції $g_{j\kappa}\in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $|\kappa|\le k_j$, $j=0,1,2$ такі, що

$$(F_j,\varphi)=\sum_{|\kappa|\le k_j}\int\limits_{\mathbb{R}^n}g_{j\kappa}(y)D^\kappa\varphi(y)dy\qquad\qquad(14)$$
$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\quad j=0,1,2.$$

Використовуючи зображення (14) та лему 3, переконуємось, що для довільної $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(y),(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)\Big)d\tau=$$
$$=\sum_{|\kappa|\le k_0}\int\limits_0^t g(\tau)\times$$

$$\times\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n} g_{0\alpha}(y) D_y^{\kappa}(\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)dy\Big]d\tau,$$

$$\Big(F_j(y), (\widehat{G_j}\varphi)(y,t)\Big) =$$
$$= \sum_{|\kappa|\le k_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_{1\kappa}(y) D_y^{\kappa}(\widehat{G_1}\varphi)(y,t)dy$$

та правильні оцінки

$$\Big|\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(y), (\widehat{G_0}\varphi)(y,t,\tau)\Big)\,d\tau\Big| \le$$
$$\le c_0||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)}\times$$
$$\times\int\limits_0^t \tau^s|g(\tau)|\tau^{-s}(t-\tau)^{\alpha-1-\varepsilon}\,d\tau$$
$$\le b_0 t^{\alpha-s-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)}, \quad t\in[0,T],$$

$$\big|\big(F_j(y), (\widehat{G_j}\varphi)(y,t)\big)\big| \le b_j t^{j-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_j}(\mathbb{R}^n)},$$
$$t\in(0,T], \;\; \varepsilon\in(0,1), \;\; j=1,2.$$

Отож, при $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ права частина (13) (функція h_φ) належить $C(0,T]\cap L(0,T)$.

Покажемо, що функція (13) є розв'язком задачі в сенсі означення 1. Для довільної $\psi\in\mathcal{D}(\overline{Q})$ знаходимо

$$\big(u, (\widehat{L}\psi)\big) = \int\limits_0^T \Big(u(\cdot,t), (\widehat{L}\psi)(\cdot,t)\Big)dt =$$
$$\int\limits_0^T\Big(\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(y), (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)\Big)d\tau\Big)dt$$
$$+\sum_{j=1}^2 \int\limits_0^T \Big(F_j(y), (\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y,t)\Big)dt =$$

$$= \Big(F_0(y), \int\limits_0^T g(\tau)d\tau\int\limits_\tau^T (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(y,t,\tau)dt\Big)+$$
$$+\sum_{j=1}^2 \Big(F_j(y), \int\limits_0^T (\widehat{G}_j(\widehat{L}\psi))(y,t)dt\Big) =$$
$$= \Big(F_0(y)\cdot g(\tau), (\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(y,\tau)\Big)+$$
$$+\sum_{j=1}^2\Big(F_j, \widehat{\mathcal{G}}_j(\widehat{L}\psi)\Big).$$

Скориставшись формулами (6), для функції u, заданої формулою (13), і довільної $\psi\in\mathcal{D}(\overline{Q})$ одержуємо тотожність (4) при $r(t)=b(t)=0$, $t\in[0,T]$. За означенням 1 функція (13) є розв'язком задачі шуканого класу.

Єдиність розв'язку задачі доводиться, як у [21].

Покажемо, що $u_t^{(\beta)}\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$.

Використовуючи зображення (13), для довільної $\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$ одержуємо

$$\Big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t), \varphi(\cdot)\Big) = h_\varphi^{(\beta)}(t) =$$
$$= \sum_{j=1}^2\Big(F_j(\cdot), (\widehat{G}_j\varphi)_t^{(\beta)}(\cdot,t)\Big)+$$

$$+f_{-\beta}(t)*\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(\cdot), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\Big)d\tau =$$
$$= \sum_{j=1}^2\Big(F_j(\cdot), \big((f_{1-\beta}(t)*\widehat{G}_j)\varphi\big)_t(\cdot,t)\Big)+$$
$$+\Big(F_0(\cdot), f_{1-\beta}(t)*\frac{\partial}{\partial t}\big(g(t)*(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t)\big)\Big) =$$
$$= \sum_{j=1}^2\Big(F_j(\cdot), \big((f_{1-\beta}(t)*\widehat{G}_j)_t\varphi\big)(\cdot,t)\Big)+$$
$$+\Big(F_0(\cdot), g(t)*\big((f_{1-\beta}(t)*\widehat{G}_0)_t\varphi\big)(\cdot,t)\Big) =$$
$$= \sum_{j=1}^2\Big(F_j(\cdot), \big((f_{1-\widehat{\beta(t)*G_j}})_t\varphi\big)(\cdot,t)\Big)+$$
$$+\Big(F_0(\cdot), g(t)*\big((f_{1-\widehat{\beta(t)*G_0}})_t\varphi\big)(\cdot,t)\Big).$$

За лемою 3 та формулою (14) при $j=0$ для довільної $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\Big|\Big(F_0(\cdot), g(t)*\big((f_{1-\widehat{\beta(t)*G_0}})_t\varphi\big)(\cdot,t)\Big)\Big| =$$
$$\Big|\int\limits_0^t g(\tau)\Big(F_0(y), (\widehat{G_0}\varphi)_t^{(\beta)}(y,t-\tau)\Big)\,d\tau\Big| \le$$
$$\le c_0||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)}\times$$

$$\times \int_0^t \tau^s |g(\tau)|(t-\tau)^{\alpha-\beta-1-\varepsilon}\tau^{-s}\, d\tau$$

$$\leq \widehat{b}_0 t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_0}(\mathbb{R}^n)}, \quad t\in[0,T],$$

$$\Big|\Big(F_j(\cdot), \big((\widehat{f_{1-\beta}(t) * G_j})_t\varphi\big)(\cdot,t)\Big)\Big| \leq$$
$$\leq \widehat{b}_j t^{j-\beta-1-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^{k_j}(\mathbb{R}^n)}, \quad t\in(0,T].$$

Отож, також $h_\varphi^{(\beta)} \in C(0,T]\cap L(0,T)$ при $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Наслідок 1. Нехай виконані припущення теореми 1 при $s=0$ та $F_1=0$. Тоді існує єдиний розв'язок u задачі (1), (2) із $r(t)=b(t)=0$, $t\in[0,T]$ такий, що $u, u_t^{(\beta)} \in \mathcal{D}'_C(\bar{Q})$.

2. Теореми існування та єдиності для оберненої задачі. За теоремою 1 за припущень (L), (A1) маємо $h_\varphi, h_\varphi^{(\beta)} \in C(0,T]\cap L(0,T)$ для всіх $\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$ і будь-який розв'язок $u\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ рівняння

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big) = h_\varphi(t) + \tag{15}$$

$$+\int_0^t r(\tau)\Big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\Big)d\tau +$$

$$+\int_0^t b(\tau)\Big(u(\cdot,\tau), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\Big)d\tau$$

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n), t\in(0,T],$$

при $r(t)=b(t)=0$ є розв'язком задачі (1), (2). При $r(t)\neq 0$ для довільної $\psi\in\mathcal{D}(\overline{Q})$

$$\int_0^T dt \int_0^t r(\tau)\Big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau), (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,t-\tau)d\tau\Big) =$$

$$= \int_0^T r(\tau)d\tau \int_\tau^T \Big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau), (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,t-\tau)\Big)dt$$

$$= \int_0^T r(\tau)\Big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau), \int_\tau^T (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,t-\tau)dt\Big)d\tau$$

$$= \int_0^T r(\tau)\Big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau), (\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,\tau)\Big)d\tau$$

$$= \int_0^T r(t)\Big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t), \psi(\cdot,t)\Big)dt.$$

Аналогічно при $b(t)\neq 0$

$$\int_0^T dt \int_0^t b(\tau)\Big(u(\cdot,\tau), (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,t-\tau)d\tau\Big)$$

$$= \int_0^T b(\tau)d\tau \int_\tau^T \Big(u(\cdot,\tau), (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,t-\tau)\Big)dt$$

$$= \int_0^T b(\tau)\Big(u(\cdot,\tau), \int_\tau^T (\widehat{G}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,t-\tau)dt\Big)d\tau$$

$$= \int_0^T b(\tau)\Big(u(\cdot,\tau), (\widehat{\mathcal{G}}_0(\widehat{L}\psi))(\cdot,\tau)\Big)d\tau$$

$$= \int_0^T b(t)\Big(u(\cdot,t), \psi(\cdot,t)\Big)dt.$$

Отже, права частина (15) задовольняє тотожність (4) і за означенням будь-який розв'язок $u\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ рівняння (15) є розв'язком задачі (1), (2).

З рівняння (1) отримуємо

$$\big(u_t^{(\alpha)}(\cdot,t),\varphi_j(\cdot)\big) + a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_j(\cdot)\big) =$$
$$= r(t)\big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t),\varphi_j\big) +$$
$$+ b(t)\big(u(\cdot,t),\varphi_j\big) + g(t)\big(F_0,\varphi_j\big), \quad j=1,2,$$

а використовучи умови (3), матимемо

$$\Phi_1^{(\alpha)}(t) = -a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\big)$$
$$+ r(t)\Phi_1^{(\beta)}(t) + b(t)\Phi_1(t) + g(t)\big(F_0,\varphi_1\big),$$
$$\Phi_2^{(\alpha)}(t) = -a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\big)$$
$$+ r(t)\Phi_2^{(\beta)}(t) + b(t)\Phi_2(t) + g(t)\big(F_0,\varphi_2\big).$$

Звідси, враховуючи припущення (A2), знаходимо неперервні й інтегровні функції

$$r(t) = \Big[\Big(\Phi_1^{(\alpha)}(t) + a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\big) \tag{16}$$
$$-g(t)\big(F_0,\varphi_1\big)\Big)\Phi_2(t) -$$

$$-\Big(\Phi_2^{(\alpha)}(t)+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\big)-$$
$$-g(t)\big(F_0,\varphi_2\big)\Big)\Phi_1(t)\Big]t^{\beta}(1+|ln\,t|)[d(t)]^{-1},$$
$$b(t)=\Big[-\Big(\Phi_1^{(\alpha)}(t)+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\big)-$$
$$-g(t)\big(F_0,\varphi_1\big)\Big)\Phi_2^{(\beta)}(t)+$$
$$+\Big(\Phi_2^{(\alpha)}(t)+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\big)-$$
$$-g(t)\big(F_0,\varphi_2\big)\Big)\Phi_1^{(\beta)}(t)\Big]t^{\beta}(1+|ln\,t|)[d(t)]^{-1},$$
$$t\in(0,T].$$

Відзначимо, що $r(t)=O(t^{\beta-s}(1+|ln\,t|))$, $b(t)=O(t^{-s})$, $t\to+0$ та інтегровні на $(0,T)$ при $0\le s<1-\beta$.

Позначимо через $H_1(u,t)$, $H_2(u,t)$ праві частини (16), підставимо їх у (15) відповідно замість $r(t)$, $b(t)$. Отримуємо нелінійне операторне рівняння

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=h_\varphi(t)+ \tag{17}$$
$$+\int\limits_0^t H_1(u,\tau)\big(u_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t H_2(u,\tau)\big(u(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau$$
$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n),t\in(0,T]$$

щодо невідомої $u\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$. Навпаки, якщо $u\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ – розв'язок рівняння (17), r,b визначені формулою (16), то з наведеного вище і доведення теореми 1 випливає, що трійка (u,r,b) задовольняє задачу (1)–(3).

Теорема 2. *За припущень (L), (A1), (A2) існує $T^*\in(0,T]$ (відповідно $Q^*=\mathrm{R}^n\times(0,T^*]$) і розв'язок $(u,r,b)\in U(T^*)$ задачі (1)-(3): функція u – розв'язок рівняння (17), r та b визначені формулами (16).*

Доведення. Згідно з наведеним, за припущень теореми трійка $(u,r,b)\in U$ така, що функція $u\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$ є розв'язком (17), а $r(t),b(t)$ визначені згідно з (16), є розв'язком задачі (1)-(3). Достатньо довести розв'язність рівняння (17) в $\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$.

Із доведення теореми 1 для всіх $\varepsilon\in(0,1)$, $\varphi\in\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)$ із $K\in\mathrm{Z}_+$, $K\ge\max\{k_0,k_1,k_2\}$ отримуємо

$$t^s\Big|\int\limits_0^t g(\tau)\big(F_0(\cdot),(\widehat{\mathcal{G}}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau\Big|\le \tag{18}$$
$$\le b_0t^{\alpha-\varepsilon}||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)},$$

$$t^s|h_\varphi(t)|\le$$
$$\big[b_0t^{\alpha-\varepsilon}+b_1t^{s-\varepsilon}+b_2t^{s+1-\varepsilon}\big]\ ||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}. \tag{19}$$

Нехай при $\mathrm{R}>0$

$$M_{R,s}=M_{R,s}(Q)=\Big\{v\in\mathcal{D}'_{C,L}(Q):$$
$$||v||_s=\sup_{t\in(0,T]}\ \sup_{\varphi\in D^K(\mathrm{R}^n)}\frac{t^s\big|\big(v(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big|}{||\varphi||_{D^K(\mathrm{R}^n)}}\le R\Big\}.$$

Визначаємо оператор

$$P:\mathcal{D}'_{C,L}(Q)\to\mathcal{D}'_C(Q),$$
$$\big((Pv)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=h_\varphi(t)$$
$$+\int\limits_0^t H_1(v,\tau)\big(v_\tau^{(\beta)}(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau$$
$$+\int\limits_0^t H_2(v,\tau)\big(v(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau$$
$$\forall\varphi\in D^K(\mathrm{R}^n).$$

Використовуючи принцип Банаха, доведемо розв'язність рівняння (17), тобто рівняння

$$u=Pu,\quad u\in M_{R,s}(Q)\subset\mathcal{D}'_{C,L}(Q).$$

Спочатку покажемо, що існують $R>0,T^*\in(0,T]$, $Q^*=\mathrm{R}^n\times(0,T^*]$ і $M^*_{R,s}=M_{R,s}(Q^*)$ такі, що $P:M^*_{R,s}\to M^*_{R,s}$.

Для кожної $v\in M_{R,s}$ маємо

$$\tau^s\big|\big(v(\cdot,\tau),a^2(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_j(\cdot)\big)\big|\le$$
$$\le R\|(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_j\|_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}:=B_jR,$$

тому

$$\tau^s|H_j(v,\tau)|\le\frac{A_j+B_jR}{d_0},\ \ j=1,2,$$

де

$$A_1 = \sup_{\tau\in(0,T]} \tau^s \Big| [\Phi_1^{(\alpha)}(\tau) - g(\tau)(F_0,\varphi_1)]\Phi_2(\tau)$$

$$-[\Phi_2^{(\alpha)}(\tau) - g(\tau)(F_0,\varphi_2)]\Phi_1(\tau)\Big| \tau^\beta(1+|ln\,\tau|)),$$

$$A_2 = -\sup_{\tau\in(0,T]} \tau^s \Big| [\Phi_1^{(\alpha)}(\tau)-$$

$$-g(\tau)(F_0,\varphi_1)]\Phi_2^{(\beta)}(\tau) - [\Phi_2^{(\alpha)}(\tau)-$$

$$-g(\tau)(F_0,\varphi_2)]\Phi_1^{(\beta)}(\tau)\Big| \tau^\beta(1+|ln\,\tau|)).$$

Звідси, враховуючи (18), (19) і лему 3, для всіх $v \in M_{R,s}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$, $t \in (0,T]$ при $0 \le s < \frac{\alpha-\beta}{2}$, $\varepsilon < \min\{\alpha-\beta-s, s\}$ отримуємо

$$\frac{t^s\big|\big((Pv)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big|}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}} \le$$

$$b_0 t^{\alpha-\varepsilon} + b_1 t^{s-\varepsilon} + b_2 t^{s+1-\varepsilon} +$$

$$+\frac{(A_1+B_1R)Rt^s}{d_0}\times$$

$$\times\int_0^t \frac{||(\widehat{G}_0\varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}\tau^{-2s}d\tau}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}$$

$$+\frac{(A_2+B_2R)Rt^s}{d_0}\times$$

$$\times\int_0^t \frac{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}\tau^{-2s}d\tau}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}$$

$$\le b_0 t^{\alpha-\varepsilon} + b_1 t^{s-\varepsilon} + b_2 t^{s+1-\varepsilon} +$$

$$+\frac{(A_1+B_1R)Rt^s}{d_0}\int_0^t c_K(t-\tau)^{\alpha-\beta-\varepsilon-1}\tau^{-2s}d\tau +$$

$$+\frac{(A_2+B_2R)Rt^s}{d_0}\int_0^t c_K(t-\tau)^{\alpha-\varepsilon-1}\tau^{-2s}d\tau \le$$

$$\le b_0 t^{\alpha-\varepsilon} + b_1 t^{s-\varepsilon} + b_2 t^{s+1-\varepsilon} +$$

$$+\frac{(A_1+B_1R)R}{d_0}t^{\alpha-\beta-\varepsilon} + \frac{(A_2+B_2R)R}{f}t^{\alpha-\varepsilon} \le$$

$$\le t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon}(q_0R^2+q_1R)+q_2,$$

де q_j ($j \in \{0,1,2,3\}$) – додатні сталі.

Для виконання нерівності

$$t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon}(q_0R^2+q_1R)+q_2 \le R \quad \forall t \in [0,T^*] \tag{20}$$

із деякими $R > 0$, $T^* \in (0,T]$, спочатку виберемо $R \ge \max\{1, 2q_2\}$. Тоді (20) випливає з нерівності

$$(q_0+q_1)Rt^{\alpha-\beta-s-\varepsilon} \le \frac{1}{2} \quad \forall t \in [0,T^*] \tag{21}$$

при вибраному R, правильної при $T^* \le \min\{T, [2(q_0+q_1)R]^{-\frac{1}{\alpha-\beta-s-\varepsilon}}\}$. Ми довели існування $R \ge \max\{1,2q_2\}$, $T^* \in (0,T]$ таких, що $P : M^*_{R,s} \to M^*_{R,s}$ при $s \in [0, \frac{\alpha-\beta}{2})$.

Тепер покажемо, що P є стисним оператором на $M^*_{R,s}$. Для $v_1, v_2 \in M^*_{R,s}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$, $t \in [0,T^*]$ маємо

$$\frac{t^s\big|\big((Pv_1)(\cdot,t) - \big((Pv_2)(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)\big|}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}} =$$

$$= \frac{t^s}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\Big|\int_0^t H_1(v_2,\tau)\times$$

$$\times\big(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot,t-\tau)\big)d\tau +$$

$$+\int_0^t \big(H_1(v_1,\tau)-H_1(v_2,\tau)\big)\times$$

$$\times\big(v_1(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot,t-\tau)\big)d\tau\Big| +$$

$$+\frac{t^s}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\Big|\int_0^t H_2(v_2,\tau)\times$$

$$\times\big(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau +$$

$$+\int_0^t \big(H_2(v_1,\tau)-H_2(v_2,\tau)\big)\times$$

$$\times\big(v_1(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)d\tau\Big| \le$$

$$\le \frac{(A_1+B_1R)t^s}{d_0}\times$$

$$\times\int_0^t \frac{\big|\big(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot,t-\tau)\big)\big|}{||(\widehat{G}_0\varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}$$

$$\frac{||(\widehat{G}_0\varphi)_\tau^{(\beta)}(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\tau^{-s}d\tau +$$

$$+\frac{a^2t^sR||(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}{d_0}\times$$

$$\times \int_0^t \frac{\big|\big(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\big)\big|}{||(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\times$$

$$\times\frac{||(\widehat{G}_0\varphi)^{(\beta)}_\tau(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\tau^{-s}d\tau+$$

$$+\frac{(A_2+B_2R)t^s}{d_0}\times$$

$$\times \int_0^t \frac{\big|\big(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)\big)\big|}{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}$$

$$\frac{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\tau^{-s}d\tau+$$

$$+\frac{a^2t^sR||(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}{d_0}\times$$

$$\times \int_0^t \frac{\big|\big(v_1(\cdot,\tau)-v_2(\cdot,\tau),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\big)\big|}{||(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\times$$

$$\times\frac{||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\tau^{-s}d\tau$$

$$\le \frac{(2A_1+B_1R)t^s}{d_0}\cdot||v_1-v_2||_s\times$$

$$\times\frac{\int_0^t ||(\widehat{G}_0\varphi)^{(\beta)}_\tau(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}\tau^{-2s}d\tau}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}+$$

$$+\frac{(2A_2+B_2R)t^s}{d_0}\cdot||v_1-v_2||_s\times$$

$$\times\frac{\int_0^t ||(\widehat{G}_0\varphi)(\cdot,t-\tau)||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}\tau^{-2s}d\tau}{||\varphi||_{\mathcal{D}^K(\mathrm{R}^n)}}\le$$

$$\le (2q_0R+q_1)t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon}||v_1-v_2||_s.$$

Якщо $(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_j(x)\equiv 0,\ x\in\mathrm{R}^n,$ то

$$\big(v_1(\cdot,t)-v_2(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_j(\cdot)\big)=0$$
$$\forall t\in[0,T^*],\quad j=1,2.$$

Для $t\in[0,T^*]$ маємо

$$(2q_0R+q_1)t^{\alpha-\beta-s-\varepsilon}\le$$
$$\le\frac{2q_0R+q_1}{2(q_0+q_1)R}<\frac{2q_0+q_1}{2(q_0+q_1)}<1.$$

Отже, P є стисним оператором на $M_{R,s}(Q^*)$, і за теоремою Банаха отримуємо розв'язність рівняння (17) в $M^*_{R,s}\subset\mathcal{D}'_{C,L}(Q^*)$.

Наслідок 2. Нехай $F_1=0$, виконані припущення (L), (A1) при $s=0$, $\varphi_j\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$, $\Phi_j,\Phi_j^{(\beta)},\Phi_j^{(\alpha)}\in C[0,T]$, $j=1,2$, $\Phi_1(0)=0$, $\Phi_2(0)=(F_2,\varphi_2)$, $\inf\limits_{t\in(0,T]}|p(t)|=p_0>0$, де $p(t):=\Phi_1^{(\beta)}(t)\Phi_2(t)-\Phi_1(t)\Phi_2^{(\beta)}(t)$. Тоді існує $T^*\in(0,T]$ (відповідно $Q^*=\mathrm{R}^n\times(0,T^*]$) і розв'язок

$$(u,r,b)\in\mathcal{D}'_C(\bar{Q})\times C[0,T]^2$$

задачі (1)-(3): функція u є розв'язком рівняння (17),

$$r(t)=H_1(u,t)=\Big[\Big(\Phi_1^{(\alpha)}(t)+$$
$$+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\big)-$$
$$-g(t)\big(F_0,\varphi_1\big)\Big)\Phi_2(t)-$$
$$-\Big(\Phi_2^{(\alpha)}(t)+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\big)-$$
$$-g(t)\big(F_0,\varphi_2\big)\Big)\Phi_1(t)\Big][p(t)]^{-1},$$

$$b(t)=H_2(u,t)=\Big[-\Big(\Phi_1^{(\alpha)}(t)+$$
$$+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\big)-$$
$$-g(t)\big(F_0,\varphi_1\big)\Big)\Phi_2^{(\beta)}(t)+$$
$$+\Big(\Phi_2^{(\alpha)}(t)+a^2\big(u(\cdot,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\big)-$$
$$-g(t)\big(F_0,\varphi_2\big)\Big)\Phi_1^{(\beta)}(t)\Big][p(t)]^{-1},\quad t\in(0,T].$$

Теорема 3. *За припущень (L), (A2) розв'язок $(u,r,b)\in U(T)$ задачі (1)-(3) єдиний.*

Доведення. Нехай існує два розв'язки (u_1,r_1,b_1), $(u_2,r_2,b_2)\in U$ задачі (1)-(3). Підставимо їх в (1), (2). Візьмемо $u=u_1-u_2$, $r=r_1-r_2$, $b=b_1-b_2$ і отримаємо задачу Коші для рівняння

$$u_t^{(\alpha)}=a^2(-\Delta)^{\gamma/2}u+r_2u_t^{(\beta)}+r{u_1}_t^{(\beta)}+b_2u+bu_1 \tag{22}$$

з нульовими початковими умовами. За означенням розв'язку

$$(u,\widehat{L}\psi)=\int_0^T\Big[r_2(t)\big(u_t^{(\beta)}(\cdot,t),\psi(\cdot,t)\big)+$$

$$+r(t)\big(u_{1t}^{(\beta)}(\cdot,t),\psi(\cdot,t)\big)+$$
$$+b_2(t)\big(u(\cdot,t),\psi(\cdot,t)\big)+b(t)\big(u_1(\cdot,t),\psi(\cdot,t)\big)\Big]dt$$
$$\forall\psi\in\mathcal{D}(\bar{Q}).$$

Згідно з [16], для кожної $\varrho\in\mathcal{D}(\bar{Q})$ існує $\psi=\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho\in\mathcal{D}(\bar{Q})$ така, що $\widehat{L}\psi=\varrho$ в Q. Тоді для кожної $\varrho\in\mathcal{D}(\bar{Q})$

$$\int\limits_0^T\Big(u(\cdot,t),\varrho(\cdot,t)\Big)dt=$$
$$=\int\limits_0^T\Big(r_2(t)u_t^{(\beta)}(\cdot,t)+ \tag{23}$$
$$r(t)u_{1t}^{(\beta)}(\cdot,t)+b_2(t)u(\cdot,t)+$$
$$+b(t)u_1(\cdot,t),(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)\Big)dt.$$

Зауважимо, що рівність (23) буде правильною також для такої ϱ, що $\varrho(\cdot,t)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ при кожному $t\in(0,T]$, а $\big(u_{1t}^{(\beta)}(\cdot,t),(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)\big)$ неперервна й інтегровна на $(0,T)$. З умови (3) знаходимо

$$r(t)\Phi_1^{(\beta)}(t)+b(t)\Phi_1(t)=$$
$$=a^2\Big(u(z,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(z)\Big),$$
$$r(t)\Phi_2^{(\beta)}(t)+b(t)\Phi_2(t)=$$
$$=a^2\Big(u(z,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(z)\Big),t\in(0,T],$$

звідки

$$r(t)=\frac{a^2t^\beta(1+|ln\,t|)}{d(t)}\times$$
$$\times\Big[\Big(u(z,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(z)\Big)\Phi_2(t)- \tag{24}$$
$$-\Big(u(z,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(z)\Big)\Phi_1(t)\Big],$$

$$b(t)=\frac{a^2t^\beta(1+|ln\,t|)}{d(t)}\times$$
$$\times\Big[\Big(u(z,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(z)\Big)\Phi_1^{(\beta)}(t) \tag{25}$$
$$-\Big(u(z,t),(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(z)\Big)\Phi_2^{(\beta)}(t)\Big],$$
$$t\in(0,T]$$

і тоді, з (23), для всіх $\varrho\in\mathcal{D}(\bar{Q})$ отримуємо рівняння

$$\int\limits_0^T\Big(u(\cdot,t),\varrho(\cdot,t)-r_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)_t^{(\beta)}(\cdot,t)- \tag{26}$$
$$-b_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)+w_\varrho(t)\Big)dt=0,$$

де

$$w_\varrho(t)=\frac{a^2t^\beta(1+|ln\,t|)}{d(t)}\big[\Phi_2(t)(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)-$$
$$-\Phi_1(t)(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)\big]\big(u_{1t}^{(\beta)}(\cdot,t),(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)\big)+$$
$$+\frac{a^2t^\beta(1+|ln\,t|)}{d(t)}\big[\Phi_1^{(\beta)}(t)(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_2(\cdot)-$$
$$-\Phi_2^{(\beta)}(t)(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi_1(\cdot)\big]\big(u_1(\cdot,t),(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)\big)$$

і є відомою функцією із $C(0,T]\cap L(0,T)$,

$$\varrho(\cdot,t)-r_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)_t^{(\beta)}(\cdot,t)-b_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)+$$
$$+w_\varrho(t)\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)\quad\forall t\in(0,T]$$

і є неперервною й інтегровною функцією $t\in(0,T]$ (за лемою 3). Отже, для довільних $\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n)$, $\mu\in\mathcal{D}(0,T]$, $\mu(T)=0$ існує єдиний розв'язок $\varrho\in\mathcal{D}(Q)$ інтегрального рівняння Вольтерри другого роду

$$\varrho(x,t)-r_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)_t^{(\beta)}(x,t)-$$
$$-b_2(t)(\widehat{\mathcal{G}}_0\varrho)(\cdot,t)+w_\varrho(t)=\varphi(x)\mu(t),\ \ (x,t)\in Q$$

з інтегровним ядром. Тоді з (12)

$$\int\limits_0^T\Big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\Big)\mu(t)dt=0$$
$$\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n),\ \mu\in\mathcal{D}(0,T],\ \mu(T)=0.$$

За лемою Дюбуа-Реймона отримуємо

$$\big(u(\cdot,t),\varphi(\cdot)\big)=0\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathrm{R}^n),\ \ t\in(0,T].$$

Отже, $u=0$ в $\mathcal{D}'_{C,L}(Q)$, а з (21) та (22) випливає, що $r(t)=0$, $b(t)=0$, $t\in(0,T]$.

3. Висновок. Вивчено обернену задачу Коші для телеграфного рівняння з дробовими похідними та заданими узагальненими функціями в правих частинах прямої задачі. Вона полягає у визначенні узагальненого розв'язку u і невідомих, залежних від часу, неперервних та інтегровних молодших коефіцієнтів b, r у рівнянні. Існування розв'язку $(u, r, b) \in U(T^*)$ отримано при деякому $T^* \in (0, T]$, а єдиність на всьому інтервалі $(0, T]$ за слабших припущень. $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецкий В.В.* Параболические псевдодифференциальные уравнения в пространстве обобщенных функций / В.В. Городецкий, Я.М. Дринь //Препр./АН Украины. Ин-т прикл. пр. мех. и мат. – Львов – 1991, №4–91. — 57 с.
2. *Городецький В.В.* Задача Коші для псевдодифференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу S' / В.В. Городецкий, В.А. Літовченко // Доп. АН України – 1992. – **10**. – С. 6-9.
3. *Anh V.V.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random data / V.V. Anh and N.N. Leonenko // J. of Statistical Physics — 2001. — **104**, №5/6— P. 1349-1387.
4. *Djrbashian M.M.* Fractional derivatives and Cauchy problem for differentials of fractional order / M.M. Djrbashian, A.B. Nersessyan // Izv. AN Arm. SSR. Matematika —1968, №3. — P.3-29.
5. *Duan Jun Sheng.* Time- and space-fractional partial differential equations / Jun Sheng Duan // J. Math. Phis. — 2005. — **46**, №013504.
6. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei // Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin — 2004.
7. *Voroshylov A.A.* Conditions of the existence of classical solution of the Cauchy problem for diffusion-wave equation with Caputo partial derivative / A.A. Voroshylov, A.A. Kilbas // Dokl. Ak. Nauk — 2007. — **414**, №4. — P. 1-4.
8. *Cheng J.* Uniqueness in an inverse problem for a one-dimentional fractional diffusion equation / J. Cheng, J. Nakagawa, M. Yamamoto and T. Yamazaki // Inverse Problems — 2009. — **25**, №115002.
9. *Hatano Y.* Determination of order in fractional diffusion equation / Y. Hatano, J. Nakagawa, Sh. Wang and M. Yamamoto // Journal of Math-for-Industry — 2013, №5A.— P. 51-57.
10. *Hussein M.* An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient from an integral condition / M. Hussein, D. Lesnic and M.I. Ismailov // Mathematical Methods in the Applied Sciences — 2016. — **39**, №5. — P. 963-980.
11. *Janno Ja.* Determination of the order of fractional derivative and a kernel in an inverse problem for a generalized time fractional diffusion equation / Ja. Janno // Electronic J. of Differential Equations, 2016, http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu — №199. —P. 1-28.
12. *Nakagawa J.*, Sakamoto K. and Yamamoto M., Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration / J. Nakagawa, K. Sakamoto and M. Yamamoto // Journal of Math-for-Industry — 2010, №2A. — P. 99-108.
13. *Rundell W.* The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation / W. Rundell, X. Xu and L. Zuo // Applicable Analysis — 2012, №1. — P. 1-16.
14. *Zhang Y.* Inverse source problem for a fractional diffusion equation / Y. Zhang and X. Xu // Inverse Problems — 2011. — **27**. — P. 1–12.
15. *Дрінь Я.М.* Пряма і обернена задачі для одного класу рівнянь з псевдодиференціальним оператором / Я.М. Дрінь // Доп. НАН України – 2011, №5. – С. 12-17.
16. *Лопушанський А.О.* Розв'язок задачі Коші для рівнянь з дробовими похідними в просторах узагальнених функцій / А.О. Лопушанський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2012. – Вип. 77.– С. 132-144.
17. *Lopushansky A.O.* The Cauchy problem for an equation with fractional derivatives in Bessel potential spaces / A.O. Lopushansky // Sib. Math. J.— 2014. — **55**, №6. — P. 1089-1097.
18. *Lopushanska H.* Inverse Cauchy Problem for Fractional Telegraph Equations with Distributions / H. Lopushanska, V. Rapita // Carpathian Math. Publ. — 2016.— **8**, №1. — P. 118-126.
19. *Srivastava H.M.* The H-functions of one and two variables with applications / H.M. Srivastava, K.C. Gupta and S.P. Goyal // New Dehli, South Asian Publishers — 1982.
20. *Kilbas A.A.* H-Transforms: Theory and Applications / A.A. Kilbas, M. Sajgo // Boca-Raton: Chapman and Hall CRC — 2004.
21. *Lopushansky A.O.* Regularity of the solutions of the boundary value problems for diffusion-wave equation with generalized functions in right-hand sides / A.O. Lopushansky // Carp. Math. Publ.— 2013. — **5**, №2. — P. 279-289.