УДК 517.5

©2013 р. С. О. Чайченко

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ

ОБЕРНЕНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ ОРЛИЧА

Отримано аналог відомої нерівності Бернштейна для $(\psi;\beta)$-похідної відносно метрики вагових просторів Орлича. Використовуючи отриману нерівність, доведено обернені теореми теорії наближення в цих просторах.

We obtain an analog of known Bernstein's inequality for $(\psi;\beta)$-derivative in the metric of weighted Orlicz spaces. With its help we prove inverse theorems of the approximation theory in these spaces.

1. Означення і постановка задачі. Наведемо спочатку деякі відомості з теорії опуклих функцій і вагових просторів Орлича (див. [1, 2]).

Означення 1. *Неперервна опукла функція $\Phi : \mathbb{R} \mapsto [0;\infty)$ називається функцією Юнга, якщо Φ є парною і задовольняє умови*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Phi(x)}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\Phi(x)}{x}=\infty.$$

Означення 2. *Кажуть, що функція Юнга Φ задовольняє умову Δ_2 ($\Phi\in\Delta_2$), якщо існує стала $c>0$ така, що*

$$\Phi(2x)\le c\,\Phi(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Означення 3. *Невід'ємна функція $M = M(t)$, $t\ge 0$ називається квазіопуклою функцією Юнга, якщо існує опукла функція Юнга Φ і така стала $c>1$, що виконується нерівність*

$$\Phi(x)\le M(x)\le \Phi(cx),\quad \forall x\ge 0.$$

Позначимо через $\mathcal{QC}$ множину всіх квазіопуклих функцій Юнга.

Означення 4. *Нехай $M\in\mathcal{QC}$. Тоді через $\tilde{L}_{M,\omega}$ позначають клас 2π-періодичних вимірних за Лебегом функцій f, які задовольняють умову*

$$\int\limits_0^{2\pi} M(|f(x)|)\omega(x)dx<\infty,$$

де $\omega(x)$ — 2π-періодична вимірна і майже скрізь додатна функція (вага), а через $L_{M,\omega}$ позначають лінійну оболонку класу $\tilde{L}_{M,\omega}$.

Множина $L_{M,\omega}$ стає нормованим простором, якщо

$$\|f\|_{M,\omega} := \sup\left\{\int\limits_0^{2\pi}|f(t)g(t)|\omega(t)\,dt : \right.$$

$$\left. : \int\limits_0^{2\pi}\tilde{M}(|g(t)|)\omega(t)\,dt\le 1\right\},$$

де $\tilde{M}(y) := \sup_{x\ge 0}(xy - M(x))$, $y\ge 0$, — доповнювальна до $M(x)$ функція.

Кажуть, що вагова функція $\omega=\omega(t)$ належить до класу Макенхаупа A_p, $1<p<\infty$, якщо ω є 2π-періодичною і

$$\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b\omega(t)\,dt\right)\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b\frac{1}{\omega^{1/(p-1)}(t)}\,dt\right)^{p-1}\le$$

$$\le c,$$

де $[a,b]$ довільний відрізок з $[0,2\pi]$.

Для квазіопуклої функції M визначимо величину

$$\frac{1}{\wp(M)} := \inf\{\wp :\quad \wp>0,\ M^{\wp}\in\mathcal{QC}\},$$

$$\wp'(M) := \frac{\wp(M)}{\wp(M)-1},$$

яка вперше була введена в роботі [3]. Якщо $\omega\in A_{\wp(M)}$, то $L_{M,\omega}\subset L$, де L — простір 2π-періодичних сумовних на проміжку $[0,2\pi]$

функцій і $L_{M,\omega}$ стає банаховим простором з нормою Орлича. Банахів простір $L_{M,\omega}$ називається ваговим простором Орлича.

Через $\mathcal{QC}_2^\theta$ позначають клас функцій $M = M(t)$, які задовольняють умову Δ_2 і таких, що M^θ є квазіопуклою для довільного $\theta \in (0;1)$.

Нам також знадобиться визначення $(\psi;\beta)$-похідної і множин L^ψ_β, яке належить О.І. Степанцю [4, с. 142 – 143].

Означення 5. *Нехай $f \in L$ і*

$$S[f] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f,x) \qquad (1)$$

— її ряд Фур'є. Нехай, далі, $\psi(k)$ — довільна дійснозначна функція натурального аргументу і $\beta \in \mathbb{R}$. Припустимо, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)+ b_k(f)\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right) \qquad (2)$$

є рядом Фур'є деякої функції з L. Цю функцію позначають через $f^\psi_\beta(\cdot)$ (або $(D^\psi_\beta f)(\cdot)$) і називають $(\psi;\beta)$-похідною функції $f(\cdot)$, а множину функцій $f(\cdot)$, у яких існують $(\psi;\beta)$-похідні, позначають через L^ψ_β.

Через $L^\psi_\beta L_{M,\omega}$ будемо позначати множини $(\psi;\beta)$-диференційовних функцій $f \in L$, для яких $f^\psi_\beta \in L_{M,\omega}$.

Нехай $\mathfrak{M}$ — множина послідовностей дійсних чисел $\psi(k) > 0$, які задовольняють умови:

1. $\psi(k) - \psi(k+1) \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}$;
2. $\lim\limits_{k\to\infty}\psi(k) = 0$;
3. $\psi(k+2) - 2\psi(k+1) + \psi(k) > 0, \quad k \in \mathbb{N}$;

а $\mathfrak{M}'$ — підмножина функцій $\psi \in \mathfrak{M}$, для яких $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} < \infty$.

Тоді, якщо $\psi \in \mathfrak{M}'$ і $\beta \in \mathbb{R}$, то, як показано в монографії [4, с. 143 – 144], завжди знайдеться функція $f^\psi_\beta \in L^0$, $L^0 := \{\varphi \in L : \ \varphi \perp 1\}$, ряд Фур'є якої співпадає з (2). Відзначимо при цьому, що якщо $f^\psi_\beta \in L_{M,\omega} \cap L^0$, $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$ і $\omega \in A_{\wp(M)}$, то на підставі співвідношення (14) в сенсі збіжності за метрикою просторів $L_{M,\omega}$ виконується рівність

$$f^\psi_\beta(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)+ b_k(f)\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right). \qquad (3)$$

З розкладу (3) випливають формули зв'язку між коефіцієнтами Фур'є функцій f^ψ_β і f:

$$a_k(f) = \psi(k)\left(a_k(f^\psi_\beta)\cos\frac{\beta\pi}{2} - b_k(f^\psi_\beta)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad (4)$$

$$b_k(f) = \psi(k)\left(a_k(f^\psi_\beta)\sin\frac{\beta\pi}{2} + b_k(f^\psi_\beta)\cos\frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad (5)$$

і

$$a_k(f^\psi_\beta) = \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2} + b_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad (6)$$

$$b_k(f^\psi_\beta) = \frac{1}{\psi(k)}\left(b_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2} - a_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right). \qquad (7)$$

У цій роботі отримано аналог відомої нерівності Бернштейна для $(\psi;\beta)$-похідної відносно метрики просторів $L_{M,\omega}$. Використовуючи цю нерівність, доведено обернені теореми теорії наближення на множинах $L^\psi_\beta L_{M,\omega}$.

2. Допоміжні твердження. Позначимо, як звичайно,

$$S_n(f;x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos\ kx + b_k(f)\sin\ kx),\ n = 0,1,\ldots, \qquad (8)$$

— частинні суми ряду Фур'є порядку n функції f.

Сформулюємо твердження з книги [1, с. 278], яке носить допоміжний характер і використовуватиметься при доведенні основних результатів цієї роботи.

Теорема А. *Якщо $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$ і $\omega \in A_{\wp(M)}$, то для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$ і довільного натурального n виконуються нерівності*

$$\int_0^{2\pi} M(|S_n(f;t)|)\omega(t)\,dt \le$$

$$\le C\int_0^{2\pi} M(|f(t)|)\omega(t)\,dt, \qquad (9)$$

і

$$\int_0^{2\pi} M(|\tilde{f}(t)|)\omega(t)\,dt \le C\int_0^{2\pi} M(|f(t)|)\omega(t)\,dt, \qquad (10)$$

де $\tilde{f}$ — функція, тригонометрично спряжена з f і C — додатна стала, яка не залежить від f і n.

З теореми А, зокрема, випливає, що оператори Фур'є і тригонометричного спряження є рівномірно обмеженими відносно $n \in \mathbb{N}$ в просторі $L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$, $\omega \in A_{\wp(M)}$, тобто для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$, $\omega \in A_{\wp(M)}$,

$$\|S_n(f)\|_{M,\omega} \le C\|f\|_{M,\omega}, \qquad (11)$$

$$\|\tilde{f}\|_{M,\omega} \le C\|f\|_{M,\omega}. \qquad (12)$$

Позначимо через

$$E_n(\varphi)_{M,\omega} := \inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{n-1}} \|\varphi - t_{n-1}\|_{M,\omega}, \varphi \in L_{M,\omega},$$

— найкраще наближення функції φ за допомогою підпростору $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометричних поліномів порядку, не вище $n-1$. У роботі [5, лема 3] показано, що для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$ і довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться тригонометричний поліном $T(x)$, для якого

$$\int_0^{2\pi} M(|f(x) - T(x)|)\omega(x)\,dx < \varepsilon.$$

Це означає, що

$$\|f - T\|_{M,\omega} < \varepsilon,$$

звідки отримуємо

$$E_n(f)_{M,\omega} \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (13)$$

Із співвідношень (11), (12) і (13) випливає, що за умов теореми А

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{M,\omega} \to 0, \quad n \to \infty, \qquad (14)$$

і

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{M,\omega} = \mathcal{O}(1)E_n(f)_{M,\omega} = \qquad (15)$$

$$= \mathcal{O}(1)E_n(\tilde{f})_{M,\omega},$$

де $\mathcal{O}(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно n.

Далі знадобитися наступне твердження, яке також носить допоміжний характер, але й не позбавлене самостійного інтересу. Позначимо через $\mathfrak{M}^*$ множину послідовностей $\psi(k) > 0$, які задовольняють тільки перші дві умови з визначення множини $\mathfrak{M}$, тобто:

$$\mathfrak{M}^* = \big\{\{\psi(k)\}_{k=1}^\infty : (\forall k \in \mathbb{N})(\psi(k) - \psi(k+1) > 0),$$

$$\lim_{k\to\infty} \psi(k) = 0\big\}.$$

Лема 1. *Нехай $\psi \in \mathfrak{M}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$ і $\omega \in A_{\wp(M)}$. Тоді для довільного тригонометричного полінома T_n порядку, не вище n, виконується нерівність*

$$\|D_\beta^\psi T_n\|_{M,\omega} \le \frac{K}{\psi(n)}\|T_n\|_{M,\omega}, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad (16)$$

де $1/\psi(0) := 0$, а K — додатна стала, яка не залежить від β і n.

Співвідношення (16) є аналогом класичної нерівності для максимуму модуля похідної тригонометричного полінома, отриманої С.Н. Бернштейном в роботі [6]. Надалі ця нерівність уточнювалася і узагальнювалася в роботах багатьох авторів. З основними результатами щодо нерівності С.Н. Бернштейна і коментарями до них можна ознайомитися, наприклад, у книзі М.П. Корнійчука , В.Ф. Бабенко і А.О. Лигуна [7] (див., також, монографії О.П. Тімана [8] , Н.І. Ахієзера [9]) . Відзначимо також, що за умови $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, лема 1 доведена в роботі [10]. У випадку метрики просторів L_p, $1 \le p \le \infty$ і $\omega(t) \equiv 1$, нерівність (16) отримано О.І. Степанцем і О.К. Кушпелем в статті [11] .

Доведення. Якщо

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

— тригонометричний поліном порядку, не вище n, то відповідно до рівності (3)

$$(D^{\psi}_{\beta}T_n)(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\psi(k)}a_k\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)+$$

$$+b_k\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)}\bigg(a_k\cos kx+$$

$$+b_k\sin kx\bigg)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)}\bigg(a_k\sin kx-b_k\cos kx\bigg)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)}A_k(T_n;x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\beta\pi}{2}}{\psi(k)}A_k(\tilde{T}_n;x)=$$

$$=\cos\frac{\beta\pi}{2}(D^{\psi}_{0}T_n)(x)-\sin\frac{\beta\pi}{2}(D^{\psi}_{0}\tilde{T}_n)(x). \quad (17)$$

Покладемо

$$R^{\psi}_{m}(\varphi;x):=\sum_{k=0}^{m-1}\left[1-\frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right]A_k(\varphi;x), \quad (18)$$

де $m=1,2,\ldots$, і $1/\psi(0):=0$.

З рівності (17) випливає, що функція

$$\varphi_1(x):=\psi(n)(D^{\psi}_{0}T_n)(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(n)}{\psi(k)}A_k(T_n;x),$$

є тригонометричним поліномом порядку, не вище n (тобто $A_k(\varphi_1;x)\equiv 0, \quad k>n$). Враховуючи це, використовуючи перетворення Абеля, для довільного натурального числа $m\geq n$ отримуємо

$$R^{\psi}_{m}(\varphi_1;x)=\sum_{k=0}^{m-1}\left[1-\frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right]A_k(\varphi_1;x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left[1-\frac{\psi(m)}{\psi(k)}\right]\frac{\psi(n)}{\psi(k)}A_k(T_n;x)=$$

$$=\psi(n)\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\psi(k)}-\frac{1}{\psi(k+1)}\right]\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{k}\left[1-\frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right]A_i(T_n;x)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\left[1-\frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right]A_i(T_n;x)=$$

$$=\psi(n)\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{\psi(k)}-\frac{1}{\psi(k+1)}\right]r^{\psi,m}_{k}(T_n;x)+$$

$$+r^{\psi,m}_{n}(T_n;x), \quad (19)$$

де

$$r^{\psi,m}_{k}(T_n;x):=\sum_{i=0}^{k}\left[1-\frac{\psi(m)}{\psi(i)}\right]A_i(T_n;x),$$

$$k=0,1,\ldots,n.$$

Знову скориставшись перетворенням Абеля, матимемо

$$r^{\psi,m}_{k}(T_n;x)=\psi(m)\sum_{i=0}^{k-1}\left[\frac{1}{\psi(i+1)}-\frac{1}{\psi(i)}\right]\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{i}A_j(T_n;x)+\psi(m)\left[\frac{1}{\psi(m)}-\frac{1}{\psi(k)}\right]\sum_{j=0}^{k}A_j(T_n;x)=$$

$$=\psi(m)\sum_{i=0}^{k-1}\left[\frac{1}{\psi(i+1)}-\frac{1}{\psi(i)}\right]S_i(T_n;x)$$

$$+\psi(m)\left[\frac{1}{\psi(m)}-\frac{1}{\psi(k)}\right]S_k(T_n;x).$$

Звідси, враховуючи монотонність послідовності $\psi(k)$ і співвідношення (11), отримуємо нерівність

$$\|r^{\psi,m}_{k}(T_n;\cdot)\|_{M,\omega}\leq$$

$$\leq K\psi(m)\sum_{i=0}^{k-1}\left[\frac{1}{\psi(i+1)}-\frac{1}{\psi(i)}\right]\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}+$$

$$+K\psi(m)\left[\frac{1}{\psi(m)}-\frac{1}{\psi(k)}\right]\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}\leq$$

$$\leq K\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}, \quad (20)$$

де $K=K_M$ — додатна величина, яка залежить від функції M.

Застосовуючи тепер оцінку (20) до рівності (19), для довільного натурального числа $m\geq n$ знаходимо

$$\|R^{\psi}_{m}(\varphi_1;\cdot)\|_{M,\omega}\leq K\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}. \quad (21)$$

Аналогічно, для функції

$$\varphi_2(x) := \psi(n)(D_0^{\psi}\tilde{T}_n)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi(n)}{\psi(k)} A_k(\tilde{T}_n; x),$$

враховуючи співвідношення (12), для довільного натурального числа $m \geq n$ отримуємо, що

$$\|R_m^{\psi}(\varphi_2; \cdot)\|_{M,\omega} \leq K\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}. \qquad (22)$$

Покладемо

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi; x) := \frac{\psi(m_1)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} R_{m_2}^{\psi}(\varphi; x)$$

$$-\frac{\psi(m_2)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} R_{m_1}^{\psi}(\varphi; x), \qquad (23)$$

де $m_1 < m_2 \in \mathbb{N}$, а $R_m^{\psi}(\varphi; x)$ — величина, яка визначається у співвідношенні (18).

Вважаючи, що послідовності $\psi(k)$ з множини $\mathfrak{M}$ є звуженнями на множину натуральних чисел неперервних функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу $t \geq 1$, відповідно до [4, с. 159] через $\eta(t) = \eta(\psi; t)$ позначимо функцію, яка пов'язана з ψ рівністю

$$\psi(\eta(t)) = \frac{1}{2}\psi(t), \quad t \geq 1.$$

Звідси, внаслідок строгої монотонності та спадання до нуля ψ, функція $\eta(t)$ для всіх $t \geq 1$ визначається однозначно

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right), \qquad (24)$$

де ψ^{-1} — функція, обернена до ψ.

Нехай тепер $m_1 = n$ і $m_2 = [\eta(n)]$, где $[a]$ — ціла частина числа a. Тоді виконуються співвідношення

$$\frac{\psi(m_1)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} = \mathcal{O}(1),$$

$$\frac{\psi(m_2)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} = \mathcal{O}(1). \qquad (25)$$

На підставі співвідношень (21) – (25), знаходимо, що

$$\|Q_{n,[\eta(n)]}^{\psi}(\varphi_i; \cdot)\|_{M,\omega} \leq K\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}, \qquad (26)$$

$$n = 1, 2, \ldots, \; i = 1, 2.$$

Оскільки справедлива рівність

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi; x) = \frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{m_2-1} \left(\frac{1}{\psi(m_2)} - \frac{1}{\psi(k)}\right) A_k(\varphi; x) -$$

$$-\frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} \sum_{k=0}^{m_1-1} \left(\frac{1}{\psi(m_1)} - \frac{1}{\psi(k)}\right) A_k(\varphi; x),$$

яка за допомогою перетворення Абеля приймає вигляд

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi; x) = \frac{\psi(m_1)\psi(m_2)}{\psi(m_1) - \psi(m_2)} \times$$

$$\times \sum_{k=m_1}^{m_2-1} \left(\frac{1}{\psi(k+1)} - \frac{1}{\psi(k)}\right) S_k(\varphi; x),$$

то для довільного тригонометричного полінома T_m, порядок якого неперевищує m_1, матимемо

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(T_m; x) = T_m(x). \qquad (27)$$

Беручи тепер до уваги те, що

$$Q_{m_1,m_2}^{\psi}(c\varphi; x) = cQ_{m_1,m_2}^{\psi}(\varphi; x), \quad c = \text{const},$$

враховуючи співвідношення (17), (26) і (27), знаходимо, що

$$\|(D_{\beta}^{\psi}T_n)(\cdot)\|_{M,\omega} \leq \|(D_0^{\psi}T_n)(\cdot)\|_{M,\omega} +$$

$$+\|(D_0^{\psi}\tilde{T}_n)(\cdot)\|_{M,\omega} = \left\|\frac{1}{\psi(n)} Q_{n,[\eta(n)]}^{\psi}(\varphi_1; \cdot)\right\|_{M,\omega} +$$

$$+\left\|\frac{1}{\psi(n)} Q_{n,[\eta(n)]}^{\psi}(\varphi_2; \cdot)\right\|_{M,\omega} \leq \frac{K}{\psi(n)}\|T_n(\cdot)\|_{M,\omega}, \qquad (28)$$

$n = 0, 1, \ldots$, що й потрібно було довести. Теорема доведена.

Зауважимо, що нерівність (16) є непокращуваною за порядком, оскільки для тригонометричного полінома $t_n^*(x) = \cos nx$ будемо мати

$$(D_0^{\psi}t_n^*)(x) = \frac{1}{\psi(n)} \cos nx$$

і

$$\|D_0^{\psi}t_n^*)\|_{M,\omega} = \|\frac{1}{\psi(n)} \cos nx\|_{M,\omega} = \frac{1}{\psi(n)}\|t_n^*\|_{M,\omega}.$$

Добре відомо (див., наприклад [4, с. 133]), що у випадку, коли $\psi_r(k) = k^{-r}$, $r > 0$, множини L^ψ_β збігаються з множинами W^r_β функцій, диференційовних в розумінні Вейля-Надя. Позначивши через $D^r_\beta(T_n)$ $(r;\beta)$-похідну Вейля-Надя тригонометричного полінома T_n і враховуючи очевидну належність $\psi_r(k) \in \mathfrak{M}^*$, $r > 0$, лему 1 можна записати в наступному вигляді.

Лемма 1$'$. *Нехай $M \in \mathcal{QC}^\theta_2$, $\omega \in A_{\wp(M)}$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільного тригонометричного полінома T_n порядку, не вище n, виконується нерівність*

$$\|D^r_\beta(T_n)\|_{M,\omega} \leq \frac{K}{n^r}\|T_n\|_{M,\omega}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

де $1/0 := 0$, а K — додатна стала, яка не залежить від β і n.

3. Основні результати. Використовуючи лему 1 можна довести так звані обернені теореми теорії наближення на множинах L^ψ_β, $L_{M,\omega}$. Для формулювання результатів будемо використовувати визначення множин $\mathfrak{M}_0$ і F, які належать О.І. Степанцю ([4, с. 160, с. 165]):

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad 0 < \frac{t}{\eta(\psi;t) - t} \leq K,\ t \geq 1\},$$

$$F = \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad \eta'(\psi;t) \leq K\},$$

де $\eta(\psi;t)$ є функція, визначена у співвідношенні (24).

Теорема 1. *Нехай $M \in \mathcal{QC}^\theta_2$, $\omega \in A_{\wp(M)}$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$ матимемо:*

1. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega}|\psi(k)|^{-1}$$

збігається, то існує похідна f^ψ_β, така що

$$E_n(f^\psi_\beta)_{M,\omega} \leq C_1 \sum_{k=n}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega}|\psi(k)|^{-1}. \quad (29)$$

2. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega}|k\psi(k)|^{-1}$$

збігається, то існує похідна f^ψ_β, така що

$$E_n(f^\psi_\beta)_{M,\omega} \leq C_2 \Bigg(\frac{E_n(f)_{M,\omega}}{\psi(n)} + $$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega}|k\psi(k)|^{-1}\Bigg). \quad (30)$$

3. Якщо $\psi \in F$, $\eta(\psi;t) - t \geq K > 0$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega}|\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1}$$

збігається, то існує похідна f^ψ_β, така що

$$E_n(f^\psi_\beta)_{M,\omega} \leq C_3 \Bigg(\frac{E_n(f)_{M,\omega}}{\psi(n)} + $$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega}|\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1}\Bigg), \quad (31)$$

де $n \in \mathbb{N}$, C_i, $i = 1, 2, 3$, величини, рівномірно обмежені відносно f, β і n.

Якщо $\psi(n) = n^{-\alpha}$, $\beta = \alpha$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то тоді твердження теореми 1 співпадає з теоремою 2.13 з роботи [10]. О.І. Жукіна [12] і О.І. Степанець [13] отримали аналогічний результат для монотонних послідовностей ψ відносно метрик просторів L_p, $1 < p < \infty$. Результат для $\psi(n) = n^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ і $1 < p < \infty$ було встановлено в роботі [14]. Для $\psi(n) = n^{-r}$, $\beta = r$, $r \in \mathbb{N}$ і $1 < p < \infty$ теорема 1 була доведена О.П. Тіманом [8].

Доведення. Для доведення теореми будемо використовувати схему, запропоновану в книзі [15, с. 120 – 126]. Переконаємося спочатку у справедливості твердження пункту 1 теореми. Нехай $\{t_n(\cdot)\}_{n=1}^\infty$ — послідовність тригонометричних поліномів, які здійснюють найкраще наближення функції $f \in L_{M,\omega}$. Тоді ряд

$$t_n(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} (t_k(x) - t_{k-1}(x)) \quad (32)$$

збігається до $f(x)$ за нормою простору $L_{M,\omega}$, і його частинні суми T_m при $m > n$ співпадають з поліномами $t_m(x)$.

Доведемо, що ряд

$$(D^{\psi}_{\beta}t_n)(x)+\sum_{k=n+1}^{\infty}(D^{\psi}_{\beta}(t_k-t_{k-1}))(x) \quad (33)$$

збігається до суми $T(x)$, що має ряд Фур'є вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+b_k(f)\sin\left(kx+\frac{\beta\pi}{2}\right)\right). \quad (34)$$

Тим самим, існування похідної $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$ буде встановлено. Оскільки різниця $u_k(x)=t_k(x)-t_{k-1}(x)$ є поліномом порядку k, то застосовуючи лему 1 отримуємо

$$\|(D^{\psi}_{\beta}u_k)(\cdot)\|_{M,\omega}\le\frac{C}{|\psi(k)|}\|u_k(\cdot)\|_{M,\omega}\le\frac{C}{|\psi(k)|}\times$$

$$\times\left(\|t_k(\cdot)-f(\cdot)\|_{M,\omega}+\|f(\cdot)-t_{k-1}(\cdot)\|_{M,\omega}\right)\le$$

$$\le 2CE_k(f)_{M,\omega}|\psi(k)|^{-1}, \quad (35)$$

де C — додатна константа, яка не залежить від f, β і n. Звідси випливає, що

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\|(D^{\psi}_{\beta}u_k)(\cdot)\|_{M,\omega}\le$$

$$\le C\sum_{k=n+1}^{\infty}E_k(f)_{M,\omega}|\psi(k)|^{-1}, \quad (36)$$

причому за умовою пункту 1 теореми ряд у правій частині нерівності (36) збігається. Це означає, що ряд (33) також збігається в просторі $L_{M,\omega}$ до деякої функції $T(x)\in L_{M,\omega}$.

Нехай $a^{(n)}_k=a_k(t_n)$ і $b^{(n)}_k=b_k(t_n)$, $k=0,1,2,\ldots,$ — коефіцієнти Фур'є поліномів $t_n(\cdot)$. Тоді у відповідності з рівностями (4) і (5) коефіцієнти $\alpha^{(n)}_k$ і $\beta^{(n)}_k$ поліномів $(D^{\psi}_{\beta}t_k)(\cdot)$ мають вигляд

$$\alpha^{(n)}_k=\frac{1}{\psi(k)}\left(a^{(n)}_k\cos\frac{\beta\pi}{2}+b^{(n)}_k\sin\frac{\beta\pi}{2}\right) \quad (37)$$

$$\beta^{(n)}_k=\frac{1}{\psi(k)}\left(b^{(n)}_k\cos\frac{\beta\pi}{2}-a^{(n)}_k\sin\frac{\beta\pi}{2}\right). \quad (38)$$

Оскільки рівність

$$T(x)=\lim_{n\to\infty}(D^{\psi}_{\beta}t_n)(x)$$

виконується відносно метрики просторів $L_{M,\omega}$, то

$$a_k(T)=\lim_{n\to\infty}\alpha^{(n)}_k,\quad b_k(T)=\lim_{n\to\infty}\beta^{(n)}_k,$$

$$k=0,1,\ldots\ .$$

Беручи до уваги те, що

$$\lim_{n\to\infty}a^{(n)}_k=a_k(f),\quad \lim_{n\to\infty}b^{(n)}_k=b_k(f),$$

$$k=0,1,\ldots\ ,$$

з рівностей (37) – (38) отримуємо

$$a_k(T)=\frac{1}{\psi(k)}\left(a_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2}+b_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right)$$

$$b_k(T)=\frac{1}{\psi(k)}\left(b_k(f)\cos\frac{\beta\pi}{2}-a_k(f)\sin\frac{\beta\pi}{2}\right).$$

Звідси випливає, що ряд Фур'є функції $T(x)$ співпадає з рядом (34). Це означає, що функція $f(x)$ має $(\psi;\beta)$-похідну $f^{\psi}_{\beta}(x)$, яка належить простору $L_{M,\omega}$, і при кожному $n\in\mathbb{N}$ виконується рівність

$$f^{\psi}_{\beta}(x)=(D^{\psi}_{\beta}t_n)(x)+\sum_{k=n+1}^{\infty}(D^{\psi}_{\beta}[t_k-t_{k-1}])(x), \quad (39)$$

відносно метрики простору $L_{M,\omega}$.

Для завершення доведення пункту 1 теореми залишилося зауважити, що нерівність(29) випливає зі співвідношення (39), з урахуванням оцінки (36).

Для доведення пунктів 2 і 3 теореми будемо використовувати ту ж саму схему. Нехай $\{t_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ — послідовність тригонометричних поліномів, які здійснюють найкраще наближення функції f в просторі $L_{M,\omega}$. Покладемо для кожного натурального n

$$n_0=n, n_1=[\eta(n)]+1,\ldots,n_k=[\eta(n_{k-1})]+1,\ldots.$$

Тоді ряд

$$t_{n_0}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(t_{n_k}(x)-t_{n_{k-1}}(x))$$

буде збігатися до функції f в просторі $L_{M,\omega}$. Розглянемо ряд

$$(D^{\psi}_{\beta} t_{n_0})(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (D^{\psi}_{\beta}[t_{n_k} - t_{n_{k-1}}])(x) \quad (40)$$

і переконаємося, що він буде збігатися в просторі $L_{M,\omega}$ до суми $T(x)$, ряд Фур'є якої має вигляд (34). Застосовуючи нерівність (16) до різниці $u_k(x) = t_{n_k}(x) - t_{n_{k-1}}(x)$, одержуємо

$$\|(D^{\psi}_{\beta} u_k)(\cdot)\|_{M,\omega} \le C E_{n_{k-1}+1}(f)_{M,\omega} |\psi(n_k)|^{-1},$$

внаслідок чого

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|(D^{\psi}_{\beta} u_k)(\cdot)\|_{M,\omega} \le C\Bigg(E_{n+1}(f)_{M,\omega}(\psi(n))^{-1} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} E_{n_k+1}(f)_{M,\omega} |\psi(n_k)|^{-1}\Bigg). \quad (41)$$

Використовуючи оцінку (див. [15, с. 124 – 125])

$$\frac{E_{n_k+1}(f)}{\psi(n_k)} \le \sum_{\nu=n_{k-1}}^{n_k-1} \frac{E_{\nu+1}(f)}{\nu\psi(\nu)}, \quad \psi \in \mathfrak{M}_0,$$

зі співвідношення (41) отримуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|(D^{\psi}_{\beta} u_k)(\cdot)\|_{M,\omega} \le C\Bigg(E_{n+1}(f)_{M,\omega}(\psi(n))^{-1} + \\ + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_{k}(f)_{M,\omega} |k\psi(k)|^{-1}\Bigg). \quad (42)$$

Відповідно до умов пункту 2 теореми, ряд з правої частини нерівності(42) збігається. Звідси випливає, що і ряд (40) буде збігатися в просторі $L_{M,\omega}$ до деякої функції $f \in L_{M,\omega}$ і для закінчення доведення пункту 2 теореми, залишилося показати, що $S[T] = S[f^{\psi}_{\beta}]$. Для цього повторимо міркування, які були використані для отримання рівності (39), і отримаємо нерівність (30) шляхом застосування аналогу рівності (39) і співвідношення (42).

Доведення пункту 3 теореми проводиться аналогічно, з урахуванням наступного аналогу нерівності (42), отриманого в монографії [15, с. 125 – 126]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|(D^{\psi}_{\beta} u_k)(\cdot)\|_{M,\omega} \le C\Bigg(E_{n+1}(f)_{M,\omega}(\psi(n))^{-1} + \\ + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_{k}(f)_{M,\omega} |\psi(k)(\eta(k)-k)|^{-1}\Bigg).$$

Теорему доведено.

Нехай $f \in L_{M,\omega}$, $M \in \mathcal{QC}^{\theta}_2$, $\omega \in A_{\wp(M)}$ і

$$f_h(x) := \frac{1}{h} \int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(t)\,dt, \quad 0 < h < 1,\ x \in [0; 2\pi],$$

оператор Стєклова функції f. В роботі [1] було отримано наступне твердження.

Теорема B. *Якщо $M \in \mathcal{QC}^{\theta}_2$ і $\omega \in A_{\wp(M)}$, то для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$ виконується нерівність*

$$\int_0^{2\pi} M(|f_h(t)|)\omega(t)\ dt \le C \int_0^{2\pi} M(|f(t)|)\omega(t)\ dt, \quad (43)$$

де C — додатна стала, яка не залежить від f.

Враховуючи теорему B, в роботі [10] були введені до розгляду модулі неперервності дробового порядку

$$\Omega_{\alpha}(f;\delta)_{M,\omega} := \sup_{h_i, h<\delta} \left\| \prod_{i=1}^{[\alpha]} (f - f_{h_i}) \sigma^{\beta}_h(f) \right\|_{M,\omega},$$

$$\beta = \alpha - [\alpha],$$

$$\sigma^{\beta}_h(f) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\beta}{k} \frac{1}{h^k} \int_{-h/2}^{h/2} \ldots \int_{-h/2}^{h/2} f(x + \sum_{j=1}^{k} u_k) \prod_{j=1}^{k} du_k,$$

$$\binom{\beta}{k} := \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-k+1)}{k!},\ k > 1;$$

$$\binom{\beta}{1} := \beta; \quad \binom{\beta}{0} := 1,\ \ 0 < \beta < 1,$$

і для цих величин було доведено наступне твердження.

Теорема C. *Нехай $M \in \mathcal{QC}^{\theta}_2$ і $\omega \in A_{\wp(M)}$. Тоді якщо $\alpha > 0$ і $f \in L_{M,\omega}$, то для $n = 0, 1, \ldots,$ виконується нерівність*

$$\Omega_{\alpha}\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right)_{M,\omega} \le \\ \le \frac{K}{(n+1)^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\alpha-1} E_k(f)_{M,\omega}, \quad (44)$$

де K – додатна величина, яка не залежить від f і n.

Використовуючи теореми 1 і C, отримуємо.

Теорема 2. *В умовах теореми 1 для довільного $\alpha > 0$ мають місце такі твердження.*

1. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} |\psi(k)|^{-1}$$

збігається, то існує похідна f_β^ψ для якої

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1}\right)_{M,\omega} \leq$$

$$\leq C_1\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^\alpha}{\psi(k)} E_k(f)_{M,\omega} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(f)_{M,\omega}}{\psi(k)}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (45)$$

2. Якщо $\psi \in \mathfrak{M}_0$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} |k\psi(k)|^{-1}$$

збігається, то існує похідна f_β^ψ для якої

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1}\right)_{M,\omega} \leq$$

$$\leq C_2\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^{\alpha-1}}{\psi(k)} E_k(f)_{M,\omega} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(f)_{M,\omega}}{k\psi(k)}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (46)$$

3. Якщо $\psi \in F$, $\eta(\psi; t) - t \geq K > 0$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} |\psi(k)(\eta(k) - k)|^{-1}$$

збігається, то існує похідна f_β^ψ для якої

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1}\right)_{M,\omega} \leq C_3\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha} \times \right.$$

$$\times \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^\alpha}{\psi(k)(\eta(k) - k)} E_k(f)_{M,\omega} +$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{E_k(f)_{M,\omega}}{\psi(k)(\eta(k) - k)}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (47)$$

де C_i, $i = 1, 2, 3$, – величини, які не залежать від f, β і n.

Доведення. Застосовуючи теорему C до функції f_β^ψ, існування якої гарантовано теоремою 1, і оцінюючи величини найкращих наближень $(\psi; \beta)$-похідної $E_k(f_\beta^\psi)_{M,\omega}$ за допомогою співвідношення(29), отримуємо

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1}\right)_{M,\omega} \leq$$

$$\leq \frac{C}{(n+1)^\alpha} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\alpha-1} \sum_{j=k}^{\infty} E_j(f)_{M,\omega} |\psi(j)|^{-1}.$$

Беручи до уваги тотожність

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=k}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{j=0}^{k} a_j + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \sum_{j=0}^{n} a_j,$$

і нерівність

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \sum_{j=0}^{k} (j+1)^{\alpha-1} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{j+1}{k+1}\right)^{\alpha-1} \leq$$

$$\leq 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

отримуємо оцінку (45). Пункти 2 і 3 теореми доводяться аналогічно.

Враховуючи належність $\psi_r(k) \in \mathfrak{M}_0$, з теорем 1 і 2 отримуємо наслідки.

Наслідок 1. *Нехай $M \in \mathcal{QC}_2^\theta$, $\omega \in A_{\wp(M)}$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільної функції $f \in L_{M,\omega}$ і $r > 0$ за умови, що ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} k^{r-1}$$

збігається, існує така похідна f_β^r, що

$$E_n(f_\beta^\psi)_{M,\omega} \leq C\left(E_n(f)_{M,\omega} n^r + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} E_k(f)_{M,\omega} k^{r-1}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наслідок 2. *В умовах наслідку 1 для довільного $\alpha > 0$ існує похідна f_β^r для якої*

$$\Omega_\alpha\left(f_\beta^\psi; \frac{\pi}{n+1}\right)_{M,\omega} \le$$

$$\le C\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{r+\alpha-1}E_k(f)_{M,\omega}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n+1}^{\infty}E_k(f)_{M,\omega}k^{r-1}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Зазначимо, що у випадку $\beta = r$ твердження наслідків 1 і 2 співпадають, відповідно, з твердженнями теорем 2.13 і 2.14 роботи [10].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Genebashvili I., Gogatishvili A., Kokilashvili V.Krbec M. Weight Theory for Integral Transforms on Spaces of Homogeneous Type. — Longman, Harlow, UK: vol. 92 of Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. — 1998.

2. Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958. — 271 с.

3. Gogatishvili A., Kokilashvili V. Criteria of weighted inequalities in Orlicz classes for maximal functions defined on homogeneous type spaces // Georgian Mathematical Journal. — 1994.— **1,** № 6. — P. 641–673.

4. Степанец А.И. Методы теории приближений. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. — 427 с.

5. Khabazi M. The mean convergence of trigonometric Fourier series in weighted Orlicz classes // Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute. – 2002. – **129.** — P. 65 -– 75.

6. Бернштейн С.Н. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (1912). — Собрание сочинений, Изд. АН СССР. — т. I. (1952) — С. 11 – 104.

7. Корнейчук Н.П., Бабенко В.Ф., Лигун А.А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. — Киев: Наукова думка, 1992. — 304 с.

8. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — М.: Физматгиз, 1960. — 624 с.

9. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука 1965. — 407 с.

10. Akgün R. Approximating polynomials for functions of Weighted Smirnov-Orlicz spaces // Jorn. of funct. spacas and applic. — 2012. — P. 1 – 41.

11. Степанец А.И., Кушпель А.К. Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p // Укр. мат. журн. — 1987. — **39,** № 4. — С. 483 – 492.

12. Жукина Е.И. Теоремы вложения // Приближение периодических функций в метрике пространсва L_p. — Киев, 1987. — С. 3 – 32. — (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 87.47)

13. Степанец А.И. Обратные теоремы приближения периодических функций // Укр. мат. журн. — 1995. — **47,** № 9. — С. 1266 – 1273.

14. Конюшков А.А. Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сборник. — 1958. — **44 (86),** № 1. — С. 53 – 84.

15. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 т. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.