УДК 517.956.4

©2016 р. С. Д. Івасишен[1], І. П. Мединський[2], Г. С. Пасічник[3]

[1]Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”,
[2]Національний університет “Львівська політехніка”,
[3]Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМИ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Наведено короткий огляд результатів учнів С. Д. Ейдельмана, що стосуються побудови, дослідження і застосування фундаментального розв’язку задачі Коші для параболічних і деяких ультрапараболічних типу Колмогорова рівнянь з виродженнями на початковій гіперплощині.

A brief review of results of S. D. Eidelman’s disciples is presented. These results relate to construction, research and application of fundamental solution of the Cauchy problem for parabolic and some ultraparabolic Kolmogorov equations with degenerations on initial hyperplane.

Вступ. У зв’язку з відзначенням у 2016 р. 70-річчя кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького університету принагідно згадати її фундаторів, які започаткували перспективні напрямки наукових досліджень. Одним із таких фундаторів був С. Д. Ейдельман, який, працюючи в Чернівцях, запропонував і почав активно розробляти низку актуальних проблем теорії параболічних рівнянь. Отримані ним і його учнями результати добре відомі світовій математичній громадськості. У цій статті наводиться короткий огляд одержаних учнями С. Д. Ейдельмана результатів дослідження параболічних рівнянь, які мають виродження на гіперплощині задання початкових даних.

Поштовхом до цих досліджень були праці [1–4], в яких розглядались параболічні за Петровським рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині. У працях А. С. Калашникова [1, 2] знайдено класи коректності для вироджених за часовою змінною параболічних рівнянь другого порядку, що включають зростаючі функції. Ці результати були одержані без використання фундаментального розв’язку. А. В. Глушак та С. Д. Шмулевич [3] побудували фундаментальний розв’язок задачі Коші (ФРЗК) для вироджених на початковій гіперплощині $\{t = 0\}$ параболічних рівнянь довільного порядку, за допомогою якого визначили клас коректності задачі без початкових умов. Цей клас ширший, ніж клас, одержаний в [1]. Він містить функції, які зростають як при $|x| \to \infty$, так і при $t \to 0$. У праці В. П. Глушка [4] доведено, що сильно вироджене рівняння не дозволяє розглядати класичну задачу Коші з початковими даними при $t = 0$. Тому природно задавати початкову умову з деякою вагою. Саме такі розв’язки, які з деякою вагою задовольняють початкову умову спеціального вигляду, були знайдені в [3].

Розглядатимемо рівняння (скалярне або векторне, тобто систему скалярних рівнянь) вигляду

$$\Big(\alpha(t)\partial_t - \beta(t)\mathbb{A}(t, x, \partial_x) - a_0(t, x)\Big)u = f, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де a_0 – задана функція, $\mathbb{A}$ – диференціальний вираз за n-вимірною просторовою змінною x такий, що вираз

$$\partial_t - \mathbb{A}(t, x, \partial_x) - a_0(t, x) \tag{2}$$

рівномірно параболічний в тому чи іншому сенсі в шарі $\Pi_{[0,T]} := [0, T] \times \mathbb{R}^n$; α і β – неперервні на $[0, T]$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t > 0$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$, причому функція β монотонно неспадна.

Оскільки рівняння (1) при $t = 0$ вироджується, то для нього не завжди можна розглядати задачу Коші з початковими даними при $t = 0$ у звичайному розумінні. Але можна говорити про фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) згідно з таким означенням.

Означення 1. *ФРЗК для рівняння* (1) *називається функція* $G(t,x;\tau,\xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, *така, що формула*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi,\ (t,x) \in \Pi_{(\tau,T]},$$

визначає розв'язок рівняння (1) *при* $t > \tau$, $x \in \mathbb{R}^n$, *який задовольняє початкову умову*

$$u(t,x)\Big|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $\tau \in (0,T)$ *і довільної неперервної та обмеженої функції* φ.

Рівняння (1) мають виродження при $t = 0$, які класифікуються за величинами

$$A(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \quad \text{і} \quad B(t,\tau) := \int_\tau^t \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)}\,d\theta.$$

Так, у випадку, коли $A(T,0) < +\infty$, рівняння (1) має слабке виродження, а коли $A(T,0) = +\infty$, то – сильне. Якщо $A(T,0) = +\infty$ і $B(T,0) = +\infty$, то маємо випадок дуже сильного виродження.

Зауважимо, що коли $a_0 \equiv 0$, то в рівнянні (1) від змінної $t \in (0,T]$ можна перейти до нової змінної $\tau = -B(T,t)$. При цьому величина τ буде змінюватися на інтервалі $(-B(T,0),0]$, який у випадку дуже сильного виродження є необмеженим. Отже, рівняння (1) зведеться до рівняння без вироджень, яке треба розглядати, взагалі кажучи, на необмеженому часовому інтервалі. Такий розгляд вимагає спеціального додаткового дослідження.

Для скалярних рівнянь, які далі розглядатимемо, побудовано ФРЗК (в деяких випадках в явному вигляді), одержано оцінки ФРЗК та його похідних, установлено різні властивості ФРЗК. За допомогою цих властивостей досліджено коректну розв'язність рівнянь із звичайною початковою умовою у випадку слабкого виродження і без початкової умови, якщо виродження сильне. У випадку слабкого виродження знайдено необхідні й достатні умови зображення розв'язків рівнянь у вигляді суми інтегралів Пуассона та об'ємних потенціалів, досліджено, в якому сенсі дані розв'язки задовольняють початкові умови, та описано множини початкових значень розв'язків.

1. Параболічні за Петровським чи за Ейдельманом рівняння з обмеженими коефіцієнтами. Розглянемо рівняння (1), в якому вираз (2) є рівномірно параболічним за Петровським чи за Ейдельманом і його коефіцієнти обмежені. Наведемо для такого рівняння результати, які опубліковані у працях [5–13]. У формулюваннях обмежимось тільки рівняннями Ейдельмана, частинним випадком яких є рівняння Петровського.

Нехай $n, b_1, \ldots, b_n$ – задані натуральні числа; b – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $q_j := 2b_j/(2b_j - 1)$, $1 \le j \le n$; $M := \sum\limits_{j=1}^n (b/b_j)$; $||k|| := \sum\limits_{j=1}^n (bk_j/b_j)$, якщо $k := (k_1, \ldots, k_n)$ – мультиіндекс; $p(x;y) := (\sum\limits_{j=1}^n |x_j - y_j|^{2b_j/b})^{1/2}$ – $\overrightarrow{2b}$-параболічна відстань між точками $x := (x_1, \ldots, x_n)$ і $y := (y_1, \ldots, y_n)$ з $\mathbb{R}^n$; $\Delta_x^{x'}$ і $\Delta_t^{t'}$ – прирости відповідно за змінними x і t; а $\Delta_{t,x}^{t',x'}$ – приріст за t і x;

$$\mathbb{A}(t,x,\partial_x) = \sum_{0<||k||\le 2b} a_k(t,x)\,\partial_x^k. \qquad (3)$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

$\mathbf{A_1}$) *рівняння* (1) *у випадку* (3) *рівномірно* $\overrightarrow{2b}$*-параболічне на множині* $\Pi_{[0,T]}$*;*

$\mathbf{A_2}$) *коефіцієнти* a_k, $||k|| \le 2b$, *обмежені, неперервні за* t *(для векторного рівняння неперервність за* t a_k *з* $||k|| = 2b$ *рівномірна щодо* $x \in \mathbb{R}^n$*) і гельдерові за* x *рівномірно стосовно* t *з показником* $\gamma \in (0,1)$ *в* $\Pi_{[0,T]}$.

Тоді для цього рівняння існує ФРЗК G*, для якого правильні оцінки*

$$|\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)| \le C(B(t,\tau))^{-M-||k||/(2b)} \times$$
$$\times E_c^d(t,x;\tau,\xi), \qquad (4)$$

$$|\Delta_x^{x'}\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)| \le C(p(x;x'))^\gamma \times$$
$$\times (B(t,\tau))^{-M-(\|k\|+\gamma)/(2b)} \times$$
$$\times \Big(E_c^d(t,x;\tau,\xi) + E_c^d(t,x';\tau,\xi) \Big), \qquad (5)$$
$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad \|k\|\le 2b,$$

де $C>0$, $c>0$ *і* $d\in\mathbb{R}$.

В оцінках (4) і (5)

$$E_c^d(t,x;\tau,\xi) := E_c(t,x;\tau,\xi)E^d(t,\tau),$$
$$E^d(t,\tau) := \exp\{dA(t,\tau)\}, \ \ E_c(t,x;\tau,\xi) :=$$
$$= \exp\Big\{ -c\sum_{j=1}^n (B(t,\tau))^{1-q_j}|x_j-\xi_j|^{q_j} \Big\}.$$

Якщо додатково до умов теореми 1 виконується ще умова

$\mathbf{A_3)}$ коефіцієнти a_k, $\|k\|\le 2b$, для довільних $\{t,t'\}\subset(0,T]$, $t<t'$, і $x\in\mathbb{R}^n$ задовольняють умову

$$|\Delta_t^{t'}a_k(t,x)| \le C(A(t',t))^{\gamma/(2b)},$$

то, крім оцінок (4) і (5), справджуються оцінки

$$|\Delta_{t,x}^{t',x'}\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)| \le C(p(t',x';t,x))^\gamma \times$$
$$\times\Big((B(t,\tau))^{-M-(\|k\|+\gamma)/(2b)}E_c^d(t,x;\tau,\xi) +$$
$$+(B(t',\tau))^{-M-(\|k\|+\gamma)/(2b)}E_c^d(t',x';\tau,\xi)\Big),$$
$$\|k\|\le 2b, \qquad (6)$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G(t,x;\tau,y)dy\Big| \le C(B(t,\tau))^{-(\|k\|-\gamma)/(2b)}\times$$
$$\times E^d(t,\tau), \quad 0<\|k\|\le 2b, \qquad (7)$$

$$\Big|\Delta_{t,x}^{t',x'}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k G(t,x;\tau,y)dy\Big| \le C(p(t',x';t,x))^\gamma\times$$
$$\times\Big(E^d(t,\tau)+E^d(t',\tau)\Big), \quad 0<\|k\|\le 2b, \quad (8)$$

де $0<\tau<t<t'\le T$, $\{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $p(t,x;\tau,y) := ((A(t,\tau))^{1/b}+(p(x;y))^2)^{1/2}$.

В оцінках (4)–(8) стала d може бути довільного знака або нулем. У випадку слабкого виродження рівняння (1) у цих оцінках можна брати $\tau=0$ і $d=0$.

ФРЗК G породжує інтеграл Пуассона функції φ

$$u_1(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \ \ (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (9)$$

інтеграл Пуассона узагальненої міри μ

$$u_2(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;0,\xi)d\mu(\xi), \ (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (10)$$

та об'ємний потенціал

$$v(t,x) := \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)}\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \qquad (11)$$

Результати про ФРЗК дозволяють досліджувати коректну розв'язність задач з початковими умовами і задач без початкових умов у залежності від характеру вироджень рівнянь. Наведемо деякі результати такого дослідження.

Розглядатимемо простори функцій, які є неперервними або мають потрібну гладкість та задовольняють певні умови при $t\to 0$ і $|x|\to\infty$. Їх поведінка при $t\to 0$ описується функцією

$$(\delta(t))^\mu(\Delta(t,0))^r E^d(T,t), \quad t\in(0,T],$$

де μ – невід'ємне ціле число, $\{r,d\}\subset\mathbb{R}$, $\delta:[0,T]\to[0,\infty)$ – неперервна монотонно неспадна функція така, що для довільних $t\in(0,T]$

$$0<\delta(t)\le\beta(t), \quad \Delta(t,0) := \int_0^t \frac{\delta(\lambda)}{\alpha(\lambda)}d\lambda < \infty,$$

а при $|x|\to\infty$ – функцією

$$\Phi_\nu(t,x) := \exp\Big\{ \nu\sum_{j=1}^n k_j(t,a_j)|x_j|^{q_j} \Big\},$$
$$(t,x)\in\Pi_{[0,T]}, \quad \nu\in\{-1,1\}, \qquad (12)$$

з $\vec{k}(t,\vec{a}) := (k_1(t,a_1),...,k_n(t,a_n))$, $t\in[0,T]$, де

$$k_j(t,a_j) :=$$

$$:= c_0 a_j (c_0^{2b_j-1} - (T - B(T,t)) a_j^{2b_j-1})^{1-q_j},$$
$$j \in \{1, ..., n\}, \qquad (13)$$

для $t \in (0, T]$ и $k_j(0, a_j) := 0$, якщо $B(T, 0) = \infty$. Тут c_0 – фіксоване число з проміжку $(0, c)$, де c – стала з оцінок ФРЗК, а числа a_j такі, що $0 \le a_j < c_0 T^{1-q_j}$.

Зазначимо, що кожна з функцій $k_j(\cdot, a_j)$, $j \in \{1, ..., n\}$, монотонно зростає і справджується нерівність

$$E_{c_0}(t, x; \tau, \xi) \Phi_1(\tau, \xi) \le \Phi_1(t, x),$$
$$0 < \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Нехай $p \in [1, \infty]$ і $u(t, x)$, $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$, – задана комплекснозначна функція, вимірна за x при довільному $t \in [0, T]$. Для кожного $t \in [0, T]$ означимо норми

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} := \|u(t, \cdot) \Phi_{-1}(t, \cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Через $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ позначимо простір вимірних за Лебегом функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких скінченна норма $\|\varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$.

Нехай $\mathfrak{B}$ – σ-алгебра борельових множин простору $\mathbb{R}^n$, а M – сукупність усіх злічено адитивних функцій $\nu : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір), які мають скінченну повну варіацію $|\nu|$. Через $M^{\vec{k}(0,\vec{a})}$ позначимо сукупність усіх узагальнених мір $\mu : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ таких, що функція

$$\nu(A) = \int_A \Phi_{-1}(0, x)\, d\mu(x), \quad A \in \mathfrak{B},$$

належить до простору M. При цьому для довільної $\mu \in M^{\vec{k}(0,\vec{a})}$

$$\|\mu\|^{\vec{k}(0,\vec{a})} := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{-1}(0, x)\, d|\mu|(x) < \infty.$$

Використовуватимемо ще простори $L_1^{-k(T,\vec{a})}$, вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою $\|\psi\|_1^{-\vec{k}(T,\vec{a})} := \|\psi(\cdot) \Phi_1(T, \cdot)\}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$ і простір $C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a})}$ неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ таких, що $|\psi(x)| \Phi_1(T, x) \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Для $\psi \in C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a})}$ покладемо $\|\psi\|_\infty^{-\vec{k}(T,\vec{a})} := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} (|\psi(x)|\, \Phi_1(T, x))$.

Для функції $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$ використовуватимемо такі умови:

Д$_1$) для довільного $R > 0$ існують сталі $C > 0$ і $\gamma \in (0, 1]$ такі, що для будь-яких $t \in (0, T]$ і $\{x, \xi\} \subset B_R$ виконується нерівність

$$|\Delta_x^\xi f(t, x)| \le C(p(x, \xi))^\lambda;$$

Д$_2$) для будь-якого $R > 0$ існують сталі $C > 0$ і $\gamma \in (0, 1]$ такі, що для довільних $t \in (0, T]$ и $\{x, \xi\} \subset B_R$ виконується нерівність

$$|\Delta_x^\xi f(t, x)| \le C \delta(t) E^{-d}(T, t)(p(x; \xi))^\gamma,$$

де $\delta : (0, T] \to [0, \infty)$ – функція, яка задовольняє умову $\int\limits_0^T (\delta(t)/\alpha(t)) dt < \infty$;

Д$_{3p}$) для довільних $t \in (0, T]$ скінченні величини $\|f(t, \cdot)\|^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ і $F_{3p}(t) := \int\limits_0^t (B(t - \tau))^{-1+1/(2b)} \|f(\tau, \cdot)\|^{\vec{k}(\tau,\vec{a})} d\tau$, $1 \le p \le \infty$;

Д$_4$) існує така стала $C > 0$, що для довільних $t \in (0, T]$ виконується нерівність

$$F(t) := \int_0^t E^d(T, \tau) \|f(\tau, \cdot)\|^{\vec{k}(\tau,\vec{a})} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \le C,$$

де B_R – куля в $\mathbb{R}^n$ радіуса R з центром у початку координат,

$$\|f(\tau, \cdot)\|^{\vec{k}(\tau,\vec{a})} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|f(\tau, x)| \Psi_{-1}(\tau, x)).$$

У випадку слабкого виродження можна розглядати задачу Коші для рівняння (1) з початковою умовою

$$u(t, x) \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (14)$$

Теорема 2. *Нехай рівняння* (1) *у випадку* (3) *має слабке виродження і для його коефіцієнтів виконуються умови* **A$_1$**, **A$_2$** *та умова*

A$_3$) *існують похідні* $\partial_x^k a_k$, $||k|| \le 2b$, *які задовольняють умову* **A$_2$**.

Тоді правильними є такі твердження:

1) якщо $\varphi \in L_p^{\vec{k}(0,\vec{a})}$ *і функція* f *задовольняє умови* **Д$_1$** *та* **Д$_{3p}$**, $1 \le p \le \infty$, *то функція*

$$u(t, x) := u_1(t, x) + v(t, x), \ (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (15)$$

є єдиним розв'язком рівняння (1) *таким, що*

$$\exists\, C>0 \quad \forall\, t\in(0,T] \quad \forall\, l\in\mathbb{Z}_+^n,\ ||l||\le 2b:$$
$$\|\partial_x^l u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C\left(\|\varphi\|_p^{\vec{k}(0,\vec{a})} + F_{3p}(t)\right),$$

при $1\le p<\infty$

$$\lim_{t\to 0+}\|u(t,\cdot)-\varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}=0$$

і при $p=\infty$

$$\lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\varphi(x)dx$$

для будь-якої функції $\psi\in L_1^{-\vec{k}(T,\vec{a})}$;

2) якщо $\mu\in M^{\vec{k}(0,\vec{a})}$ *і для функції* f *виконуються умови* $\mathbf{Д_1}$ *та* $\mathbf{Д_{31}}$, *то функція*

$$u(t,x):=u_2(t,x)+v(t,x),\ (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{16}$$

є єдиним розв'язком рівняння (1), *який задовольняє такі умови:*

$$\exists\, C>0 \quad \forall\, t\in(0,T]:$$
$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C\left(\|\mu\|^{\vec{k}(0,\vec{a})}+F_{31}(t)\right),$$

і

$$\lim_{t\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)d\mu(x)$$

для довільної функції $\psi\in C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a})}$.

Якщо рівняння (1) має дуже сильне виродження, то для цього рівняння початкову умову вигляду (14) задовольнити, взагалі кажучи, не можна. Наведемо теорему, в якій даються умови коректної розв'язності дуже сильно виродженого рівняння (1) без початкових умов.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів* a_k, $\|k\|\le 2b$, *рівняння* (1) *виконуються умови* $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ *та умова*

$\mathbf{A_4}$) *коефіцієнти* a_k, $||k||\le 2b$, *обмежені, гельдерові за* t, x *з показником* $\gamma\in(0,1)$ *в* $\Pi_{[0,T]}$ *і та* $A(T,0)=\infty$. *Якщо функція* $f:\Pi_{(0,T]}\to\mathbb{C}$ *неперервна та задовольняє зі сталою* d *з оцінок* (4) *умови* $\mathbf{Д_2}$ *і* $\mathbf{Д_4}$, *то формула* (11) *визначає єдиний розв'язок рівняння* (1), *для якого правильна оцінка*

$$\|v(t,\cdot)\|^{\vec{k}(t,\vec{a})}\le CE^{-d}(T,t)F(t), \quad t\in(0,T].$$

У випадку сильного виродження рівняння (1), можна ставити початкову умову у вигляді

$$\left(u(t,x)E^d(T,t)\right)\Big|_{t=0}=\varphi(x), \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{17}$$

де число d з оцінок (4). Розв'язок задачі (1), (17) зображується у вигляді

$$u(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_0(t,x;\xi)\varphi(\xi)d\xi+v(t,x),$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{18}$$

де

$$G_0(t,x;\xi):=\lim_{\tau\to 0}(G(t,x;\tau,\xi)E^{-d}(T,\tau)).$$

Зазначимо, що в працях В. В. Городецького та І. В. Житарюка [14, 15] вивчені властивості розв'язків задачі Коші для параболічних рівнянь зі слабким виродженням на початковій гіперплощині та початковими даними із спеціальних просторів узагальнених функцій.

2. Параболічні рівняння зі зростаючими коефіцієнтами. У випадку, коли коефіцієнти виразу $\mathbb{A}$ та a_0 можуть зростати при $|x|\to+\infty$, результати опубліковано в [16–18]. Сформулюємо відповідні теореми для випадку рівнянь з

$$\mathbb{A}(t,x,\partial_x)=\sum_{||k||\le 2b}a_k(t,x)\,\partial_x^k, \quad a_0(t,x)=0 \tag{19}$$

і

$$\mathbb{A}(t,x,\partial_x)=\sum_{0<||k||\le 2b}a_k(t,x)\partial_x^k,$$
$$a_0(t,x)=b(t,x), \tag{20}$$

Щоб сформулювати припущення щодо коефіцієнтів рівняння (1), розглянемо відповідне рівнянню (1) у випадку (19) рівняння без виродження

$$\Big(\partial_t-\sum_{||k||\le 2b}a_k(t,x)\partial_x^k\Big)\,u(t,x)=0,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (21)$$

та у випадку (20) рівняння без виродження і без члена з коефіцієнтом b

$$\Big(\,\partial_t-\sum_{0<||k||\le 2b}a_k(t,x)\partial_x^k\Big)\,u(t,x)=0,$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \qquad (22)$$

Означення 2. *Рівняння з виродженням (1) у випадках (19) і (20) називають дисипативними $\overrightarrow{2b}$-параболічними в $\Pi_{[0,T]}$, якщо такими є відповідно рівняння (21) і (22).*

Означення 3. *Рівняння (21) називатимемо дисипативним $\overrightarrow{2b}$-параболічним (за Ейдельманом) в $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує неперервна функція $D:\mathbb{R}^n\to[1,\infty)$, яка задовольняє такі умови:*

1) $D(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$;

2) функції $b_k(t,x):=a_k(t,x)(D(x))^{||k||-2b}$, $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, $||k||\le 2b$, обмежені;

3) рівняння

$$\Big(\partial_t-\sum_{||k||+k_{n+1}=2b}b_k(t,x)\partial_x^k(-i\partial_{x_{n+1}})^{k_{n+1}}\Big)v(t,x)=0$$

з обмеженими коефіцієнтами і додатковою просторовою змінною x_{n+1} є рівномірно на $\Pi_{[0,T]}\times\mathbb{R}$ $\overrightarrow{2B}$-параболічним, де $\overrightarrow{2B}:=(2b_1,\dots,2b_n,2b)$. Функція D при цьому називається характеристикою дисипації рівняння (21).

Теорема 4. *Нехай для коефіцієнтів a_k, $\|k\|\le 2b$, рівняння (1) у випадку (19) виконуються умови*

Б$_1$) *рівняння (1) є дисипативним $\overrightarrow{2b}$-параболічним у $\Pi_{[0,T]}$ з характеристикою дисипації D;*

Б$_2$) *коефіцієнти a_k, $||k||\le 2b$, рівняння мають неперервні похідні $\partial_x^l a_k$, $||k||\le 2b$, $||l||\le 2b$, для яких справджуються оцінки*

$$|\partial_x^l a_k(t,x)|\le C(D(x))^{2b-||k||+||l||(1-\varepsilon)},$$
$$(t,x)\in\Pi_{[0,T]},$$

де $C>0$, $\varepsilon\in(0,1)$; функції b_k, $||k||\le 2b$, як функції t, є неперервними рівномірно щодо $x\in\mathbb{R}^n$;

Б$_3$) *похідні $\partial_x^l a_k$, $||k||\le 2b$, $||l||\le 2b$, задовольняють локальну умову Гельдера за x з показником $\lambda\in(0,1]$ відносно відстані p рівномірно щодо $t\in[0,T]$, тобто*

$$\forall R>0\ \exists C>0\ \forall\{x,x'\}\subset B_R\ \forall t\in[0,T]:$$
$$|\Delta_x^{x'}\partial_x^l a_k(t,x)|\le C(p(x,x'))^{\lambda}.$$

Тоді для такого рівняння існує ФРЗК G, для якого правильні оцінки

$$|\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)|\le C(B(t,\tau))^{-M-\|k\|/(2b)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)\exp\{dB(t,\tau)\} \qquad (23)$$

і

$$|\partial_x^k G(t,x;\tau,\xi)|\le C\times$$
$$\times\sum_{j=0}^{\|k\|}(B(t,\tau))^{-M-(\|k\|-j)/(2b)}(D(x))^{j(1-\varepsilon)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)\exp\{dB(t,\tau)+g(x)-g(\xi)\}, \qquad (24)$$

$$0<\tau<t\le T,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\ \ \|k\|\le 2b,$$

в яких $C>0$, $c>0$, $d\in\mathbb{R}$, а g – довільна функція, що задовольняє умову

Б$_4$) *$g(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$; існують локально неперервні за Гельдером з показником λ з умови* $\mathbf{A}_3$ *похідні $\partial_x^k g$, $0<||k||\le 4s$, які пов'язані з характеристикою дисипації D умовою*

$$|\partial_x^k g(x)|\le C\eta(D(x))^{||k||(1-\varepsilon)},$$
$$x\in\mathbb{R}^n,\quad 0<||k||\le 4b,$$

де $C>0$, $\varepsilon\in(0,1)$, η – досить мале додатне число, вибором якого в кожній конкретній ситуації розпоряджаємось.

Для рівняння (1) і випадку (20) правильна наступна теорема про ФРЗК.

Теорема 5. *Якщо для коефіцієнтів a_k, $0<\|k\|\le 2b$, і характеристики дисипації D виконані умови*

В$_1$) *виконується умова* **Б$_1$**;

В$_2$) *$\exists C>0\ \exists\gamma\in(0,1]\ \forall\{(t,x),(t,y)\}\subset\Pi_{[0,T]}\ \forall k\in\mathbb{Z}_+^n$, $||k||\le 2b:\ \ |\Delta_x^y a_k(t,x)|\le C(p(x,y))^{\gamma}((D(x))^{2b-||k||}+(D(y))^{2b-||k||})$; функції b_k, $||k||\le 2b$, як функції t, є неперервними рівномірно стосовно $x\in\mathbb{R}^n$;*

В$_3$) *характеристика дисипації D задовольняє такі умови:*

1) $\exists C>0\ \forall\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n$, $q(x,y)\le 1$: $D(x)\le CD(y)$;

2) $\exists C>0\ \forall\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n,\ q(x,y)>1$*:*

$$D(x)\le C\exp\{\varepsilon\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|(D(y))^{m_j}\},$$

де ε – досить мале додатне число, вибором якого в конкретній ситуації розпоряджаємось, а функція b обмежена, неперервна за t і гельдерова за x з показником γ в $\Pi_{[0,T]}$, а $q(x,y):=(\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|^{q_j})^{1/q'}$ – спеціальна відстань між точками x і y простору $\mathbb{R}^n$, а $q':=\max_{i\in\{1,\dots,n\}}q_j$, то для рівняння (1) *у випадку* (20) *існує ФРЗК G, для якого правильні при $\|k\|<2b$ оцінки*

$$|\partial_x^kG(t,x;\tau,\xi)|\le C_l\left((B(t,\tau))^{-M-\|k\|/(2b)}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2b}\}+(D(\xi))^{-l}\right)\times$$
$$\times E_c^d(t,x;\tau,\xi),\qquad(25)$$

$$|\partial_x^kG(t,x;\tau,\xi)|\le C\sum_{j=0}^{\|k\|}(B(t,\tau))^{-M-(\|k\|-j)/(2b)}\times$$
$$(D(x))^jE_c^d(t,x;\tau,\xi)\exp\{g(x)-g(\xi)\},\quad(26)$$

а при $\|k\|=2b$ оцінки

$$|\partial_x^kG(t,x;\tau,\xi)|\le C_l\left((B(t,\tau))^{-M-1}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\{-cB(t,\tau)(D(\xi))^{2b}\}+(D(\xi))^{-l}\right)\times$$
$$\times E_c^d(t,x;\tau,\xi)\times$$

$$\times\left((D(x))^{2b}+\exp\{2b\varepsilon MB(t,\tau)(D(x))^{2b}\}\right).\qquad(27)$$

В оцінках (25)*–*(27) $0<\tau<t\le T$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, *$l$ – довільне додатне число, g – довільна функція, що зводовольняє умову*

$\mathbf{B_4}$**)** $g(x)\to\infty$ *при* $|x|\to\infty$, *існують похідні* ∂_x^kg, $0<||k||\le 2b$, *для яких справджуються нерівності*

$$|\partial_x^kg(x)|\le C\eta(D(x))^{||k||},$$
$$|\Delta_x^y\partial_x^kg(x)|\le C\eta(p(x,y))^{\gamma}\left((D(x))^{||k||}+\right.$$
$$\left.+(D(y))^{||k||}\right),\quad\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n,\quad 0<||k||\le 2b,$$

де $C>0$, $\gamma\in(0,1]$ з умови $\mathbf{Б}_2$, η – досить мале додатне число, вибором якого в конкретній ситуації розпоряджаємось;
$C_l>0$, $C>0$, $c>0$, $d\in\mathbb{R}$.

Зазначимо, що набір умов $\mathbf{B}$ не вимагає великої гладкості коефіцієнтів, але накладається спеціальне обмеження на характеристику дисипації D.

Наведемо ще результати про ФРЗК для рівняння (1) у випадку (19) зі зростаючими коефіцієнтами, для якого виконані інші умови. Нехай $b':=\max_{j\in\{1,\dots,n\}}b_j$, $\delta_0\in(0,1)$ і функція $\eta_0\in C^{4b'}(\mathbb{R})$ така, що $\eta_0(r):=|r|$ при $|r|\ge 1+\delta_0$, $\eta_0(r):=1$ при $|r|\le 1-\delta_0$ і $|\eta_0^{(k)}(r)|\le C$, $r\in\mathbb{R}$, $k\in\{1,\dots,4b'\}$. Розглянемо функції

$$D_0(x):=\left(\sum_{j=1}^{n}(\eta_0(x_j))^{q_j}\right)^{(1-\varepsilon_0)/(2b)},\ x\in\mathbb{R}^n,\qquad(28)$$

і

$$g_0(t,x):=a(1-(Aa)^{2b-1}B(t,0))^{-1/(2b-1)}\times$$
$$\times(D_0(x))^{2b},\ (t,x)\in\Pi_{[0,T]},\qquad(29)$$

де число $\varepsilon_0\in(0,1)$ в кожній конкретній ситуації вибирається спеціальним способом, A – досить велике додатне число, а число $a>0$ таке, що виконується нерівність $T\le(Aa)^{1-2b}/2$.

Використовуватимемо наступний набір умов з функцією $D=D_0$, означеною в (28).

$\mathbf{\Gamma_1}$. Функції $b_k(t,x):=a_k(t,x)\times\times(D_0(x))^{\|k\|-2b}$, $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, $\|k\|\le 2b$, обмежені і рівняння (21) рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічне в $\Pi_{[0,T]}$.

$\mathbf{\Gamma_2}$. Виконуються умови $\mathbf{A}_1$ і $\mathbf{A}_3$.

$\mathbf{\Gamma_3}$. Для рівняння (1) у випадку (19) існує спряжене рівняння, для коефіцієнтів якого виконується умова $\mathbf{Б}_2$.

$\mathbf{\Gamma_4}$. Має місце слабке виродження.

Теорема 6. *Якщо для рівняння* (1) *у випадку* (19) *виконуються умови* $\mathbf{\Gamma_1}$, $\mathbf{\Gamma_2}$ *і* $\mathbf{\Gamma_4}$, *то для нього існує ФРЗК G, для якого правильними є оцінки*

$$|\partial_x^kG(t,x;\tau,\xi)|\le C\times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\|k\|} (B(t,\tau)^{-(M+\|k\|-j)/(2b)} (D_0(x))^{j(1-\varepsilon)} \times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi) \exp\{g_0(t,x) - g_0(\tau,\xi)\},$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \|k\| \le 2b, \tag{30}$$

де $C>0$, $c>0$, *функції* D_0 *і* g_0 *відповідно з* (28) *і* (29).

Якщо додатково припустити виконання умови $\mathbf{Г_3}$, *то ФРЗК* G *володіє властивістю нормальності і для нього правильна формула згортки.*

Наведемо теореми про розв'язність рівнянь зі зростаючими коефіцієнтати.

Крім функцій (12), розглянемо ще функції

$$\Psi_\nu(x) := \exp\{\nu g(x)\},$$
$$\Psi_\nu(t,x) := \exp\{\nu g_0(t,x)\},$$
$$(t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad \nu \in \{-1,1\},$$

і норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g(\cdot)} :=$$
$$:= \|u(t,\cdot)\Phi_{-1}(t,\cdot)\Psi_{-1}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g_0(t,\cdot)} :=$$
$$:= \|u(t,\cdot)\Phi_{-1}(t,\cdot)\Psi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$
$$1 \le p \le \infty, \quad t \in [0,T],$$

і відповідно простори $L_p^{\vec{k}(0,\vec{a}),g(\cdot)}$, $L_p^{\vec{k}(0,\vec{a}),g_0(0,\cdot)}$, $L_1^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g(\cdot)}$, $L_1^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g_0(T,\cdot)}$, $C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g(\cdot)}$, $C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g_0(T,\cdot)}$, $M^{\vec{k}(0,\vec{a}),g(\cdot)}$, $M^{\vec{k}(0,\vec{a}),g_0(0,\cdot)}$

Для функції $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}_N$ використовуватимемо ще такі умови:

$\mathbf{Д_{5p}}$) для довільного $t \in (0,T]$ скінченними є величини $||f(t,\cdot)||^{\vec{k}(t,\vec{a}),g(\cdot)}$ і $F_{5p}(t) \equiv \int\limits_0^t \|f(\tau,\cdot)\|_p^{\vec{k}(\tau,\vec{a}),g(\cdot)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty, \quad 1 \le p \le \infty;$

$\mathbf{Д_{6p}}$) для довільного $t \in (0,T]$ скінченними є величини $||f(t,\cdot)||_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g_0(t,\cdot)}$ і $F_{6p}(t) := \int\limits_0^t \|f(\tau,\cdot)\|_p^{\vec{k}(\tau,\vec{a}),g_0(\tau,\cdot)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty, \quad 1 \le p \le \infty;$

$\mathbf{Д_7}$) для будь-якого $R>0$ існують сталі $C>0$ і $\gamma \in (0,1]$ такі, що для довільних $t \in (0,T]$ і $\{x,\xi\} \subset B_R$ виконується нерівність

$$|\Delta_x^\xi f(t,x)| \le C\delta(t) E^{-d}(B(T,t))(p(x,\xi))^\lambda,$$

де $\delta : (0,T] \to [0,\infty)$ – функція, яка задовольняє умову $\int\limits_0^T (\delta(t)/\alpha(t))dt < \infty$, а d – стала з оцінок (24);

$\mathbf{Д_8}$) для довільного $t \in (0,T]$ скінченними є величини $||f(t,\cdot)||_\infty^{\vec{k}(t,\vec{a}),g_0(t,\cdot)}$ і $F(t) := \int\limits_0^t E^d(B(T,\tau))\|f(\tau,\cdot)\|_\infty^{\vec{k}(\tau,\vec{a}),g_0(\tau,\cdot)} \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$, де стала d така сама, як в умові $\mathbf{Д_7}$.

Теорема 7. *Нехай рівняння* (1) *у випадку* (19) *має слабке виродження і виконуються умови* $\mathbf{Б_1}$ – $\mathbf{Б_3}$. *Тоді правильними є такі твердження:*

1) якщо $\varphi \in L_p^{\vec{k}(0,\vec{a}),g(\cdot)}$ *і функція* f *задовольняє умови* $\mathbf{Д_1}$ *та* $\mathbf{Д_{5p}}$, $1 \le p \le \infty$, *то функція* (15) *є розв'язком рівняння* (1) *таким, що*

$$\exists\, C>0 \quad \forall\, t \in (0,T]:$$
$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g(\cdot)} \le C\left(\|\varphi\|_p^{\vec{k}(0,\vec{a}),g(\cdot)} + F_{5p}(t)\right),$$

при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t\to 0+} \|u(t,\cdot) - \varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g(\cdot)} = 0$$

і при $p = \infty$

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx$$

для будь-якої функції $\psi \in L_1^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g(\cdot)}$;

2) якщо $\mu \in M^{\vec{k}(0,\vec{a}),g(\cdot)}$ *і для функції* f *виконуються умови* $\mathbf{Д_1}$ *та* $\mathbf{Д_{51}}$, *то функція* (16) *є розв'язком рівняння* (1), *який задовольняє такі умови:*

$$\exists\, C>0 \quad \forall\, t \in (0,T]:$$
$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a}),g(\cdot)} \le C\left(\|\mu\|^{\vec{k}(0,\vec{a}),g(\cdot)} + F_{51}(t)\right),$$

і

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'(x)u(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'(x)d\mu(x)$$

для довільної функції $\psi \in C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g(\cdot)}$.

Теорема 8. *Нехай для слабко виродженого рівняння* (1) *у випадку* (19) *виконуються умови* $\mathbf{Г_1}$, $\mathbf{Г_2}$ *і* $\mathbf{Г_4}$. *Тоді*

1) якщо $\varphi \in L_p^{\vec{k}(0,\vec{a}),g_0(0,\cdot)}$ і функція f задовольняє умови **Д$_1$** *та* **Д$_{6p}$**, $1 \le p \le \infty$, *з функцією g_0 з* (29), *то функція* (15) *є розв'язком рівняння* (1) *таким, що*

$$\exists C > 0 \quad \forall t \in (0,T]: \ \|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g_0(t,\cdot)} \le$$
$$\le C\left(\|\varphi\|_p^{\vec{k}(0,\vec{a}),g_0(0,\cdot)} + F_{6p}(t)\right),$$

при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t\to 0+} \|u(t,\cdot) - \varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),g_0(t,\cdot)} = 0$$

і при $p = \infty$

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'(x)\overline{u(t,x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'(x)\overline{\varphi(x)}dx$$

для будь-якої функції $\psi \in L_1^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g_0(T,\cdot)}$;

2) якщо $\mu \in M^{\vec{k}(0,\vec{a}),g_0(0,\cdot)}$ і для функції f виконуються умови **Д$_1$** *та* **Д$_{36}$**, *то функція* (16) *є розв'язком рівняння* (1), *який задовольняє такі умови:*

$$\exists C > 0 \quad \forall t \in (0,T]: \ \|u(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a}),g_0(t,\cdot)} \le$$
$$\le C\left(\|\mu\|^{\vec{k}(0,\vec{a}),g_0(0,\cdot)} + F_{61}(t)\right),$$

і для довільної функції $\forall\, \psi \in C_0^{-\vec{k}(T,\vec{a}),-g_0(T,\cdot)}$:

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\overline{u(t,x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)d\overline{(\mu(x))}.$$

Якщо ж додатково припускати виконання умови **Г$_3$**, *то розв'язки, що визначаються формулами* (15) *і* (16), *є єдиними в класі функцій, які задовольняють умову*

$$\exists C > 0\ \forall t \in (0,T]: \ ||u(t,\cdot)||_p^{\vec{k}(t,\vec{a}),D(\cdot),g_0(t,\cdot)} :=$$
$$= ||\Phi_{-1}(t,\cdot)(D(\cdot))^{2b}\Psi_{-1}(t,\cdot)u(t,\cdot)||_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty,$$

Теорема 9. *Нехай для рівняння* (1) *у випадку* (19) *виконуються умови* **Б$_1$** – **Б$_3$** *і* $B(T,0) = \infty$. *Якщо f задовольняє умови* **Д$_7$** *і* **Д$_8$**, *то функція* (11) *є розв'язком рівняння* (1), *для якого справджується оцінка*

$$||v_2(t,\cdot)||_\infty^{\vec{k}(t,\vec{a}),g(\cdot)} \le CE^{-d}(B(T,t))F(t),$$
$$t \in (0,T].$$

Цей розв'язок единий, якщо єдиним є відповідний розв'язок задачі Коші для рівняння (21) *в* $\Pi_{[t_1,T]}$ *при довільному* $t_1 \in (0,T)$.

Аналогічні результати про розв'язність задачі Коші та задачі без початкових умов одержуються й для рівняння (1) у випадку (20) за умов **В**.

Зауважимо, що наведені в пунктах 1 і 2 результати для скалярних рівнянь узагальнено в працях [16–18] на системи рівнянь.

3. Ультрапараболічні рівняння типу Колмогорова Нехай n, n_1, n_2 і n_3 – задані натуральні числа такі, що $n_1 \ge n_2 \ge n_3$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$, просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних: основної групи $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ і груп змінних виродження $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ та $x_3 \in \mathbb{R}^{n_3}$, де $x_j := (x_{j1}, \ldots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1,2,3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$.

У працях [19–21] розглянуто рівняння вигляду (1) з

$$\mathbb{A}(t,x,\partial_x) = \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} + A(t,\partial_{x_1}),$$
$$a_0(t,x) = a_0(t), \qquad (31)$$

де $A(t,\partial_{x_1})$ – диференціальний вираз з неперервними на $[0,T]$ коефіцієнтами такий, що вираз $\partial_t - A(t,\partial_{x_1})$ є рівномірно параболічним за Петровським чи за Ейдельманом у шарі $\Pi^1_{[0,T]} := [0,T] \times \mathbb{R}^{n_1}$. Для таких рівнянь побудовано ФРЗК, вивчено його властивості та властивості породжених ним інтегралів Пуассона, які застосовано до дослідження розв'язності цих рівнянь зі звичайними початковими даними у випадку слабкого виродження.

У статті [22] результати праць [19–21], що стосуються побудови та дослідження ФРЗК, узагальнено на випадок рівняння (1) другого порядку з

$$\mathbb{A}(t,x,\partial_x) = \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + A(t,x_1,\partial_{x_1}),$$

$$A(t,x_1,\partial_{x_1}) := \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x_1)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x_1)\partial_{x_{1j}},\;\; a_0(t,x)=a_0(t,x_1), \quad (32)$$

а просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з двох груп змінних: основної групи $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ і групи змінних виродження $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$.

Останні нові результати стосуються рівняння (1) з

$$\mathbb{A}(t,x,\partial_x) = \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} + \\ + \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + b\sum_{j=1}^{n_1} x_{1j}\partial_{x_{1j}}, \\ a_0(t,x)=a, \quad (33)$$

де a_{jl}, a і b – сталі, причому

$$\exists\,\delta>0\;\;\forall\,\sigma_1\in\mathbb{R}^{n_1}:\;\; \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} \geq \delta|\sigma_1|^2.$$

У цьому випадку отримано явну формулу для ФРЗК, з якої для довільного $T>0$ і будь-яких мультиіндексів $\{k_l,m_l\}\subset\mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l\in\{1,2,3\}$, випливають оцінки

$$|\partial_{x_1}^{k_1}\partial_{x_2}^{k_2}\partial_{x_3}^{k_3}\partial_{\xi_1}^{m_1}\partial_{\xi_2}^{m_2}\partial_{\xi_3}^{m_3} G(t,x;\tau,\xi)| \leq \\ \leq C_{k_1k_2k_3m_1m_2m_3} e^{n_1 bB(t,\tau)} \times \\ \times \prod_{l=1}^{3} (p_l(B(t,\tau)))^{-(n_l+|k_l|+|m_l|)/2} \times \\ \times \hat{E}_c^a(t,x;\tau,\xi),\;\; 0\leq\tau<t\leq T,\;\; \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad (34)$$

де $C_{k_1k_2k_3m_1m_2m_3}$ і c – додатні сталі, які залежать лише від коефіцієнтів a_{jl}, b, n_1, n_2 і n_3, а також від T тільки у випадку, коли $b>0$;

$$\hat{E}_c^a(t,x;\tau,\xi) := \hat{E}_c(t,x;\tau,\xi)\,E^a(t,\tau), \\ \hat{E}^a(t,\tau) := \exp\{aA(t,\tau)\} \\ \hat{E}_c(t,x;\tau,\xi) := \\ = \exp\Big\{ -c\,\Big(\frac{|e^{bB(t,\tau)}X_1(B(t,\tau))-\xi_1|^2}{p_1(B(t,\tau))} + \\ + \sum_{l=2}^{3} \frac{|X_l(B(t,\tau))-\xi_l|^2}{p_l(B(t,\tau))} \Big)\Big\}, \\ X_1(t):=x_1, \quad X_2(t):=x_2+\alpha_b(t)\hat{x}_1, \\ X_3(t) := x_3 + tx_2' + \frac{\alpha_b(t)-t}{b}x_1', \\ \alpha_b(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{bt}-1}{b}, & b\neq 0, \\ t, & b=0. \end{cases}$$

Для цього рівняння вводяться аналогічно до (13) такі набори функцій, визначених для $t\in[0,T]$:

$$\vec{\hat{k}}(t,\vec{a}) := (\hat{k}_1(t,a_1),\hat{k}_2(t,a_2),\hat{k}_3(t,a_3)), \\ \hat{k}_1(t,a_1) := \frac{c_0a_1e^{2b(T-B(T,t))}}{c_0-a_1p_1(T-B(T,t))}, \\ \hat{k}_l(t,a_l) := \frac{c_0a_l}{c_0-a_lp_l(T-B(T,t))}, \quad l\in\{2,3\}; \\ \vec{\hat{s}}(t) := (s_1(t),s_2(t),s_3(t)), \\ \vec{s_l}(t) := (s_{l1}(t),\ldots,s_{ln_l}(t)),\;\; l\in\{1,2,3\}, \\ \hat{s}_{1j}(t) := \hat{k}_1(t,a_1)+ \\ + 2\theta(n_2-j)(\alpha_b(B(t,0)))^2\hat{k}_2(t,a_2)+ \\ +4\Big(\frac{\alpha_b(B(t,0))-B(t,0)}{b}\Big)^2\theta(n_3-j)\hat{k}_3(t,a_3), \\ j\in\{1,\ldots,n_1\}, \\ \hat{s}_{2j}(t) := 2\hat{k}_2(t,a_2)+4(B(t,0))^2\theta(n_3-j)\times \\ \times\,\hat{k}_3(t,a_3),\;\; j\in\{1,\ldots,n_2\}, \\ \hat{s}_{3j}(t) := 4\hat{k}_3(t,a_3), \quad j\in\{1,\ldots,n_3\},$$

де $c_0\in(0,c)$, c – стала з оцінок (34), $\vec{a} := (a_1,a_2,a_3)$ – набір таких невід'ємних чисел, що $p_l(T) < \dfrac{c_0}{a_l}$, $l\in\{1,2,3\}$, $\theta(\tau)=1$ для $\tau\geq 0$ і $\theta(\tau)=0$ для $\tau<0$, а також вагові функції

$$\hat{\Phi}_\nu(t,x) := \exp\Big\{\,\nu\sum_{l=1}^{3}\hat{k}_l(t,a_l)|X_l(B(t,0))|^2\,\Big\}, \\ \hat{\Psi}_\nu(t,x) := \exp\Big\{\,\nu\sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\hat{s}_{lj}(t)\,|x_{lj}|^2\,\Big\}, \\ (t,x)\in\Pi_{[0,T]}, \quad \nu\in\mathbb{R}.$$

і норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{\hat{k}}(t,\vec{a})} := \|u(t,\cdot)\hat{\Phi}_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \\ \|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{\hat{s}}(t)} := \|u(t,\cdot)\hat{\Psi}_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Зазначимо, що початкова умова у випадку слабкого виродження задовольняється в розумінні другої норми.

4. Зауваження та висновки. У працях [23–25] установлено локальну розв'язність квазілінійних параболічних рівнянь з виродженнями на початковій гіперплощині.

Огляд деяких результатів з теорії параболічних рівнянь з виродженнями при $t = 0$ міститься в праці [26, с. 162–172].

Лінійні та квазілінійні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині відносяться до класу рівнянь з особливостями та виродженнями, які мають практичне застосування і які на даний час досліджено ще недостатньо. Праці, огляду яких присвячена ця стаття, вносять певний вклад у теорію параболічних рівнянь з виродженнями на гіперплощині задання початкових даних. Результати цих праць сприятимуть подальшому розвитку теорії таких класів рівнянь.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Калашников А.С.* О растущих решениях линейных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой / А.С. Калашников // Мат. заметки. – 1968. – **3**, № 2. – С. 171–178.

2. *Калашников А.С.* Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка / А.С. Калашников // Вест. МГУ. Сер. мат., механ. – 1971. – № 2, 3. – С. 42–48, 3–9.

3. *Глушак А.В.* О некоторых корректных задачах для параболических уравнений высокого порядка, вырождающихся по временной переменной / А.В. Глушак, С.Д. Шмулевич // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 6. – С. 1065–1068.

4. *Глушко В.П.* Вырождающиеся линейные дифференциальные уравнения. II / В.П. Глушко // Дифференц. уравнения. – 1968. – **4**, № 11. – С. 1956–1966.

5. *Возняк О.Г.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / О.Г. Возняк, С.Д. Івасишен // Доп. АН України. – 1994. – № 6. – С. 7–11.

6. *Березан Л.П.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині / Л.П. Березан, С.Д. Івасишен // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 7–12.

7. *Мединський І.П.* Апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням / І.П. Мединський // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка". № 337. Прикладна математика. – Львів, 1998. – С. 133–136.

8. *Мединський І.П.* Про властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для параболічної системи з виродженням на початковій гіперплощині / І.П. Мединський // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка". № 364. Прикладна математика. – Львів, 1999. – С. 298–307.

9. *Березан Л.П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи / Л.П. Березан // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 46. Математика. – Чернівці, 1999. – С. 13–18.

10. *Ivasyshen S.D.* Properties of integrals which have the type of derivatives of volume potentials for parabolic systems with degeneration on the initial hyperplane / S.D. Ivasyshen, I.P. Medynsky// Мат. студії. – 2000. – **13**, № 1. – С. 33–46.

11. *Мединський І.П.* Про апріорні оцінки розв'язків параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / І.П. Мединський // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". № 407. Прикладна математика. – Львів, 2000. – С. 185–194.

12. *Березан Л. П.* Деякі властивості фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / Л. П. Березан // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 76. Математика. – Чернівці, 2000. – С. 5–10.

13. *Івасишен С. Д.* Задача Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / С. Д. Івасишен, І. П. Мединський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 3. – С. 15–24.

14. *Городецький В.В.* Про розв'язки задачі Коші для рівнянь параболічного типу з виродженням / В.В. Городецький, І.В. Житарюк // Доп. АН УРСР. Сер.А – 1989. – № 12. – С. 5–8.

15. *Городецкий В.В.* О разрешимости задачи Коши для эволюционных уравнений параболического типа с вырождением в некоторых пространствах / В.В. Городецкий, И.В. Житарюк // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 8. – С. 1373–1381.

16. *Івасишен С. Д.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 18–22.

17. *Пасічник Г.С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженнями на початковій гіперплощині / Г. С. Пасічник, С. Д. Івасишен // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип. 76. Математика. – Чернівці: Рута, 2000. – С. 82–91.

18. *Івасишен С.Д.*Про задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами / С.Д. Івасишен, Г.С. Пасічник // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 11. – С. 1484–1496.

19. *Возняк О.Г.* Фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь та їх застосування / О.Г. Возняк, С.Д. Івасишен // Доп. НАН України. – 1996. – № 10. – С. 11–16.

20. *Івасишен С.Д.* Про фундаментальні розв'язки задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь / С.Д. Івасишен, О.Г. Возняк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 2. – С. 13–19.

21. *Возняк О.Г.* Однозначна розв'язність і властивість локалізації розв'язків задачі Коші для одного класу вироджених рівнянь з узагальненими початковими даними / О.Г. Возняк, С.Д. Івасишен // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 27–39.

22. *Возняк О.Г.* Про фундаментальний розв'язок задачі коші для ультрапараболічного рівняння Колмогорова з виродженням на початковій гіперплощині / О.Г. Возняк, С.Д. Івасишен, І.П. Мединський // Буковинський мат. журн. – 2015. – **3**, № 3–4, – С. 41–51.

23. *Мединський І.П.* Задача Коші для квазілінійних параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині / І.П. Мединський // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр. Вип.111. Математика. – Чернівці: Рута, 2001. – С. 90–95.

24. *Івасишен С.Д.* Локальна розв'язність задачі Коші для квазілінійної $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи зі слабким виродженням на початковій гіперплощині / С.Д. Івасишен, І.П. Мединський // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 4. – С. 110–114.

25. *Мединський І.П.* Дослідження С.Д. Ейдельмана нелінійних задач та їх розвиток / І.П. Мединський // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: зб. наук. пр.– **1**, № 1–2. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-ту, 2011. – С. 114–128.

26. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.