УДК 517.925

©2016 р. К.С. Корепанова

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, м.Одеса

УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТЕПЕНЕВОГО ВИДУ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПРАВИЛЬНО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Встановлюються умови існування деяких типів розв'язків степеневого виду у двочленного неавтономного звичайного диференціального рівняння з правильно змінними нелінійностями.

The conditions of existence of some types of power-mode solutions of a binomial non-autonomous ordinary differential equation with regularly varying nonlinearities are established.

1. Постановка задачі

Розглядається диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \alpha p(t) \prod_{j=0}^{n-1} \varphi_j(y^{(j)}), \tag{1.1}$$

де $n \geq 3$, $\alpha \in \{-1, 1\}$, $p : [a, +\infty[\to]0, +\infty[$ – неперервна функція, $\varphi_j : \Delta Y_j \to]0; +\infty[$ – неперевна та правильно змінна при $y^{(j)} \to Y_j$ функція порядку σ_j, $j = \overline{0, n-1}$, ΔY_j – деякий односторонній окіл точки Y_j, Y_j дорівнює або 0, або $\pm\infty$[1].

Функції φ_j $(j = \overline{0, n-1})$ (см.[1], гл.I, §1, с.10) можуть бути зображені у вигляді

$$\varphi_j(y^{(j)}) = |y^{(j)}|^{\sigma_j} L_j(y^{(j)}) \ (j = \overline{0, n-1}), \tag{1.2}$$

де $L_j : \Delta Y_j \to]0, +\infty[$ $(j = \overline{0, n-1})$ – повільно змінні при $y^{(j)} \to Y_j$ функції. Згідно з означенням та властивостями повільно змінних функцій для будь-якого $\lambda > 0$

$$\lim_{\substack{y^{(j)} \to Y_j \\ y^{(j)} \in \Delta Y_j}} \frac{L_j(\lambda y^{(j)})}{L_j(y^{(j)})} = 1 \ (j = \overline{0, n-1}), \tag{1.3}$$

причому дані граничні співвідношення виконуються рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[c, d] \in]0, +\infty[$.

У цій роботі вважаючи, що для деякого $k \in \{3, \dots, n\}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{y^{(i)} \to Y_i} \varphi_i(y^{(i)}) = \varphi_i^0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ i = \overline{n-k+1, n-2}, \end{cases} \tag{1.4}$$

встановлюються умови існування у рівнянні (1.1) розв'язків, для яких

$$\lim_{t \to +\infty} y^{(n-k)}(t) = c \quad (c \neq 0), \tag{1.5}$$

а також асиптотичні при $t \to +\infty$ зображення таких розв'язків та їх похідних до порядку $n-1$ включно.

Очевидно, що в силу (1.5) для таких розв'язків мають місце наступні асимптотичні при $t \to +\infty$ зображення

$$y^{(j-1)}(t) = \frac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!}[1+o(1)] \ (l = \overline{1, n-k}) \tag{1.6}$$

і $c \in \Delta Y_{n-k}$.

З вигляду рівняння (1.1) також зрозуміло, що $y^{(n)}(t)$ зберігає знак в деякому околі $+\infty$. Тоді $y^{(n-l)}(t)$ $(l = \overline{1, k-1})$ є строго монотонними функціями в околі $+\infty$ і, в силу (1.5), можуть прямувати лише до нуля при $t \to +\infty$. Тому для існування таких розв'язків насамперед необхідно, щоб

$$Y_{j-1} = 0 \quad \text{при} \ j = \overline{n-k+2, n}. \tag{1.7}$$

Для визначення знаків чисел з околів ΔY_j $(j = \overline{0, n-1})$ будемо вважати, що

$$\mu_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Y_j = 0 \text{ та } \Delta Y_j \text{ – } \\ & \text{правий окіл } 0 \text{ або } Y_j = +\infty, \\ -1, & \text{якщо } Y_j = 0 \text{ та } \Delta Y_j \text{ – } \\ & \text{лівий окіл } 0 \text{ або } Y_j = -\infty \end{cases}$$

і тоді з (1.6) випливає, що при $j = \overline{1, n-k}$

$$Y_{j-1} = \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } \mu_{n-k} > 0, \\ -\infty, & \text{якщо } \mu_{n-k} < 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

[1]При $Y_j = \pm\infty$ тут і далі будемо вважати, що усі числа з околу ΔY_j одного знаку.

Ці умови являються необхідними для існування у рівняння (1.1) розв'язків, для яких має місце (1.5).

Отримані тут результати доповнюють наслідок 8.2 [2, Гл. II, §8, стр. 207] і теорему 16.9 [2, Гл. IV, §16, стр. 321] з монографії І.Кігурадзе і Т.Чантурія для диференціальних рівнянь n–го порядку загального вигляду.

2. Основні результати

Для визначенності будемо вважати, що

$$\Delta Y_{n-1} = \begin{cases} [y^0_{n-1}, Y_{n-1}[, & \text{якщо } \Delta Y_{n-1} - \\ & \text{лівий окіл } Y_{n-1}; \\ ]Y_{n-1}, y^0_{n-1}], & \text{якщо } \Delta Y_{n-1} - \\ & \text{правий окіл } Y_{n-1}, \end{cases}$$

і введемо функцію $\Phi(y)$ наступним чином

$$\Phi(y) = \int_B^y \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)},$$

$$B = \begin{cases} Y_{n-1}, & \text{якщо } \int\limits_{y^0_{n-1}}^{Y_{n-1}} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)} < +\infty; \\ y^0_{n-1}, & \text{якщо } \int\limits_{y^0_{n-1}}^{Y_{n-1}} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)} = \pm\infty. \end{cases}$$

Оскільки $\Phi'(y) > 0$ при $y \in \Delta Y_{n-1}$, то $\Phi : \Delta Y_{n-1} \to \Delta Z_{n-1}$, де

$$\Delta Z_{n-1} =$$

$$= \begin{cases} [z^0_{n-1}, Z_{n-1}[, \text{ якщо } \Delta Y_{n-1} = [y^0_{n-1}, Y_{n-1}[; \\ ]Z_{n-1}, z^0_{n-1}], \text{ якщо } \Delta Y_{n-1} =]Y_{n-1}, y^0_{n-1}], \end{cases}$$

$Z_{n-1} = \lim\limits_{y \to Y_{n-1}} \Phi(y)$, $z^0_{n-1} = \Phi(y^0_{n-1})$, і для неї існує зворотня функція $\Phi^{-1} : \Delta Z_{n-1} \to \Delta Y_{n-1}$.

Крім того, з врахуванням (1.4) покладемо

$$K = \left(\varphi_{n-k}(c) \prod_{i=n-k+1}^{n-2} \varphi^0_i \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{j=1}^{n-k} \left| \frac{c}{(n-k-j+1)!} \right|^{\sigma_{j-1}} \right)^{\frac{1}{1-\sigma_{n-1}}},$$

і при $Y_{j-1} = \pm\infty$ $(j = \overline{1, n-k})$ введемо функцію $W_0(t) = \Phi^{-1}(\alpha I(t))$, де

$$I(t) = \int_A^t p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j \left(\mu_j \tau^{n-k-j} \right) d\tau,$$

$$A = \begin{cases} +\infty, \text{якщо} \int\limits_{a_0}^{+\infty} p(\tau) \prod\limits_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j \left(\mu_j \tau^{n-k-j}\right) d\tau < +\infty; \\ a_0, \text{якщо} \int\limits_{a_0}^{+\infty} p(\tau) \prod\limits_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j \left(\mu_j \tau^{n-k-j}\right) d\tau = \pm\infty, \end{cases}$$

$a_0 \geq a$ таке, що $\mu_{j-1} t^{n-k-j+1} \in \Delta Y_{j-1}$ $(j = \overline{1, n-k})$ при $t \geq a_0$.

Теорема. *Нехай $k \in \{3, \ldots, n\}$, $\sigma_{n-1} \neq 1$ і справджується (1.4). Для існування у рівнянні (1.1) розв'язків, для яких має місце (1.5), необхідно і достатньо, щоб $c \in \Delta Y_{n-k}$ і виконувались умови (1.6) – (1.8), а також*

$$\begin{array}{c} A = +\infty, \text{ якщо } B = 0, \\ A = a_0, \text{ якщо } B = y^0_{n-1}, \end{array} \tag{2.1}$$

$$\alpha y^0_{n-1}(1-\sigma_{n-1}) I(t) > 0 \text{ при } t \in]a_0, +\infty[\tag{2.2}$$

$$\int_{a_1}^{+\infty} |W_m(\tau)| d\tau < +\infty \quad (m = \overline{0, k-2}), \tag{2.3}$$

де $a_1 \geq a_0$ таке, що $\alpha I(t) \in \Delta Z_{n-1}$ при $t \geq a_1$, і $W_m(t)$ визначаються з врахуванням вигляду $W_0(t)$ наступним чином

$$W_m(t) = \int_{+\infty}^t W_{m-1}(s) ds \quad (m = \overline{1, k-2}).$$

Більш того, для кожного $c \in \Delta Y_{n-k}$ при виконанні цих умов у випадку $signI(t) = 1$ при $t > a_0$ існує $(n-k+1)$–параметрична, а у випадку $signI(t) = -1$ при $t > a_0$ – $(n-k)$–параметрична сім'я таких розв'язків і для кожного з них окрім (1.6) мають місце при $t \to +\infty$ наступні асимптотичні зображення

$$\begin{array}{l} y^{(n-k)}(t) = c + K W_{k-1}(s)[1 + o(1)], \\ y^{(j)}(t) = K W_{n-j-1}(t)[1 + o(1)] \\ (j = \overline{n-k+1, n-1}), \end{array} \tag{2.4}$$

де $W_{k-1}(t) = \int\limits_{+\infty}^t W_{k-2}(s) ds$.

Доведення теореми. *Необхідність.* Нехай у рівняння (1.1) існує розв'язок y, заданий на $[t_0,+\infty[$ та який задовольняє (1.5). Тоді $c \in \Delta Y_{n-k}$, справджуються (1.7)-(1.8) і мають місце асимптотичні при $t \to +\infty$ формули (1.6).

Враховуючи зображення (1.2) правильно змінних при $t \to +\infty$ функцій $\varphi_j(y^{(j)})$ $(j = \overline{0, n-k})$ і справедливість виконання співвідношень (1.3) рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[d_1, d_2] \subset]0, +\infty[$, при $t \to +\infty$ маємо

$$\varphi_{j-1}\left(\frac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!}[1+o(1)]\right) =$$
$$= \left|\frac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!}[1+o(1)]\right|^{\sigma_{j-1}} \times$$
$$\times L_{j-1}\left(\frac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!}[1+o(1)]\right) =$$
$$= \left|\frac{c}{(n-k-j+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}} \times$$
$$\times t^{n-k-j+1} L_{j-1}\left(\mu_{j-1}t^{n-k-j+1}\right)[1+o(1)] =$$
$$= \left|\frac{c}{(n-k-j+1)!}\right|^{\sigma_{j-1}} \times$$
$$\times \varphi_{j-1}(\mu_{j-1}t^{n-k-j+1})[1+o(1)] \ (j = \overline{1, n-k+1}).$$

Тоді, підставивши розв'язок разом з похідними до порядку $n-k$ включно в (1.1), отримаємо

$$\frac{y^{(n)}(t)}{\varphi_{n-1}(y^{(n-1)}(t))} = \alpha K^{1-\sigma_{n-1}} p(t) \times$$
$$\times \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j\left(\mu_j \tau^{n-k-j}\right)[1+o(1)] \ \text{ при } t \to +\infty.$$

Проінтегрувавши дане співвідношення на $[t_*, t]$, де $t_* = \max\{a_0, t_0\}$, та зробивши в інтегралі, що стоїть зліва, заміну змінної $s = y^{(n-1)}(t)$, маємо

$$\int\limits_{y_{n-1}(t_*)}^{y_{n-1}(t)} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)} = \alpha K^{1-\sigma_{n-1}} \times$$
$$\times \int\limits_{t_*}^{t} p(\tau) \prod_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j\left(\mu_j \tau^{n-k-j}\right)[1+o(1)]d\tau.$$

Оскільки при $t \to +\infty$ $y^{(n-1)}(t) \to Y_{n-1} = 0$, отримаємо, що інтеграли $\int\limits_{y^{(n-1)}(t_*)}^{0} \frac{ds}{\varphi_{n-1}(s)}$ та $\int\limits_{t_*}^{+\infty} p(\tau) \prod\limits_{j=0}^{n-k-1} \varphi_j\left(\mu_j \tau^{n-k-j}\right) d\tau$ збігаються та розбігаються одночасно. Тому справджується (2.1). Крім того, з врахування вигляду функції Φ та її властивостей, а також пропонування 6 з монографії [3] (гл.V, §3, с.293) про асимптотичне обчислення інтегралів, при $t \to +\infty$ маємо

$$\Phi(y^{(n-1)}(t)) = \alpha K^{1-\sigma_{n-1}} I(t)[1+o(1)]. \quad (2.5)$$

Використовуючи пропонування 2 з [4] (Appendix, p.123) та враховуючи те, що φ_{n-1} – правильно змінна при $y \to 0$ функція порядку $\sigma_{n-1} \neq 1$, отримаємо, що $\Phi(y) \sim \frac{1}{1-\sigma_{n-1}} \frac{y}{\varphi_{n-1}(y)}$ при $y \to 0$ і тоді

$$\lim_{y\to 0} \frac{y\Phi'(y)}{\Phi(y)} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{y}{\varphi_{n-1}(y)}}{\Phi(y)} = 1 - \sigma_{n-1}.$$

Звідси випливає, що $\mathrm{sign}\Phi(y) = \mathrm{sign}(y^0_{n-1}(1-\sigma_{n-1}))$ при $y \in \Delta Y_{n-1}$ та з врахуванням (2.5) маємо справедливість знакової умови (2.2). Крім того, отримали, що $\Phi(y)$ — правильно змінна при $y \to 0$ функція порядку $1-\sigma_{n-1}$ і, в силу властивостей правильно змінних функцій та умови $\sigma_{n-1} \neq 1$, зворотня до неї функція $\Phi^{-1}(z)$ — правильно змінна при $z \to Z_{n-1} = \lim\limits_{y\to 0} \Phi(y)$ функція порядку $\frac{1}{1-\sigma_{n-1}}$. Тоді, з врахуванням теореми про рівномірну збіжність (див.[1], гл.I, §1, с.10), з (2.5) випливає, що при $t \to +\infty$

$$y^{(n-1)}(t) = \Phi^{-1}(\alpha K^{1-\sigma_{n-1}} I(t)[1+o(1)]) =$$
$$= \Phi^{-1}(\alpha K^{1-\sigma_{n-1}} I(t))[1+o(1)] =$$
$$= K\Phi^{-1}(\alpha I(t))[1+o(1)],$$

тобто має місце останнє зображення з (2.4). Проінтегрувавши його на $[t_*, t]$, де $t_* = \max\{a_1, t_0\}$, отримаємо

$$y^{(n-2)}(t) = y^{(n-2)}(t_*) + K\int\limits_{t_*}^{t} \Phi^{-1}(\alpha I(\tau))[1+o(1)]d\tau.$$

Оскільки при $t \to +\infty$ $y^{(n-2)} \to Y_{n-2} = 0$, то інтеграл, що стоїть зправа, при $t \to +\infty$ має скінченну границю і тоді для $(n-2)$–ї похідної розв'язку має місце зображення з (2.4) і справджується (2.3) при $m = 0$.

Продовжуючи міркування аналогічним чином, встановлюємо справедливість всіх останніх $k-1$ зображень з (2.4) та збіжність інтегралів (2.3) при всіх $m=\overline{0,k-3}$. Проінтегрувавши отримане співвідношення для $(n-k+1)$–ї похідної на $[t_*,t]$, де $t_*=\max\{a_0,t_0\}$, маємо

$$y^{(n-k)}(t)=y^{(n-k)}(t_*)+ +K\int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_{+\infty}^{t_{k-2}}\dots\int\limits_{+\infty}^{t_1}\Phi^{-1}(\alpha I(\tau))[1+o(1)]dt_1\dots dt_{k-2}d\tau. \tag{2.6}$$

В силу припущення (1.5)

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_{+\infty}^{t_{k-2}}\dots\int\limits_{+\infty}^{t_1}\Phi^{-1}(\alpha I(\tau))[1+o(1)]dt_1\dots dt_{k-2}d\tau = \mathrm{const}$$

та за ознакою порівняння справджується (2.3) при $m=k-2$, а співвідношення (2.6) може бути переписано у вигляді 1–го зображення з (2.4).

Достатність. Припустивши, що справджуються умови (1.7) – (1.8), (2.1) – (2.3), виберемо довільним чином число $c\in\Delta Y_{n-k}$.

Застосовуючи до рівняння (1.1) перетворення

$$\begin{aligned}&y^{(j-1)}(t)=\tfrac{ct^{n-k-j+1}}{(n-k-j+1)!}\,[1+v_j(t)]\ (j=\overline{1,n-k}),\\&y^{(n-k)}(t)=c+KW_{k-1}(t)[1+v_{n-k+1}(t)],\\&y^{(j)}(t)=KW_{n-j-1}(t)[1+v_{j+1}(t)]\quad (j=\\&=\overline{n-k+1,n-1}),\end{aligned} \tag{2.7}$$

отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}v_j'=\frac{n-k-j+1}{t}[-v_j+v_{j+1}]\ (j=\overline{1,n-k-1}),\\ v_{n-k}'=-\frac{1}{t}v_{n-k}+\frac{KW_{k-1}(t)}{tc}v_{n-k+1}+\frac{KW_{k-1}(t)}{tc},\\ v_j'=\frac{W_{n-j-1}(t)}{W_{n-j}(t)}[-v_j+v_{j+1}]\ (j=\overline{n-k+1,n-1}),\\ v_n'=\frac{1}{W_0(t)}[-W_0'(t)[1+v_n]+\\ +\frac{\alpha}{K}p(t)\prod\limits_{j=0}^{n-k-1}\varphi_j\left(\frac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}[1+v_{j+1}]\right)\times\\ \times\varphi_{n-k}(c+KW_{k-1}(t)[1+v_{n-k+1}])\times\\ \times\prod\limits_{j=n-k+1}^{n-1}\varphi_j\left(KW_{n-j-1}(t)[1+v_{j+1}]\right)]\end{cases} \tag{2.8}$$

Розглянемо її на множині $\Omega^n=[t_0,+\infty[\times\mathbb{R}^n_{\frac12}$, де $\mathbb{R}^n_{\frac12}=\{(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n:|v_j|\le\frac12,\ j=\overline{1,n}\}$ і $t_0\ge a_1$ вибране з врахуванням (2.3) таким чином, щоб при $t>t_0$ і $(v_1,\dots,v_n)\in\mathbb{R}^n_{\frac12}$ виконувались умови:

$$\begin{aligned}&\tfrac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}\,[1+v_{j+1}]\in\Delta Y_j\ (j=\overline{0,n-k-1}),\\&c+KW_{k-1}(t)[1+v_{n-k+1}]\in\Delta Y_{n-k},\\&KW_{n-j-1}(t)[1+v_{j+1}]\in\Delta Y_j\ (j=\overline{n-k+1,n-1}).\end{aligned}$$

Оскільки функції $\varphi_j(y^{(j)})$ $(j=\overline{0,n-k-1})$ можуть бути представлені у вигляді (1.2), співвідношення (1.3) виконуються рівномірно по λ на будь-якому відрізку $[d_1,d_2]\subset]0,+\infty[$ і справджується (1.4), а також в силу неперервності функції $\varphi_{n-k}(y^{(n-k)})$ на ΔY_{n-k} і (2.3), маємо

$$\begin{aligned}&\varphi_j\left(\tfrac{ct^{n-k-j}}{(n-k-j)!}[1+v_{j+1}]\right)=\left|\tfrac{c}{(n-k-j)!}\right|^{\sigma_j}\times\\&\times\varphi_j(\mu_jt^{n-k-j})(1+v_{j+1})^{\sigma_j}(1+R_j(t,v_{j+1}))\\&(j=\overline{0,n-k-1}),\\&\varphi_j(KW_{n-j-1}(t)[1+v_{j+1}])=\\&=\varphi_j^0(1+R_j(t,v_{j+1}))\ (j=\overline{n-k+1,n-2}),\\&\varphi_{n-1}(KW_0(t)[1+v_n])=K^{\sigma_{n-1}}\varphi_{n-1}(W_0(t))\times\\&\times(1+v_n)^{\sigma_{n-1}}(1+R_{n-1}(t,v_n)),\\&\varphi_{n-k}(c+KW_{k-1}(t))[1+v_{n-k+1}]=\\&=\varphi_{n-k}(c)(1+R_{n-k}(t,v_{n-k+1})),\end{aligned}$$

де функції $R_j(t,v_{j+1})$ $(j=\overline{0,n-1})$ прямують до нуля при $t\to+\infty$ рівномірно по $v_{j+1}\in\left[-\frac12,\frac12\right]$. Крім того,

$$W_0'(t)=\varphi_{n-1}(W_0(t))\alpha KI'(t).$$

В силу цих зображень систему рівнянь (2.8) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases}v_j'=\frac{n-k-j+1}{t}[-v_j+v_{j+1}]\ (j=\overline{1,n-k-1}),\\ v_{n-k}'=-\frac{1}{t}v_{n-k}+\frac{KW_{k-1}(t)}{tc}v_{n-k+1}+\frac{KW_{k-1}(t)}{tc},\\ v_j'=\frac{W_{n-j-1}(t)}{W_{n-j}(t)}[-v_j+v_{j+1}]\ (j=\overline{n-k+1,n-1}),\\ v_n'=\frac{W_0'(t)}{W_0(t)}\left[\sum\limits_{j=1}^{n-k}\sigma_{j-1}v_j+(\sigma_{n-1}-1)v_n+\right.\\ \left.+\sum\limits_{k=1}^{2}Y_{nk}(t,v_1,\dots,v_n)\right],\end{cases} \tag{2.9}$$

де $Y_{n1}(t,v_1,...,v_n)=$
$$=R(t,v_1,...,v_n)(1+v_n)^{\sigma_{n-1}}\prod_{j=1}^{n-k}(1+v_j)^{\sigma_{j-1}},$$

$R(t,v_1,...,v_n){=}(1{+}R_0(t,v_1))...(1{+}R_{n-1}(t,v_n)){-}$ -1 при $t\to+\infty$ прямує до нуля рівномірно по $v_i\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ $(i=\overline{1,n})$,

$$Y_{n2}(t,v_1,...,v_n)=(1+v_n)^{\sigma_{n-1}}\prod_{j=1}^{n-k}(1+v_j)^{\sigma_{j-1}}-$$
$$-\sigma_{n-1}v_n\prod_{j=1}^{n-k}\sigma_{j-1}v_j-1.$$

Уважаючи в неї

$$\begin{array}{l} v_j=\delta z_j\ (j=\overline{1,n-k}),\\ v_j=z_j\ (j=\overline{n-k+1,n}), \end{array}\qquad(2.10)$$

де $\delta>0$ вибрано так, щоб справджувалась нерівність $0<\delta\sum\limits_{j=0}^{n-k-1}|\sigma_j|<|\sigma_{n-1}-1|$, отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} z_j'=\frac{n-k-j+1}{t}[-z_j+z_{j+1}]\ (j=\overline{1,n-k-1}),\\ z_{n-k}'=-\frac{1}{t}z_{n-k}+\frac{KW_{k-1}(t)}{\delta tc}z_{n-k+1}+\frac{KW_{k-1}(t)}{\delta tc},\\ z_{n-k+1}'=\frac{W_{k-2}(t)}{W_{k-1}(t)}[-z_{n-k+1}+\delta z_{n-k}],\\ z_j'=\frac{W_{n-j-1}(t)}{W_{n-j}(t)}[-z_j+z_{j+1}]\ (j=\overline{n-k+2,n-1}),\\ z_n'=\frac{W_0'(t)}{W_0(t)}\left[\delta\sum\limits_{j=1}^{n-k}\sigma_{j-1}z_j+(\sigma_{n-1}-1)z_n+\right.\\ \left.+\sum\limits_{k=1}^{2}Z_{nk}(t,z_1,\dots,z_n)\right] \end{cases}\qquad(2.11)$$

в якій $Z_{nk}(t,z_1,\dots,z_n)=Y_{nk}(t,\frac{1}{\delta}v_1,\dots,\frac{1}{\delta}v_{n-k},v_{n-k+1},\dots,v_n)$ $(k=1,2)$ і такі, що $\lim\limits_{t\to+\infty}Z_{n1}(t,z_1,\dots,z_n)=0$ рівномірно по $(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}_l^n=\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n: |z_j|\le l,\ j=\overline{1,n}\}$, $l=\min\left\{\frac{1}{2\delta},\frac{1}{2}\right\}$, $\lim\limits_{|z_1|+\ldots+|z_n|\to0}\frac{\partial Z_{n2}(t,z_1,\ldots,z_n)}{\partial z_k}=0$ $(k=\overline{1,n})$ рівномірно по $t\in[t_0,+\infty[$.

В силу вигляду $W_j(t)$ $(j=\overline{1,k-1})$ й (2.3) $\lim\limits_{t\to+\infty}W_j(t)=0$,

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty}\frac{W_{n-j-1}(t)dt}{W_{n-j}(t)}=\pm\infty\ (j=\overline{n-k+1,n-1}),$$
$$\int\limits_{t_0}^{+\infty}\frac{W_0'(t)dt}{W_0(t)}=\pm\infty$$

та при $t>t_0$

$$\frac{W_{n-j-1}(t)}{W_{n-j}(t)}<0\ (j=\overline{n-k+1,n-1}),$$

$$\begin{array}{l}\frac{W_0'(t)}{W_0(t)}(\sigma_{n-1}-1)<0,\ \text{ якщо }\operatorname{sign}I(t)=1,\\ \frac{W_0'(t)}{W_0(t)}(\sigma_{n-1}-1)>0,\ \text{ якщо }\operatorname{sign}I(t)=-1.\end{array}$$

При зазначеному виборі числа δ в силу описаних вище умов для системи (2.11) виконані всі умови теореми 1.2 з роботи [5]. Тоді в неї існує $q-$параметрична сім'я прямуючих до нуля при $t\to+\infty$ розв'язків $(z_j)_{j=1}^n:[t_1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}_l^n$ $(t_1\ge t_0)$, де

$$q=\begin{cases} n-k+1,\ \text{якщо }\operatorname{sign}I(t)=1,\\ n-k,\ \text{якщо }\operatorname{sign}I(t)=-1,\end{cases}$$

кожному з яких в силу перетворень (2.7) і (2.10) відповідає розв'язок вигляду (1.5) диференціального рівняння (1.1), що допускає асимптотичні зображення (2.4). Теорема доведена.

3. Висновки

У даній роботі для двочленного неавтономного звичайного диференціального рівняння n-го порядку з правильно змінними нелінійнстями (1.1) у випадку, коли границі $\varphi_i(y^{(i)})$ $(i=\overline{n-k+1,n-2})$ при $y^{(i)}\to Y_i$ дорівнюють додатним сталим, отримані необхідні та достатні умови існування розв'язків, для яких $(n-k)-$а похідна прямує до відмінної від нуля сталої при $t\to+\infty$.

При цьому були встановлені асимптотичні при $t\to+\infty$ формули для похідних таких типів розв'язків до порядку $n-1$ включно та з'ясоване питання про кількість розв'язків зі знайденими зображеннями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.

2. *Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.

3. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. — М.: Наука, 1965. — 424 с.

4. *Maric V.* Regular variation and differential equations (Seria: Lecture Notes in Mathematics Series). — Springer-Verlag. New York LLC, 2000. – 140 p.

5. *Евтухов В.М., Самойленко А.М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. ж. – 2010. – **62**, N1. – С. 52-80.