УДК 517.956.4

©2016 р. В.С. Дронь, С.Д. Івасишен

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів

ВЛАСТИВОСТІ ОБ'ЄМНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

Розглядається задача Коші для виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова довільного порядку із залежними лише від часової змінної t коефіцієнтами. Встановлюються властивості відповідного такій задачі об'ємного потенціалу в просторах Гельдера зростаючих при $|x| \to \infty$ функцій. З цих властивостей випливає коректна розв'язність задачі Коші з однорідними початковими умовами.

A Cauchy problem for degenerate parabolic equation of Kolmogorov type of arbitrary order with dependent on only time-variable t coefficients is considered. Properties of a volume potential which corresponding to the problem are established in Hölder spaces of increased as $|x| \to \infty$ functions. From these properties a well-posedness of the Cauchy problem with homogeneous initial conditions is implied.

Вступ. Розглядатимемо одновимірну часову змінну t і n-вимірну просторову змінну x, яка складається з груп змінних $x_j := (x_{j1}, ...x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, де $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 0$, $n = n_1 + n_2 + n_3$. Об'єктом дослідження в цій статті є задача Коші вигляду

$$\Big(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{|k_1|\leq 2b} a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1}\Big)\times$$

$$\times u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (1)$$

$$u(t, x)|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \qquad (2)$$

де b – задане натуральне число, $\Pi_{(0,T]} := (0, T] \times \mathbb{R}^n$, T – додатне число. Припускається, що коефіцієнти a_{k_1}, $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $|k_1| \leq 2b$, є неперервними комплекснозначними функціями на $[0, T]$ і такими, що диференціальний вираз $\partial_t - \sum\limits_{|k_1|\leq 2b} a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1}$ рівномірно на $[0, T] \times \mathbb{R}^{n_1}$ параболічний за Петровським.

Якщо $n_3 \geq 1$, то рівняння (1) вироджується за двома групами змінних x_2 і x_3. Коли $n_3 = 0$, а $n_2 \geq 1$, то є виродження за однією групою змінних x_2. У випадку $n_2 = n_3 = 0$ рівняння (1) невироджене.

Для рівняння (1) існує фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) G, детальні властивості якого наведено в [1]. Функція G породжує об'ємний потенціал з густиною f вигляду

$$u(t, x) := \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi,$$

$$(t, x) \in \Pi_{(0,T]}. \qquad (3)$$

Для випадку, коли рівняння (1) 2-го порядку, тобто $b = 1$, в [1] досліджувались властивості функції (3) в припущенні локальної гельдеровості й експоненціального зростання при $|x| \to \infty$ функції f, у [2] з'ясовувався зв'язок гельдерівських властивостей і поведінки при $|x| \to \infty$ густини f і функції u та її похідних. Тут ми досліджуємо аналогічні властивості (3) для рівняння (1) довільного порядку $2b$.

1. Означення норм і просторів. Користуватимемось такими позначеннями: $M := \{1, 2, 3\}$; $N := (n_1 + (2b + 1)n_2 + (4b + 1)n_3)/(2b)$, $N_1 := n_1/(2b)$, $N_2 := (n_1 + (2b + 1)n_2)/(2b)$; $q := 2b/(2b - 1)$; $\overline{x}_{1j}(t) := x_{1j}$, $j \in \{1, ..., n_1\}$; $\overline{x}_{2j}(t) := x_{2j} + tx_{1j}$, $j \in \{1, ..., n_2\}$; $\overline{x}_{3j}(t) := x_{3j} + tx_{2j} + (t^2/2)x_{1j}$, $j \in \{1, ..., n_3\}$; $\overline{x}_l(t) := (\overline{x}_{l1}(t), ..., \overline{x}_{ln_l}(t))$, $l \in M$; $X_1(t) := (\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t), \overline{x}_3(t))$; $X_2(t) := (\xi_1, \overline{x}_2(t), \overline{x}_3(t))$; $X_3(t) := (\xi_1, \xi_2, \overline{x}_3(t))$; $\rho_s(t, x, \xi) := \sum\limits_{l=1}^{s} t^{1-lq}|\overline{x}_l(t) - \xi_l|^q$, $s \in M$; $\rho_0(t, x, \xi) := 0$; $\rho(t, x, \xi) := \rho_3(t, x, \xi)$; $E_c(t, x; \tau, \xi) := \exp\{-c\rho(t - \tau, x, \xi)\}$, якщо

c – додатна стала; $[a,x] := \sum\limits_{l=1}^{3} a_l |x_l|^q$, якщо $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$, $|x_l| := \left(\sum\limits_{j=1}^{n_l} x_{lj}^2\right)^{1/2}$, $x_l \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in M$; $\mathbb{Z}_+^l$ – множина всіх l-вимірних мультиіндексів; $m_l := (m_{l1}, ..., m_{ln_l})$ – елемент множини $\mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in M$; $m := (m_1, m_2, m_3)$ – елемент множини $\mathbb{Z}_+^n$; $|m_l| := m_{l1} + ... + m_{ln_l}$, якщо $m_l \in \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in M$; ∂_t, ∂_y – операції диференціювання першого порядку відповідно за змінними t, y; ∂_y^k – операція диференціювання порядку $k > 1$ за змінною y; $\partial_{x_l}^{m_l} := \partial_{x_{l1}}^{m_{l1}} ... \partial_{x_{ln_l}}^{m_{ln_l}}$, якщо $x_l \in \mathbb{R}^{n_l}$, $m_l \in \mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l \in M$; $\Delta_x^{x'} f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, x', \cdot)$; $d(x, \xi; \alpha) := d(x, \xi; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := \sum\limits_{l=1}^{3} |x_l - \xi_l|^{\alpha_l/(2b(l-1)+1)}$, $d(x, \xi) := d(x, \xi; 1, 1, 1)$, якщо $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_1 \in [0, 1]$, $\alpha_2 \in [0, 2b+1]$, $\alpha_3 \in [0, 4b+1]$; $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, 0) \leq R\}$.

Зауважимо, що існують додатні числа b_1, b_2 такі, що для довільних $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ і $\gamma > 0$: $b_1(d(x;\xi))^\gamma \leq d(x, \xi; \gamma, \gamma, \gamma) \leq b_2(d(x;\xi))^\gamma$.

Однаково позначаються різні сталі, якщо їх величини нас не цікавлять.

Для додатного числа c_0 і набору $a := (a_1, a_2, a_3)$ невід'ємних чисел a_l, $l \in M$, таких, що $T < \min\limits_{l \in M} (c_0/a_l)^{(2b-1)/(2b(l-1)+1)}$, розглянемо функції [1]

$k_l(t, a_l) := c_0 a_l (c_0^{2b-1} - a_l^{2b-1} t^{2b(l-1)+1})^{1-q}$, $l \in M$,
$k(t) := (k_1(t, a_1), k_2(t, a_2), k_3(t, a_3))$,
$s_1(t) := k_1(t, a_1) + 2^{q-1} t^q k_2(t, a_2) + 2^{q-2} t^{2q} k_3(t, a_3)$,
$s_2(t) := 2^{q-1} k_2(t, a_2) + 4^{q-1} t^q k_3(t, a_3)$,
$s_3(t) := 4^{q-1} k_3(t, a_3)$,
$s(t) := (s_1(t), s_2(t), s_3(t))$, $t \in [0, T]$,
які мають такі властивості:

$$k(0) = a, \ a_l \leq k_l(\tau, a_l) < k_l(t, a_l) < s_l(t), \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \ l \in M; \tag{4}$$

$$k_l(t-\tau, k_l(\tau, a_l)) \leq k_l(t, a_l), \ 0 \leq \tau \leq t \leq T, \ l \in M; \tag{5}$$

$$-c_0 \rho(t, x, \xi) + [a, \xi] \leq [k(t), X_1(t)] \leq [s(t), x], \quad t \in (0, T], \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Крім того, легко переконатися, що справджуються ще такі нерівності:

$$-c_0 \rho(t-\tau, x, \xi) + [k(\tau), \xi)] \leq [k(t), X_1(t-\tau)] \leq \leq [s(t), x], \ 0 \leq \tau < t \leq T, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{7}$$

$$-c_0 \rho_{l-1}(t-\tau, x, \xi) + [k(\tau), X_l(t-\tau)] \leq \leq [k(t), X_1(t-\tau)], \ 0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \ l \in M; \tag{8}$$

$$[k(T), X_1(t)] \leq [s(T), x], t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Означимо норми і простори функцій. Нехай $\alpha_1 \in (0, 1]$, $\alpha_2 \in (1, 2b+1]$, $\alpha_3 \in (2b+1, 4b+1]$, $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $p_1 \in \{0, 1, ..., 2b\}$, $\{p_2, p_3\} \subset \{0, 1\}$, $p := (p_1, p_2, p_3)$. Використовуватимемо такі гельдерові простори функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}$:

$C_{k(\cdot)}$ – простір усіх неперервних функцій w, для яких скінченною є норма

$$||w||_{k(\cdot)} := \sup_{(t,x) \in \Pi_{[0,T]}} (|w(t, x)| \exp\{-[k(t), x]\});$$

$C_{k(\cdot)}^\alpha$ – простір усіх функцій w, для яких скінченною є норма

$$||w||_{k(\cdot)}^\alpha := ||w||_{k(\cdot)} + [w]_{k(\cdot)}^\alpha,$$

де $[w]_{k(\cdot)}^\alpha := \sup\limits_{\substack{\{(t,x),(t,x')\} \subset \Pi_{[0,T]} \\ x \neq x'}} \frac{|\Delta_x^{x'} w(t,x)|}{d(x,x';\alpha)} \times$

$$\times (\exp\{[k(t), x]\} + \exp\{[k(t), x']\})^{-1};$$

$C_{k(\cdot)}^{p,\alpha}$ – простір усіх функцій w, які разом зі своїми похідними $\partial_{x_l}^{m_l} w$, $|m_l| \leq p_l$, $l \in M$, належать до простору $C_{k(\cdot)}^\alpha$, тобто є скінченною норма

$$||w||_{k(\cdot)}^{p,\alpha} := ||w||_{k(\cdot)}^\alpha + \sum_{l=1}^{3} \sum_{0 < |m_l| \leq p_l} ||\partial_{x_l}^{m_l} w||_{k(\cdot)}^\alpha;$$

$C_{s(\cdot)}^{p,\alpha}$ – простір, означення якого одержується з означення простору $C_{k(\cdot)}^{p,\alpha}$ заміною функції k на функцію s.

2. Відомості про фундаментальний розв'язок задачі Коші. В [1] встановлено, що ФРЗК G для рівняння (1) має вигляд

$$G(t, x; \tau, \xi) = = (t-\tau)^{-N} F_{\sigma \to y}^{-1} [\tilde{V}(t, \tau, \sigma)](t, \tau, y)|_{y = y(t-\tau, x, \xi)}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де F^{-1} – обернене перетворення Фур'є за просторовими змінними,

$$\tilde{V}(t, \tau, \sigma) := \exp\{\sum_{|k_1| \leq 2b} i^{|k_1|} (t-\tau)^{1-|k_1|/(2b)} \times \times \int_0^1 a_{k_1}(\tau + (t-\tau)\beta)(\sigma_1' + \beta\sigma_2' + \frac{\beta^2}{2}\sigma_3)^{k_1'} \times \times (\sigma_1'' + \beta\sigma_2'')^{k_1''} (\sigma_1''')^{k_1'''} d\beta\},$$

$y(t, x, \xi) := (t^{-1/(2b)}(x_1 - \xi_1), t^{-1-1/(2b)}(x_2 + t\hat{x}_1 - \xi_2), t^{-2-1/(2b)}(x_3 + tx_2' + \frac{t^2}{2} x_1' - \xi_3))$, $x_1' := (x_{11}, ..., x_{1n_3})$, $x_1'' := (x_{1(n_3+1)}, ..., x_{1n_2})$, $x_1''' := (x_{1(n_2+1)}, ..., x_{1n_1})$, $\hat{x}_1 := (x_{11}, ..., x_{1n_2})$, і такі властивості:

1) функція $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, неперервна при $(t, x) \neq (\tau, \xi)$ ра-

зом зі своїми похідними $\partial_{x_1}^{m_1}\partial_{x_2}^{m_2}\partial_{x_3}^{m_3}G$ і справджуються оцінки

$$|\partial_{x_1}^{m_1}\partial_{x_2}^{m_2}\partial_{x_3}^{m_3}G(t,x;\tau,\xi)| \le$$
$$\le C_m(t-\tau)^{-N-(|m_1|+(2b+1)|m_2|+(4b+1)|m_3|)/(2b)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi), \quad 0\le\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,$$
$$m_l\in\mathbb{Z}_+^{n_l}, \quad l\in M, \tag{10}$$

де C_m і c – деякі додатні сталі;

2) для довільного $\gamma\in(0,1]$ і того самого c, що в (10), правильними є оцінки

$$|\Delta_x^{x'}\partial_x^m G(t,x;\tau,\xi)| \le C_m(d(x;x'))^{\gamma}\times$$
$$\times(t-\tau)^{-N-(|m_1|+(2b+1)|m_2||(4b+1)|m_3|+\gamma)/(2b)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi), \quad (d(x;x'))^{2b}\le t-\tau,$$
$$0\le\tau<t\le T, \{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n, m\in\mathbb{Z}_+^n; \tag{11}$$

3) справджується рівність

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)d\xi =$$
$$=\exp\{(t-\tau)\int_0^1 a_0(\tau+(t-\tau)\beta)d\beta\},$$
$$0\le\tau<t\le T, \ x\in\mathbb{R}^n; \tag{12}$$

4) для $0\le\tau<t\le T$ і $x\in\mathbb{R}^n$ правильні рівності

$$\partial_x^m\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)d\xi=0, \quad m\in\mathbb{Z}_+^n\setminus\{0\};$$
$$\partial_{x_2}^{m_2}\partial_{x_3}^{m_3}\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3=0,$$
$$(m_2,m_3)\in\mathbb{Z}_+^{n_2+n_3}\setminus\{0\};$$
$$\partial_{x_3}^{m_3}\int_{\mathbb{R}^{n_3}}G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3=0, m_3\in\mathbb{Z}_+^{n_3}\setminus\{0\}. \tag{13}$$

Зауваження 1. Зі структури рівняння (1) та ФРЗК для нього випливає, що функція $\int_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3$ є ФРЗК для рівняння (1), якщо в нього входять тільки перші дві групи просторових змінних ($n_3=0$), а $\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3$ – ФРЗК для невиродженого параболічного за Петровським рівняння ($n_2=n_3=0$), адже

$$\int_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3=(t-\tau)^{-N_2}\times$$
$$\times F^{-1}_{(\sigma_1,\sigma_2)\to(y_1,y_2)}[\tilde{V}(t,\tau,(\sigma_1,\sigma_2,0))](t,\tau,y_1,y_2),$$
$$\int_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3=(t-\tau)^{-N_1}\times$$
$$\times F^{-1}_{\sigma_1\to y_1}[\tilde{V}(t,\tau,(\sigma_1,0,0))](t,\tau,y_1),$$

де $y_1=y_1(t-\tau,x,\xi)$, $y_2=y_2(t-\tau,x,\xi)$.

Твердження із зауваження 1 було враховано в [1], зокрема, при доведенні рівностей (13).

Надалі сталу c_0 з означення функцій $k_l(t,a_l)$, $l\in M$, братимемо з інтервалу $(0,c)$, де c – стала з оцінок (10). Права частина нерівності (10) містить функції E_c і ρ, які мають такі властивості [1]:

$$\int_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N}E_\delta(t,x;\tau,\xi)d\xi=C, \ \tau<t,$$
$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \delta>0; \tag{14}$$

$$(d(X_s(t-\tau);\xi))^{\beta}E_{\bar{c}}(t,x;\tau,\xi)\le$$
$$\le C(t-\tau)^{\beta/(2b)}E_{\bar{c}_1}(t,x;\tau,\xi), 0\le\tau<t\le T,$$
$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \ \bar{c}_1\in(0,\bar{c}), \ \beta\in(0,1]; \tag{15}$$

$$\forall\{c_1,c_2\}\subset\mathbb{R}, 0<c_2<c_1, \ \exists C>0:$$
$$\exp\{-c_1\rho(t,x',\xi)\}\le C\exp\{-c_2\rho(t,x,\xi)\},$$
$$x\in\mathbb{R}^n, \quad t>0, \quad d(x,x')<t^{1/(2b)}. \tag{16}$$

Крім того, правильна нерівність

$$\forall\bar{R}>0: \ \rho(t,x,\xi)\ge t^{-\lambda}R^q, \ t\in(0,T],$$
$$x\in B_{\bar{R}}, \ \xi\in R^n\setminus B_{2R}, \tag{17}$$

де $R:=\bar{R}(1+T+T^2/2)$, $\lambda=q-1$ при $t\in(0,1]$, $\lambda=3q-1$ при $t>1$.

Доведемо нерівність (17). Маємо

$$\rho(t,x,\xi)\ge t^{-\lambda}\sum_{l=1}^{3}|\bar{x}_l(t)-\xi_l|^q\ge t^{-\lambda}||\xi|-|X_1(t)||^q.$$

Якщо $t\in(0,T]$, $x\in B_{\bar{R}}$, то $|X_1(t)|=$
$=|x+t(0,(x_{11},...,x_{1n_2}),(x_{21},...,x_{2n_3}))+$
$+(t^2/2)(0,0,(x_{11},...,x_{1n_3}))\le$
$\le|x|+t(|x_1|+|x_2|)+(t^2/2)|x_1|\le$
$\le(1+t+t^2/2)|x|\le(1+T+T^2/2)\bar{R}$. Тому для $\xi\in R^n\setminus B_{2R}$, $R=\bar{R}(1+T+T^2/2)$:
$\rho(t,x,\xi)\ge t^{-\lambda}(2R-\bar{R}(1+T+T^2/2))^q=t^{-\lambda}R^q$.

3. Формули для похідних від об'ємного потенціалу, породженого фундаментальним розв'язком рівняння (1). Далі позначатимемо: $r_1:=2b$; $r_2:=1$; $r_3:=1$.

Теорема 1. *Нехай $f\in C_{k(\cdot)}$ і задовольняється така умова Гельдера з числами $\alpha_1\in(0,1]$, $\alpha_2\in(1,2b+1]$ і $\alpha_3\in(2b+1,4b+1]$:*

$$\forall R>0 \ \exists C>0 \ \forall(t,x)\in[0,T]\times B_R:$$
$$|\Delta_x^{x'}f(t,x)|\le Cd(x,x';\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3). \tag{18}$$

Тоді об'ємний потенціал (3) має неперервні похідні, що входять у рівняння (1), які визначаються для $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$ *формулами*

$$\partial_{x_1}^{m_1}u(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{m_1}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$|m_1|<2b; \qquad (19)$$

$$\partial_{x_l}^{m_l}u(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_l}^{m_l}G(t,x;\tau,\xi)\times$$

$$\times\Delta_\xi^{X_l(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi,\quad |m_l|=r_l,\ l\in M; \quad (20)$$

$$\partial_t u(t,x)=f(t,x)+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_t G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{X_3(t-\tau)}f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}}\partial_t\int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}}G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3\times$$

$$\times\Delta_{X_3(t-\tau)}^{X_2(t-\tau)}f(\tau,X_3(t-\tau))d\xi_1d\xi_2+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}}\partial_t\int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}}G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2d\xi_3\times$$

$$\times\Delta_{X_2(t-\tau)}^{X_1(t-\tau)}f(\tau,X_2(t-\tau))d\xi_1+$$

$$+\int\limits_0^t\partial_t\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,x;\tau,\xi)d\xi f(\tau,X_1(t-\tau))d\tau. \qquad (21)$$

Крім того задовольняється умова

$$\partial_{x_l}^{m_l}u(t,x)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0,\quad |m_l|\le r_l,\ l\in M, \qquad (22)$$

рівномірно стосовно $x\in B_R$ *з довільним додатним* R.

Доведення. Покладемо

$$I(t,x;\tau):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$K_{m_1}(t,x;\tau):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{m_1}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad x\in\mathbb{R}^n. \qquad (23)$$

Тоді

$$u(t,x)=\int\limits_0^t I(t,x;\tau)d\tau,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}.$$

Спочатку доведемо правильність формули (19). Щоб довести, що

$$\partial_{x_1}^{m_1}I(t,x;\tau)=K_{m_1}(t,x;\tau),\quad 0\le\tau<t\le T,$$

$$x\in\mathbb{R}^n,\ |m_1|<2b, \qquad (24)$$

необхідно переконатися, що інтеграл $K_{m_1}(t,x;\tau)$ збігається рівномірно стосовно $x\in B_R$ для довільного $R>0$ та фіксованих t і τ. Оцінимо підінтегральну функцію з K_{m_1}. На підставі (10) та належності функції f до простору $C_{k(\cdot)}$ маємо

$$|\partial_{x_1}^{m_1}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)|\le C_m(t-\tau)^{-N-|m_1|/(2b)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)\exp\{[k(\tau),\xi]\}||f||_{k(\cdot)}.$$

За допомогою нерівності (7) отримуємо

$$|\partial_{x_1}^{m_1}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)|\le C_m(t-\tau)^{-N-|m_1|/(2b)}\times$$
$$\times E_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi)\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}=$$
$$=C_m||f||_{k(\cdot)}\exp\{[s(t),x]\}(t-\tau)^{-N-|m_1|/(2b)}\times$$
$$\times\exp\{-(c-c_0)\sum_{l=1}^3(t-\tau)^{1-lq}|\bar{x}_l(t-\tau)-\xi_l|^q\}=$$
$$=:J_1(t,x;\tau,\xi).$$

Якщо в інтегралі по $\xi\in\mathbb{R}^n$ від оцінної функції J_1 зробити заміну змінних ξ_l за формулами

$$\eta_l=(t-\tau)^{1/q-l}(\xi_l-\bar{x}_l(t-\tau)),\ l\in M, \qquad (25)$$

то дістанемо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}J_1(t,x;\tau,\xi)d\xi=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}C_m(t-\tau)^{-|m_1|/(2b)}\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}\times$$
$$\times\exp\{-(c-c_0)\sum_{l=1}^3|\eta_l|^q\}d\eta=$$
$$=C(t-\tau)^{-|m_1|/(2b)}\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}.$$

Отже, інтеграл $K_{m_1}(t,x;\tau)$ збігається рівномірно стосовно $x\in B_R$ для довільного $R>0$ та фіксованих t і τ, тому справджуються рівність (24) та оцінка

$$|\partial_{x_1}^{m_1}I(t,x;\tau)|\le$$
$$\le C(t-\tau)^{-|m_1|/(2b)}\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)},$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ |m_1|<2b. \qquad (26)$$

За допомогою нерівності (26) доводиться рівномірна збіжність стосовно $(t,x)\in[0,T]\times B_R$, $R>0$, інтеграла

$$\int\limits_0^t\partial_{x_1}^{m_1}I(t,x;\tau)d\tau.$$

Отже, правильна рівність

$$\partial_{x_1}^{m_1} u(t,x) = \int\limits_0^t \partial_{x_1}^{m_1} I(t,x;\tau)d\tau,$$

$$(t,x)\in[0,T]\times B_R,\ R>0,$$

звідки на підставі довільності $R>0$ та (24) випливає формула (19). Крім того, справджується оцінка

$$|\partial_{x_1}^{m_1} u(t,x)| \le Ct^{1-|m_1|/(2b)}\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)},$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ |m_1|<2b. \qquad (27)$$

Для доведення рівності (20) покладемо

$$I'(t,x;\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^y f(\tau,\xi)|_{y=X_l(t-\tau)}d\xi,$$

$$K'_{m_l}(t,x;\tau) :=$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_l}^{m_l} G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{X_l(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi,$$

$$0\le\tau<t\le T,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Доведемо, що

$$\partial_{x_l}^{m_l} I'(t,x;\tau) = K'_{m_l}(t,x;\tau),\ 0\le\tau<t\le T,$$

$$x\in\mathbb{R}^n,\ |m_l|=r_l,\ l\in M. \qquad (28)$$

Для цього оцінимо підінтегральну функцію з K'_{m_l}. Нехай $\bar{R}>0$, $R := \bar{R}(1+T+T^2/2)$. При $(t,x)\in(0,T]\times B_{\bar{R}}$ і $(\tau,\xi)\in[0,t)\times B_{2R}$ на підставі (10) та (18), а потім (15) з $\bar{c}=c$ з урахуванням того, що $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$, маємо

$$|\partial_{x_l}^{m_l} G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{X_l(t-\tau)} f(\tau,\xi)| \le$$
$$\le C_m(t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)d(\xi,X_l(t-\tau);\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \le$$
$$\le C_m(t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|+\alpha_l/(2b)}E_{\bar{c}_1}(t,x;\tau,\xi). \qquad (29)$$

Використовуючи нерівності (7), (8), (10) і (17), а також те, що $f\in C_{k(\cdot)}$, для $(t,x)\in(0,T]\times B_{\bar{R}}$ і $(\tau,\xi)\in[0,t)\times(\mathbb{R}^n\setminus B_{2R})$ отримуємо

$$|\partial_{x_l}^{m_l} G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{X_l(t-\tau)} f(\tau,\xi)| \le$$
$$\le C_m(t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|}E_c(t,x;\tau,\xi)\times$$
$$\times(\exp\{[k(\tau),\xi]\}+\exp\{[k(\tau),X_l(t-\tau)]\})\times$$
$$\times||f||_{k(\cdot)} \le C_m(t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|}\times$$
$$\times E_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi)\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)} \le$$
$$\le C_m(t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|}\times$$
$$\times\exp\{-\tfrac{c-c_0}{2}(t-\tau)^{-\lambda}R^q\}\times$$
$$\times E_{(c-c_0)/2}(t,x;\tau,\xi)\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}.$$

Очевидно, що існує таке $c_2\in(0,\frac{c-c_0}{2})$, що

$$(t-\tau)^{-(l-1/q)|m_l|}\exp\{-\tfrac{c-c_0}{2}(t-\tau)^{-\lambda}R^q\} \le$$
$$\le C\exp\{-c_2(t-\tau)^{-\lambda}R^q\}.$$

Тому

$$|\partial_{x_l}^{m_l} G(t,x;\tau,\xi)\Delta_\xi^{X_l(t-\tau)} f(\tau,\xi)| \le$$
$$\le C(t-\tau)^{-N}\exp\{-c_2(t-\tau)^{-\lambda}R^q\}\times$$
$$\times E_{(c-c_0)/2}(t,x;\tau,\xi)\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)},$$

$$(t,x)\in(0,T]\times B_{\bar{R}},(\tau,\xi)\in[0,t)\times(\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}). \qquad (30)$$

Якщо подати K'_{m_l} у вигляді суми інтегралів по B_{2R} і по $\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}$, то на підставі (29) і (30) перший доданок оціниться через

$$J_2(t,x;\tau) := \int\limits_{B_{2R}} C_m(t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|+\alpha_l/(2b)}\times$$
$$\times E_{\bar{c}_1}(t,x;\tau,\xi)d\xi,\quad 0\le\tau<t\le T,\quad x\in B_{\bar{R}},$$

а другий – через

$$J_3(t,x;\tau) :=$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} C(t-\tau)^{-N}\exp\{-c_2(t-\tau)^{-\lambda}R^q\}\times$$
$$\times E_{(c-c_0)/2}(t,x;\tau,\xi)\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}d\xi,$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad x\in B_{\bar{R}}.$$

Враховуючи рівності (14) і те, що при заданих α_l і $|m_l|=r_l$ виконується нерівність $-(l-1/q)|m_l|+\alpha_l/(2b)>-1$, $l\in M$, дістаємо збіжність інтегралів J_2 і J_3 та рівномірну збіжність інтеграла $K'_{m_l}(t,x;\tau)$ стосовно $x\in B_{\bar{R}}$ при фіксованих t і τ. На підставі довільності $\bar{R}>0$ звідси випливає рівність (28). Крім того, оскільки

$$J_2(t,x;\tau) \le \int\limits_{R^n} C_m(t-\tau)^{-N-(l-1/q)|m_l|+\alpha_l/(2b)}\times$$
$$\times E_{\bar{c}_1}(t,x;\tau,\xi)d\xi = C(t-\tau)^{-(l-1/q)|m_l|+\alpha_l/(2b)},$$
$$J_3(t,x;\tau) \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} C(t-\tau)^{-N}E_{(c-c_0)/2}(t,x;\tau,\xi)d\xi\times$$
$$\times\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)} = C\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)},$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

то маємо ще таку оцінку для $|m_l|=r_l$, $l\in M$:

$$|\partial_{x_l}^{m_l} I'(t,x;\tau)| \le C((t-\tau)^{-(l-1/q)|m_l|+\alpha_l/(2b)}+$$
$$+\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}),\quad 0\le\tau<t\le T,$$

$$x\in\mathbb{R}^n. \qquad (31)$$

Вираз $\partial_{x_l}^{m_l} I'(t,x;\tau)$ можна записати у вигляді

$$\partial_{x_l}^{m_l} I'(t,x;\tau) = \partial_{x_l}^{m_l} I(t,x;\tau) + \partial_{x_l}^{m_l} I'_1(t,x;\tau),$$

де I – інтеграл з формули (23), а

$$I'_1(t,x;\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,y)|_{y=X_l(t-\tau)}d\xi,$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Оскільки

$$I'_1(t,x;\tau) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}\times\ldots\times\mathbb{R}^{n_{l-1}}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_l}\times\ldots\times\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_l\ldots d\xi_3\Big)\times$$
$$\times f(\tau,y)|_{y=X_l(t-\tau)}d\xi_1\ldots d\xi_{l-1},$$

то на підставі відповідної рівності з (13)

$$\partial_{x_l}^{m_l} I_1'(t,x;\tau) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}\times\ldots\times\mathbb{R}^{n_{l-1}}} \partial_{x_l}^{m_l}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n_l}\times\ldots\times\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_l\ldots d\xi_3\Big)\times$$
$$\times f(\tau,y)|_{y=X_l(t-\tau)}d\xi_1\ldots d\xi_{l-1} = 0.$$

Отже,

$$\partial_{x_l}^{m_l} I'(t,x;\tau) = \partial_{x_l}^{m_l} I(t,x;\tau),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (32)$$

Оцінка (31), в якій $-(l-\frac{1}{q})|m_l| + \frac{\alpha_l}{2b} > -1$, та рівність (32) доводять рівномірну збіжність стосовно $(t,x) \in (0,T] \times B_R$ при довільному $R > 0$ інтеграла

$$\int\limits_0^t \partial_{x_l}^{m_l} I(t,x;\tau)d\tau.$$

Звідси та довільності $R > 0$ випливає рівність

$$\partial_{x_l}^{m_l} u(t,x) = \int\limits_0^t \partial_{x_l}^{m_l} I(t,x;\tau)d\tau,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \ |m_l| = r_l, \ l \in M,$$

що разом з (32) і (28) доводить формулу (20). Крім того, справджується оцінка

$$|\partial_{x_l}^{m_l} u(t,x)| \le C(t^{1-(l-1/q)|m_l|+\alpha_l/(2b)} +$$
$$+ t\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}),$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \ |m_l| = r_l, \ l \in M. \qquad (33)$$

Тепер доведемо правильність формули (21) для $(t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}$, де $t_0 > 0$. Для цього розглянемо сукупність функцій

$$u_h(t,x) := \int\limits_0^{t-h} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi =$$
$$= \int\limits_0^{t-h} I(t,x;\tau)d\tau, \ (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}, 0 < h < t_0. \qquad (34)$$

Оскільки підінтегральна функція I на підставі оцінки (26) є обмеженою, то існує похідна $\partial_t u_h$ в $\Pi_{[t_0,T]}$, причому

$$\partial_t u_h(t,x) = I(t,x;t-h) + \int\limits_0^{t-h} \partial_t I(t,x;\tau)d\tau,$$
$$(t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}. \qquad (35)$$

Очевидно, що інтеграл I можна подати у вигляді такої суми:

$$I(t,x;\tau) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\Delta_{\xi}^{y_3} f(\tau,\xi)|_{y_3=X_3(t-\tau)}d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\Delta_{y_3}^{y_2} f(\tau,y_3)|_{\substack{y_2=X_2(t-\tau)\\ y_3=X_3(t-\tau)}}d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\Delta_{y_2}^{y_1} f(\tau,y_2)|_{\substack{y_1=X_1(t-\tau)\\ y_2=X_2(t-\tau)}}d\xi +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,y_1)|_{y_1=X_1(t-\tau)}d\xi =$$
$$=: \sum_{l=1}^{4} I_l''(t,x;\tau), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тому

$$\partial_t I(t,x;\tau) = \sum_{l=1}^{4} \partial_t I_l''(t,x;\tau),$$
$$0 \le \tau < t \le T, \ x \in \mathbb{R}^n. \qquad (36)$$

Покладемо

$$K_1(t,x;\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t,x;\tau,\xi)\Delta_{\xi}^{X_3(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi,$$
$$K_2(t,x;\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1+n_2}} \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3\times$$
$$\times \Delta_{X_3(t-\tau)}^{X_2(t-\tau)} f(\tau,X_3(t-\tau))d\xi_1 d\xi_2,$$
$$K_3(t,x;\tau) := \int\limits_{\mathbb{R}^{n_1}} \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3\times$$
$$\times \Delta_{X_2(t-\tau)}^{X_1(t-\tau)} f(\tau,X_2(t-\tau))d\xi_1,$$
$$K_4(t,x;\tau) := \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)d\xi f(\tau,X_1(t-\tau)),$$

і доведемо, що

$$\partial_t I_l''(t,x;\tau) = K_l(t,x;\tau), \quad 0 \le \tau < t \le T,$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \ l \in \{1,2,3,4\}. \qquad (37)$$

Для цього встановимо, що інтеграли $K_l(t,x;\tau)$ збігаються рівномірно стосовно $t \in [t_1 - h/3, \min(t_1 + h/3, T)]$, де t_1 – довільно фіксоване число з $[t_0,T]$, для фіксованих $x \in \mathbb{R}^n$ і $\tau \in [0, t_1 - 2h/3]$.

При $l \in \{1,2,3\}$ це доводиться аналогічно до доведення збіжності інтегралів K'_{m_l}, тільки для оцінювання підінтегральних функцій з K_l використовуються не безпосередньо оцінки (10), а оцінки

$$|\partial_t G(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-N-2-1/(2b)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)(|x_1| + |x_2|),$$
$$|\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-N_2-1-1/(2b)}\times$$
$$\times \exp\{-c\rho_2(t-\tau,x,\xi)\}|x_1|,$$
$$|\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}^{n_2+n_3}} G(t,x;\tau,\xi)d\xi_2 d\xi_3| \le C(t-\tau)^{-N_1-1}\times$$
$$\times \exp\{-c\rho_1(t-\tau,x,\xi)\},$$
$$0 \le \tau < t \le T, \ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (38)$$

Щоб отримати першу з оцінок (38), потрібно підставити G в однорідне рівняння (1), скористатися тим, що G є розв'язком цього рівняння, оцінками (10) та обмеженістю коефіцієнтів. Дві наступні оцінки з (38) отримуються подібним чином, тільки з урахуванням зауваження 1.

Зазначимо, що при доведенні (37) при $l \in \{1,2,3\}$ отримуємо такі оцінки:

$$|\partial_t I_1''(t,x;\tau)| = |K_1(t,x;\tau)| \leq \leq C((t-\tau)^{-2-1/(2b)+\alpha_3/(2b)} \times \times(|x_1|+|x_2|) + \exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}),$$

$$|\partial_t I_2''(t,x;\tau)| = |K_2(t,x;\tau)| \leq C(|x_1| \times \times(t-\tau)^{-1-1/(2b)+\alpha_2/(2b)} + \exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}),$$

$$|\partial_t I_3''(t,x;\tau)| = |K_3(t,x;\tau)| \leq C((t-\tau)^{-1+\frac{\alpha_1}{2b}} + + \exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}),$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{39}$$

На підставі рівності (12), належності f до простору $C_{k(\cdot)}$, а також нерівностей (4) і (7) маємо

$$|K_4(t,x;\tau)| \leq C\exp\{[k(\tau), X_1(t-\tau)]\}||f||_{k(\cdot)} \leq \leq C\exp\{[k(t), X_1(t-\tau)]\}||f||_{k(\cdot)} \leq \leq C\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Звідси випливає, що $K_4(t,x;\tau)$ також рівномірно збігається стосовно $t \in [t_1 - h/3, \min(t_1 + h/3, T)]$, справджуються рівність (37) з $l = 4$ та оцінка

$$|\partial_t I_4''(t,x;\tau)| = |K_4(t,x;\tau)| \leq C\exp\{[s(t),x]\} \times \times||f||_{k(\cdot)}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{40}$$

Об'єднавши рівності (35), (36) і (37), отримаємо

$$\partial_t u_h(t,x) = I(t,x;t-h) + + \int_0^{t-h} \sum_{l=1}^4 K_l(t,x;\tau)d\tau = = I(t,x;t-h) + \sum_{l=1}^4 \int_0^{t-h} K_l(t,x;\tau)d\tau,$$

$$(t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}, \ h \in (0,t_0). \tag{41}$$

Оскільки для довільних $\bar{R} > 0$ і $t_0 \in (0,T)$ рівномірно стосовно $(t,x) \in [t_0,T] \times B_{\bar{R}}$ є правильними такі граничні співвідношення:

$$u_h(t,x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} u(t,x); \tag{42}$$

$$I(t,x;t-h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(t,x); \tag{43}$$

$$\int_0^{t-h} K_l(t,x;\tau)d\tau \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_0^t K_l(t,x;\tau)d\tau, \quad l \in \{1,2,3,4\}, \tag{44}$$

то при прямуванні в рівності (41) до границі при $h \to 0$ отримаємо формулу (21).

Доведемо співвідношення (42)–(44). За допомогою оцінки (26) маємо

$$|u(t,x) - u_h(t,x)| = = |\int_{t-h}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi| \leq \leq |\int_{t-h}^t |I(t,x;\tau)|d\tau \leq \leq \int_{t-h}^t C\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}d\tau = = C\exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}h,$$

$$(t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}, \ 0 < h < t_0,$$

звідки випливає (42).

Розпишемо

$$I(t,x;t-h) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t-h,\xi)f(t,\xi)d\xi + + \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t-h,\xi)\Delta_{t-h}^t f(t-h,\xi)d\xi. \tag{45}$$

На підставі граничної властивості інтеграла Пуассона задачі Коші [1]

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t-h,\xi)f(t,\xi)d\xi \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(t,x) \tag{46}$$

рівномірно стосовно $(t,x) \in [t_0,T] \times B_{\bar{R}}$.

Унаслідок оцінок (10) і (17), належності f до $C_{k(\cdot)}$ та неперервності функції f за t в $[t_0,T] \times B_R$ отримаємо

$$|\int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;t-h,\xi)\Delta_{t-h}^t f(t-h,\xi)d\xi| \leq \leq \int_{B_{2R}} |G(t,x;t-h,\xi)\Delta_{t-h}^t f(t-h,\xi)|d\xi + + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} |G(t,x;t-h,\xi)\Delta_{t-h}^t f(t-h,\xi)|d\xi \leq \leq \int_{B_{2R}} Ch^{-N}E_c(t,x;t-h,\xi)\omega(h,R)d\xi + + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} Ch^{-N}E_c(t,x;t-h,\xi) \times \times(\exp\{[k(t-h),\xi)]\} + \exp\{[k(t),\xi)]\}) \times \times||f||_{k(\cdot)}d\xi =: J_4(t,x;h) + J_5(t,x;h),$$

де $R = \bar{R}(1+T+T^2/2)$, $\omega(h,R) \to 0$ при $h \to 0$.

Використовуючи рівність (14), маємо

$$J_4(t,x;h) \leq$$

$$\leq \int\limits_{R^n} Ch^{-N} E_c(t,x;t-h,\xi)\omega(h,R)d\xi =$$
$$= C\omega(h,R),\ (t,x) \in [t_0,T] \times B_{\bar{R}},$$

а на підставі (7), (14) і (17)

$$J_5(t,x;h) = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} Ch^{-N} \exp\{-c\rho(h,x,\xi)\}||f||_{k(\cdot)} \times$$
$$\times(\exp\{[k(t-h),\xi)]\} + \exp\{[k(t),\xi)]\})d\xi \leq$$
$$\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} h^{-N} \exp\{-(c-c_0)\rho(h,x,\xi)\} \times$$
$$\times(\exp\{[k(t),X_1(h)]\} +$$
$$+ \exp\{[k(t+h),X_1(h))]\})d\xi||f||_{k(\cdot)} \leq$$
$$\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} h^{-N} \exp\{-\tfrac{c-c_0}{2} h^{-\lambda} R^q\} \times$$
$$\times E_{(c-c)/2}(h,x;0,\xi)d\xi(\exp\{[k(t),X_1(h)]\} +$$
$$+ \exp\{[k(t+h),X_1(h)]\})||f||_{k(\cdot)} \leq$$
$$\leq C \exp\{-\tfrac{c-c_0}{2} h^{-\lambda} R^q\}||f||_{k(\cdot)} \times$$
$$\times(\exp\{[k(t),X_1(h)]\} + \exp\{[k(t+h),X_1(h)]\}),$$
$$(t,x) \in [t_0,T] \times B_{\bar{R}}.$$

Оскільки J_4 та J_5 прямують до нуля при $h \to 0$ рівномірно щодо $(t,x) \in [t_0,T] \times B_{\bar{R}}$, то другий доданок правої частини (45) рівномірно в цій області прямує до нуля при $h \to 0$, а з урахуванням (46) отримуємо (43).

Співвідношення (44) випливає з оцінок (39) і (40), на підставі яких $\left| \int\limits_{t-h}^{t} K_l(t,x;\tau)d\tau \right| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ рівномірно щодо $(t,x) \in [t_0,T] \times B_{\bar{R}}$, $l \in \{1,2,3,4\}$.

Отже, доведена правильність формул (19)–(21). Правильність (22) безпосередньо випливає з оцінок (27) і (33). $\triangleright$

Зауваження 2. З виведених формул (19)–(21) на підставі того, що функція $G(t,x;\tau,\xi)$ як функція t і x при довільно фіксованих $\tau \in [0,t)$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ є розв'язком рівняння (1) з $f=0$, випливає, що функція (3) є регулярним розв'язком неоднорідного рівняння (1).

4. Властивості об'ємного потенціалу. Крім наведених у теоремі 1 і зауваженні 2 властивостей об'ємного потенціалу, наступна теорема містить нові його властивості.

Теорема 2. *Якщо* $f \in C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, *де* $\alpha := (\beta,\beta+1,\beta+2b+1)$ *з деяким* $\beta \in (0,1]$, *то* $u \in C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, *де* $\alpha' := (\beta,\beta,\beta)$, $r := (r_1,r_2,r_3)$, *справджуються оцінка*

$$||u||^{r,\alpha'}_{s(\cdot)} \leq C||f||^{\alpha}_{k(\cdot)} \tag{47}$$

і рівності

$$\lim_{t\to 0}\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|\partial^{m_l}_{x_l}u(t,x)|\exp\{-[s(t),x]\})\Big) = 0,$$
$$|m_l| \leq r_l,\ l \in M. \tag{48}$$

Доведення. Перш за все зауважимо, що оскільки $f \in C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, $\alpha = (\beta,\beta+1,\beta+2b+1)$ з деяким $\beta \in (0,1]$, то функція f задовольняє умови теореми 1, зокрема умову (18) з $\alpha_1 = \beta$, $\alpha_2 = \beta+1$, $\alpha_3 = \beta+2b+1$. Тому для u правильні всі твердження теореми 1.

Спочатку розглянемо випадок, коли $|m_1| < 2b$. На підставі (27) при $d(x,x') \geq t^{1/(2b)}$ для довільного $\gamma \in (0,1]$ одержуємо

$$|\Delta^{x'}_x \partial^{m_1}_{x_1} u(t,x)| \leq |\partial^{m_1}_{x_1} u(t,x)| +$$
$$+ |\partial^{m_1}_{x_1} u(t,x)|_{x=x'}| \leq Ct^{1-|m_1|/(2b)} \times$$
$$\times(\exp\{[s(t),x]\} + \exp\{[s(t),x']\})||f||_{k(\cdot)} \leq$$
$$\leq C(d(x,x'))^{\gamma} t^{1-(|m_1|+\gamma)/(2b)}(\exp\{[s(t),x]\} +$$
$$+ \exp\{[s(t),x']\})||f||_{k(\cdot)}.$$

Якщо $d(x,x') < t^{1/(2b)}$, то за допомогою (7), (11), (14), (19) і належності f до $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$ маємо

$$|\Delta^{x'}_x \partial^{m_1}_{x_1} u(t,x)| \leq$$
$$\leq \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Delta^{x'}_x \partial^{m_1}_{x_1} G(t,x;\tau,\xi)||f(\tau,\xi)|d\xi \leq$$
$$\leq C(d(x,x'))^{\gamma} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N-(|m_1|+\gamma)/(2b)} \times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)\exp\{[k(\tau),\xi]\}d\xi||f||_{k(\cdot)} \leq$$
$$\leq C(d(x,x'))^{\gamma} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-(|m_1|+\gamma)/(2b)} d\tau \times$$
$$\times \exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)} =$$
$$= C(d(x,x'))^{\gamma} t^{1-(|m_1|+\gamma)/(2b)} \times$$
$$\times \exp\{[s(t),x]\}||f||_{k(\cdot)}.$$

З цих оцінок та (27) випливає, що $u \in C^{p,\alpha''}_{s(\cdot)}$, де $p = (p_1,0,0)$, $p_1 < 2b$, $\alpha'' = (\gamma,\gamma,\gamma)$, $\gamma \in (0,1]$, і

$$||u||^{p,\alpha''}_{s(\cdot)} \leq C||f||_{k(\cdot)}. \tag{49}$$

Нехай тепер $|m_l| = r_l$, $l \in M$. Оцінки (33) за умов теореми на f не є точними. Тому оцінимо $\partial^{m_l}_{x_l} u$ за допомогою формули (20), належності f до $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, нерівностей (7), (8), (10) і (15) та рівності (14). Маємо

$$|\partial^{m_l}_{x_l} u(t,x)| \leq C_m \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N-(l-\frac{1}{q})|m_l|} \times$$

$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)d(\xi,X_l(t-\tau);\beta,\beta+1,\beta+2b+1)\times$$
$$\times(\exp\{[k(\tau),\xi]\}+\exp\{[k(\tau),X_l(t-\tau)]\})d\xi\times$$
$$\times[f]^{\alpha}_{k(\cdot)} \le C\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N-(l-\frac{1}{q})|m_l|}\times$$
$$\times E_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi)\times$$
$$\times d(\xi,X_l(t-\tau);\beta,\beta+1,\beta+2b+1)d\xi\times$$
$$\times\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)} \le$$
$$\le C\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N-(l-\frac{1}{q})|m_l|+\alpha_l/(2b)}\times$$
$$\times E_{\bar{c}_1}(t,x;\tau,\xi)d\xi\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)} =$$
$$= C\int\limits_0^t(t-\tau)^{-(l-\frac{1}{q})|m_l|+\alpha_l/(2b)}d\tau\times$$
$$\times\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)} =$$
$$= Ct^{1-(l-\frac{1}{q})|m_l|+\alpha_l/(2b)}\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}.$$

Оскільки $|m_l| = r_l$, $l\in M$, і $\alpha_1=\beta$, $\alpha_2=\beta+1$, $\alpha_3=\beta+2b+1$, то $-(l-\frac{1}{q})|m_l|+\alpha_l/(2b) = -1+\beta/(2b)$, $l\in M$, і отримуємо таку оцінку:

$$|\partial^{m_l}_{x_l}u(t,x)| \le Ct^{\beta/(2b)}\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)},$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},\ |m_l| = r_l,\ l\in M. \qquad (50)$$

Якщо $d(x,x') \ge t^{1/(2b)}$, то з (50) відразу маємо

$$|\Delta^{x'}_x\partial^{m_l}_{x_l}u(t,x)| \le C(d(x,x'))^{\beta}(\exp\{[s(t),x]\}+$$
$$+\exp\{[s(t),x']\})[f]^{\alpha}_{k(\cdot)},\ \{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{(0,T]}. \qquad (51)$$

Нехай тепер $\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{(0,T]}$ і $d := d(x,x') < t^{1/(2b)}$. Тоді

$$|\Delta^{x'}_x\partial^{m_l}_{x_l}u(t,x)| \le$$
$$\le\left|\int\limits_0^{t-d^{2b}}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Delta^{x'}_x\partial^{m_l}_{x_l}G(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi\right|+$$
$$+\left|\int\limits_{t-d^{2b}}^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^{m_l}_{x_l}G(t,x;\tau,\xi)\Delta^{X_l(t-\tau)}_{\xi}f(\tau,\xi)d\xi\right|+$$
$$+\left|\int\limits_{t-d^{2b}}^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial^{m_l}_{x_l}G(t,x;\tau,\xi)\Delta^{X'_l(t-\tau)}_{\xi}f(\tau,\xi)d\xi\right| =$$
$$=: P_1+P_2+P_3,$$

де $X'_l(t-\tau) = X_l(t-\tau)|_{x=x'}$, $l\in M$.

За допомогою (11), першої рівності з (13) і належності f до $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$ маємо

$$P_1 \le \int\limits_0^{t-d^{2b}}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\Delta^{x'}_x\partial^{m_l}_{x_l}G(t,x;\tau,\xi)|\times$$
$$\times|\Delta^{X_l(t-\tau)}_{\xi}f(\tau,\xi)|d\xi \le$$
$$\le Cd^{\gamma}\int\limits_0^{t-d^{2b}}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N-(l-\frac{1}{q})|m_l|-\gamma/(2b)}\times$$
$$\times E_c(t,x;\tau,\xi)d(\xi,X_l(t-\tau);\beta,\beta+1,\beta+2b+1)\times$$
$$\times(\exp\{[k(\tau),\xi]\}+\exp\{[k(\tau),X_l(t-\tau)]\})d\xi)\times$$
$$\times[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}.$$

Далі використаємо нерівності (7), (8) і (15) та рівність (14). Одержуємо

$$P_1 \le Cd^{\gamma}\int\limits_0^{t-d^{2b}}d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-N-(l-\frac{1}{q})|m_l|-\gamma/(2b)}\times$$
$$\times d(\xi,X_l(t-\tau);\beta,\beta+1,\beta+2b+1)d\xi\times$$
$$\times E_{c-c_0}(t,x;\tau,\xi)\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)} \le$$
$$\le Cd^{\gamma}\int\limits_0^{t-d^{2b}}(t-\tau)^{-(l-\frac{1}{q})|m_l|+(\alpha_l-\gamma)/(2b)}d\tau\times$$
$$\times\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)} = Cd^{\gamma}\times$$
$$\times\int\limits_0^{t-d^{2b}}(t-\tau)^{-1+(\beta-\gamma)/(2b)}d\tau\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}$$

або при $\gamma\in(\beta,1)$

$$P_1 \le Cd^{\gamma}(t-\tau)^{(\beta-\gamma)/(2b)}\Big|_0^{t-d^{2b}}\exp\{[s(t),x]\}\times$$
$$\times[f]^{\alpha}_{k(\cdot)} = Cd^{\gamma}(d^{\beta-\gamma}-t^{(\beta-\gamma)/(2b)})\times$$
$$\times\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)} \le$$
$$\le C(d(x,x'))^{\beta}\exp\{[s(t),x]\}[f]^{\alpha}_{k(\cdot)}. \qquad (52)$$

На підставі (7), (8), (10), (14) і (15) та належності f до $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$ маємо

$$P_2 \le C \int\limits_{t-d^{2b}}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-N-(l-\frac{1}{q})|m_l|} \times$$

$$\times E_c(t,x;\tau,\xi) d(\xi, X_l(t-\tau); \beta, \beta+1, \beta+2b+1) \times$$
$$\times (\exp\{[k(\tau),\xi]\} + \exp\{[k(\tau), X_l(t-\tau)]\}) d\xi \times$$

$$\times [f]^{\alpha}_{k(\cdot)} \le C \int\limits_{t-d^{2b}}^{t} (t-\tau)^{-(l-\frac{1}{q})|m_l| + \alpha_l/(2b)} d\tau \times$$

$$\times \exp\{[s(t),x]\} [f]^{\alpha}_{k(\cdot)} = C \int\limits_{t-d^{2b}}^{t} (t-\tau)^{-1+\beta/(2b)} d\tau \times$$

$$\times \exp\{[s(t),x]\} [f]^{\alpha}_{k(\cdot)} = C(t-\tau)^{\beta/(2b)} \Big|_{t}^{t-d^{2b}} \times$$
$$\times \exp\{[s(t),x]\} [f]^{\alpha}_{k(\cdot)} =$$
$$= C(d(x,x'))^{\beta} \exp\{[s(t),x]\} [f]^{\alpha}_{k(\cdot)}. \qquad (53)$$

Аналогічно

$$P_3 \le C(d(x,x'))^{\beta} \exp\{[s(t),x']\} [f]^{\alpha}_{k(\cdot)}. \qquad (54)$$

З оцінок (51)–(54) випливає, що $u \in C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, де $\alpha' = (\beta,\beta,\beta)$, $r = (r_1, r_2, r_3) = (2b, 1, 1)$ і правильна оцінка (47). З оцінок (27) і (50) безпосередньо випливає (48). $\triangleright$

5. Коректна розв'язність задачі Коші (1), (2). Виберемо невід'ємні числа a_l, $l \in M$, які входять у вирази для функцій k_l і s_l, $l \in M$, так, щоб виконувалася умова

$$T < \min_{l \in M} (c_0/s_l(T))^{(2b-1)/(2b(l-1)+1)}.$$

На підставі зауваження 2 та рівності (48) за умов теореми 2 об'ємний потенціал (3), породжений ФРЗК для рівняння (1), є розв'язком неоднорідного рівняння (1) з однорідною початковою умовою (2).

З результатів, отриманих в [1] (теорема 3.8), випливає, що не існує більше одного розв'язку рівняння (1), який задовольняє такі умови:

1) $\exists C > 0 \;\; \forall t \in (0,T]$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (|u(t,x)| \exp\{-[s(t),x]\}) \le C;$$

2) $\lim\limits_{t \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t,x)\psi(x)dx = 0$

для довільної функції ψ такої, що $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| \exp\{[s(T),x]\}dx < \infty$.

Наслідком цього є такий результат.

Твердження. *У просторі $C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, де $r = (2b,1,1)$, $\alpha' = (\beta,\beta,\beta)$ з деяким $\beta \in (0,1]$, не існує більше одного розв'язку рівняння (1), для якого виконується умова (48).*

З теорем 1 і 2 та цього твердження випливає така теорема про коректну розв'язність задачі Коші (1), (2).

Теорема 3. *Нехай $f \in C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, де $\alpha = (\beta, \beta+1, \beta+2b+1)$ з деяким $\beta \in (0,1]$. Тоді формулою (3) визначається єдиний розв'язок рівняння (1), який належить до простору $C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, де $r = (2b,1,1)$, $\alpha' = (\beta,\beta,\beta)$, і для якого справджуються оцінка (47) та рівності (48).*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – **152**. – 390 p.

2. *Дронь В.С.* Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісник Чернівецького ун-ту – 2000. – **76**. – С. 32-41.