

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Методом стискаючих відображень встановлено достатні умови існування розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу.

Sufficient conditions for boundary value problem solution existence for neutral integral-differential equations are obtained using the contraction mapping principle.

1. Вступ

Диференціальні та інтегро-диференціальні рівняння з аргументом, що відхиляється, описують багато прикладних задач в електродинаміці, теорії автоматичного керування, хіміко-технологічних процесах та ін. Значний інтерес представляють крайові задачі для таких рівнянь, що виникають у задачах оптимального керування системами із запізненням, у задачах балістики, екології тощо.

Існування та єдиність розв'язків крайових задач для рівнянь із запізненням вивчалися у роботах [1-3]. Крайові задачі для диференціальних рівнянь нейтрального типу досліджувалися у працях [4-5] із використанням методу стискаючих відображень та топологічних методів.

У даній роботі встановлено достатні умови існування розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу, які продовжують дослідження роботи [6].

2. Позначення та постановка задачі

Розглянемо крайову задачу

$$\begin{aligned} y''(x) = & f(x, y(x), y(x - \tau_0(x)), y'(x), \\ & y'(x - \tau_1(x)), y''(x - \tau_2(x))) + \\ & + \int_a^b g(x, s, y(s), y(s - \tau_0(s)), y'(s), \end{aligned} \quad (1)$$

$$y'(s - \tau_1(s)), y''(s - \tau_2(s))) ds,$$

$$\begin{aligned} y^{(i)}(x) = & \varphi^{(i)}(x), \quad i = 0, 1, 2, \\ x \in & [a^*; a], \quad y(b) = \beta, \end{aligned} \quad (2)$$

де запізнення $\tau_0(x), \tau_1(x), \tau_2(x)$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a, b]$, $\varphi(x)$ – задана двічі неперервно-диференційовна функція на $[a^*; a]$, $\beta \in R$,

$$a^* = \max \left\{ \min_{x \in [a; b]} (x - \tau_0(x)), \min_{x \in [a; b]} (x - \tau_1(x)), \min_{x \in [a; b]} (x - \tau_2(x)) \right\}.$$

Нехай функції $f(x, u_0, u_1, v_0, v_1, w)$, $g(x, s, u_0, u_1, v_0, v_1, w)$ неперервні за сукупністю змінних в області $G = [a, b] \times G_1^2 \times G_2^2 \times G_3$ та $Q = [a, b] \times G$, де $G_1 = \{u \in R : |u| < P_1\}$, $G_2 = \{v \in R : |v| < P_2\}$, $G_3 = \{w \in R : |w| < P_3\}$, P_1, P_2, P_3 – додатні сталі.

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x), \tau_2(x)$:

$$E_1 = \{x_i \in [a, b] : x_i - \tau_1(x_i) = a, i = 1, 2, \dots\},$$

$$E_2 = \{x_j \in [a, b] : x_0 = a,$$

$$x_{j+1} - \tau_2(x_{j+1}) = x_j, j = 1, 2, \dots\},$$

$$E = E_1 \cup E_2.$$

Нехай функції $\tau_1(x), \tau_2(x)$ такі, що множини E_1, E_2 є скінченними. Точки множини E занумеруємо в порядку їхнього зростання:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < b.$$

Введемо такі позначення:

$$P = \sup \left\{ \left| f(x, u, u_1, v, v_1, w) \right| + \left| \int_a^b g(x, s, u, u_1, v, v_1, w) ds \right| : |u_i| < P_1, |v_i| < P_2, i = 0, 1, |w| < P_3, x, s \in [a, b] \right\},$$

$$J = [a^*, a], I = [a, b], I_1 = [a, x_1], I_2 = [x_1, x_2], \dots, I_k = [x_{k-1}, x_k], I_{k+1} = [x_k, b].$$

Означимо множину функцій

$$B(J \cup I) = \left\{ y(x) : y(x) \in \left(C(J \cup I) \cap (C^1(I)) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k+1} C^2(I_j) \right) \right), |y(x)| \leq P_1, |y'(x)| \leq P_2, |y''(x)| \leq P_3 \right\}.$$

Функцію $y = y(x)$ із простору $B(J \cup I)$ називатимемо розв'язком задачі (1)-(2), якщо вона задовольняє рівняння (1) на $[a; b]$ (за можливим винятком точок множини E) і крайові умови (2).

3. Існування розв'язку

Введемо у просторі $B(J \cup I)$ норму

$$\|y\|_B = \max \left\{ \frac{8}{(b-a)^2} \max_{x \in J \cup I} |y(x)|, \frac{2}{b-a} \max \left(\max_{x \in J} |y'(x)|, \max_{x \in I} |y'(x)| \right), \max \left(\max_{x \in J} |y''(x)|, \max_{x \in I_1} |y''(x)|, \dots, \max_{x \in I_{k+1}} |y''(x)| \right) \right\}.$$

Простір $B(J \cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (1)-(2) еквівалентна такому інтегральному рівнянню [1, 5]:

$$y(x) = \int_{a^*}^b \left[f(s, y(s), y(s - \tau_0(s)), y'(s), y'(s - \tau_1(s)), y''(s - \tau_2(s))) + \int_a^b g(s, \xi, y(\xi), y(\xi - \tau_0(\xi)), y'(\xi), y'(\xi - \tau_1(\xi)), y''(\xi - \tau_2(\xi))) d\xi \right] \bar{G}(x, s) ds + l(x), \quad x \in J \cup I.$$

$$y'(s - \tau_1(s)), y''(s - \tau_2(s))) + \int_a^b g(s, \xi, y(\xi), y(\xi - \tau_0(\xi)), y'(\xi), y'(\xi - \tau_1(\xi)), y''(\xi - \tau_2(\xi))) d\xi \bar{G}(x, s) ds + l(x), \quad x \in J \cup I,$$

$$\text{де } \bar{G}(x, s) = \begin{cases} G(x, s), & x, s \in I, \\ 0, & x, s \notin I, \end{cases}$$

$$l(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in J, \\ \frac{\beta - \varphi(a)}{b-a} (x - a) + \varphi(a), & x \in I, \end{cases}$$

а $G(x, s)$ – функція Гріна для такої крайової задачі:

$$y''(x) = 0, x \in I, y(a) = y(b) = 0.$$

Зазначимо, що, не зменшуючи загальності, можна вважати крайові умови (2) нульовими. У протилежному випадку, лінійна заміна

$$z(x) = y(x) - \psi(x),$$

$$\text{де } \psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in [a^*, a], \\ \frac{\varphi(a)(b-x) + \beta(x-a)}{b-a}, & x \in [a, b], \end{cases}$$

приводить до крайової задачі типу (1)-(2) з нульовими крайовими умовами

$$y^{(i)} = 0, x \in [a^*, a], i = 0, 1, 2, y(b) = 0. \quad (6)$$

Визначимо оператор T , що діє в просторі $B(J \cup I)$, формулою

$$(Ty)(x) = \int_{a^*}^b \left[f(s, y(s), y(s - \tau_0(s)), y'(s), y'(s - \tau_1(s)), y''(s - \tau_2(s))) + \int_a^b g(s, \xi, y(\xi), y(\xi - \tau_0(\xi)), y'(\xi), y'(\xi - \tau_1(\xi)), y''(\xi - \tau_2(\xi))) d\xi \right] \bar{G}(x, s) ds + l(x), \quad x \in J \cup I.$$

$$+ \int_a^b g(s, \xi, y(\xi), y(\xi - \tau_0(\xi)), y'(\xi), y'(\xi - \tau_1(\xi)), y''(\xi - \tau_2(\xi))) d\xi \bar{G}(x, s) ds +$$

$$+ l(x), \quad x \in J \cup I.$$

Тоді

$$\begin{aligned} (Ty)'(x) = & \int_{a^*}^b \left[f(s, y(s), y(s - \tau_0(s)), y'(s), \right. \\ & y'(s - \tau_1(s)), y''(s - \tau_2(s))) + \\ & + \int_a^b g(s, \xi, y(\xi), y(\xi - \tau_0(\xi)), y'(\xi), \\ & y'(\xi - \tau_1(\xi)), y''(\xi - \tau_2(\xi))) d\xi \Big] \bar{G}'_x(x, s) ds + \\ & + l'(x), \quad x \in J \cup I, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (Ty)''(x) = & f(s, y(s), y(s - \tau_0(s)), y'(s), \\ & y'(s - \tau_1(s)), y''(s - \tau_2(s))) + \\ & + \int_a^b g(s, \xi, y(\xi), y(\xi - \tau_0(\xi)), y'(\xi), \\ & y'(\xi - \tau_1(\xi)), y''(\xi - \tau_2(\xi))) d\xi + \\ & + l''(x), \quad x \in J \cup I. \end{aligned} \quad (9)$$

Теорема 1. Нехай справджуються такі припущення:

- 1) $\max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi(x)|, \frac{(b-a)^2}{8} P + \max(|\varphi(a)|, |\gamma|) \right\} \leq P_1,$
- 2) $\max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi'(x)|, \frac{b-a}{2} P + \left| \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a} \right| \right\} \leq P_2,$
- 3) $\max \left\{ \max_{x \in J} |\varphi''(x)|, P \right\} \leq P_3,$
- 4) функції $f(x, u_0, u_1, v_0, v_1, w), g(x, s, u_0, u_1, v_0, v_1, w)$ задовольняють умову Ліпшиця по змінних $u_i, v_i, i = \overline{0, 1}, w$ зі сталими $L_j, M_j, j = \overline{1, 5}$ в G та Q ,
- 5) $\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{j=1}^2 (L_j + (b-a) M_j) + \frac{b-a}{2} \sum_{j=3}^4 (L_j + (b-a) M_j) + L_5 + (b-a) M_5 < 1.$

Тоді існує єдиний розв'язок крайової задачі (1)-(2) в $B(J \cup I)$.

Доведення. Для функції Гріна має місце співвідношення [5]

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & a \leq s \leq x \leq b, \\ \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & a \leq x \leq s \leq b, \end{cases}$$

і правильні такі оцінки

$$\begin{aligned} \int_a^b |G(x, s)| ds & \leq \frac{(b-a)^2}{8}, \\ \int_a^b |G'_x(x, s)| ds & \leq \frac{b-a}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Якщо умови 1)-3) та нерівності (10) справджуються, тоді оператор T відображає простір $B(J \cup I)$ у себе.

Нехай $y_1, y_2 \in B(J \cup I)$. Враховуючи умову 4) та оцінки (10), одержуємо:

$$\begin{aligned} & |(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)| \leq \\ & \leq \int_{a^*}^b \left[(L_1 + L_2) \max_{x \in J \cup I} |y_1(x) - y_2(x)| + \right. \\ & + (L_3 + L_4) \max \left\{ \max_{x \in I} |y'_1(x) - y'_2(x)|, \right. \\ & \left. \max_{x \in J} |y'_1(x) - y'_2(x)| \right\} + \\ & + L_5 \max \left\{ \max_{x \in J} |y''_1(x) - y''_2(x)|, \right. \\ & \left. \max_{x \in I_1} |y''_1(x) - y''_2(x)|, \dots, \right. \\ & \left. \max_{x \in I_{k+1}} |y''_1(x) - y''_2(x)| \right\} + \\ & + (b-a)(M_1 + M_2) \max_{x \in J \cup I} |y_1(x) - y_2(x)| + \\ & + (b-a)(M_3 + M_4) \max \left\{ \max_{x \in I} |y'_1(x) - y'_2(x)|, \right. \\ & \left. \max_{x \in J} |y'_1(x) - y'_2(x)| \right\} + \\ & + M_5(b-a) \max \left\{ \max_{x \in J} |y''_1(x) - y''_2(x)|, \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \max_{x \in I_1} \left| y_1''(x) - y_2''(x) \right|, \dots, \\
& \max_{x \in I_{k+1}} \left| y_1''(x) - y_2''(x) \right| \Bigg] \\
& \quad \times \bar{G}(x, s) ds \leq \\
& \leq \frac{(b-a)^2}{8} \left[\frac{(b-a)^2}{8} (L_1 + L_2 + \right. \\
& \quad \left. + (b-a)(M_1 + M_2)) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{b-a}{2} (L_3 + L_4 + (b-a)(M_3 + M_4)) + \right. \\
& \quad \left. + L_5 + (b-a)M_5 \right] \|y_1 - y_2\|_B, \\
& \quad \left| (Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x) \right| \leq \\
& \leq \frac{b-a}{2} \left[\frac{(b-a)^2}{8} (L_1 + L_2 + \right. \\
& \quad \left. + (b-a)(M_1 + M_2)) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{b-a}{2} (L_3 + L_4 + (b-a)(M_3 + M_4)) + \right. \\
& \quad \left. + L_5 + (b-a)M_5 \right] \|y_1 - y_2\|_B, \\
& \quad \left| (Ty_1)''(x) - (Ty_2)''(x) \right| \leq \\
& \leq \left[\frac{(b-a)^2}{8} (L_1 + L_2 + (b-a)(M_1 + M_2)) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{b-a}{2} (L_3 + L_4 + (b-a)(M_3 + M_4)) + \right. \\
& \quad \left. + L_5 + (b-a)M_5 \right] \|y_1 - y_2\|_B.
\end{aligned}$$

Виходячи із одержаних оцінок та означення норми в просторі $B(J \cup I)$, маємо

$$\begin{aligned}
& \|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\|_B \leq \quad (11) \\
& \leq \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{j=1}^2 (L_j + (b-a)M_j) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{b-a}{2} \sum_{j=3}^4 (L_j + (b-a)M_j) + \right. \\
& \quad \left. + L_5 + (b-a)M_5 \right] \|y_1 - y_2\|_B.
\end{aligned}$$

Із нерівності (11), при виконанні умови 5), дістаємо, що оператор T є стискаючим у просторі $B(J \cup I)$ і має єдину нерухому точку в цьому просторі. Отже, крайова задача (1)-(2) має єдиний розв'язок у $B(J \cup I)$. Теорему доведено.

Зауваження. Ітераційна схема знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (1)-(2) за допомогою кубічних сплайнів дефекту 2 досліджена в роботі [7].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Grim L.J., Schmitt K. Boundary Value Problems for Delay Differential Equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – **74**, N5. – P. 997-1000.
2. Луцка А.Ю. О краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Дифференциально-функциональные и разностные уравнения. – К.: Ін-т математики АН УРСР, 1981. – С. 35-56.
3. Athanassiadou E.S. On the Existence and Uniqueness of Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Functional Differential Equations // Mathematica Moravica. – 2013. – **17**, N1. – P. 51-57.
4. Biga A., Gaber R. Existence, Uniqueness and Approximation for the Solution of a Second Order Neutral Differential Equation With Delay in Banach Spaces // Mathematica. – 2007. – **49**, N2. – P. 117-130.
5. Каменский Т.А., Мышкис А.Д. Краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1972. – **8**, N12. – С. 2171-2179.
6. Cherevko I., Dorosh A. Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations // J. Numer. Anal. Approx. Theory. – 2016. – **44**, N2. – P. 154-165.
7. Настасьєва Н.П., Черевко І.М. Наближений метод розв'язування крайової задачі для інтегродиференціальних рівнянь нейтрального типу // Математичні студії. – 1998. – **10**, № 2. – С. 147-152.