

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ З ВИРОДЖЕННЯМ

Встановлено умови існування та єдиності гладкого розв'язку оберненої задачі для рівняння теплопровідності з невідомим залежним від часу старшим коефіцієнтом. Припускається, що межа області є невідомою і разом з рівнянням вироджується в початковий момент часу.

We establish conditions for existence and uniqueness of a smooth solution to an inverse problem for the heat equation with an unknown time-dependent leading coefficient. The boundary of the domain is supposed unknown and degenerate at the initial moment.

Вступ. Задача, яка досліджується у даній роботі, поєднує три типи задач, а саме, коефіцієнтну обернену задачу, задачу для рівнянь з виродженням та задачу з вільною межею. Обернені задачі для параболічних рівнянь в областях з вільними межами досліджувались в [1]-[5]. Задачі ідентифікації невідомих коефіцієнтів параболічних рівнянь з виродженням були розглянуті в працях [6]-[8]. Аналогічні задачі, але вже в областях з невідомими межами, вивчались у [9]. Крайову та обернену задачу для параболічного рівняння в області з невідомою межею, яка вироджується в початковий момент часу, досліджено [10] та [11]. Ця робота присвячена випадку з подвійним виродженням у початковий момент часу як рівняння, так і невідомої межі. Отримано умови існування та єдиності розв'язку для одновимірного рівняння теплопровідності.

1. Формулювання задачі та основні припущення. В області $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < t^\gamma \tilde{h}(t), 0 < t < T\}$ з невідомою частиною межі $x = t^\gamma \tilde{h}(t)$ розглянемо задачу визначення невідомих $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x, t)), \tilde{h}(t) > 0, \tilde{a}(t) > 0, t \in [0, T]$ з умов

$$u_t = \tilde{a}(t)t^\beta u_{xx} + \tilde{f}(x, t), \quad 0 < x < t^\gamma \tilde{h}(t), \\ 0 < t < T, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(t^\gamma \tilde{h}(t), t) = \mu_2(t), \\ t \in [0, T], \quad (2)$$

$$\tilde{a}(t)u_x(0, t) = \mu_3(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$\int_0^{t^\gamma \tilde{h}(t)} u(x, t) dx = \mu_4(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

де $\beta > 0, \gamma > 0$ - задані числа, а $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x, t))$ - невідомі.

Заміною незалежних змінних $y = \frac{x}{\tilde{h}(t)}$, $\sigma = t^\gamma$ задачу (1)-(4) зведемо до еквівалентної задачі в області $Q_{T_1} := \{(y, \sigma) : 0 < y < \sigma, 0 < \sigma < T_1\}$ з відомою межею:

$$v_\sigma = a(\sigma) \frac{\sigma^{\beta_1}}{\gamma h^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{yh'(\sigma)}{h(\sigma)} v_y + \\ + \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(yh(\sigma), \sigma), \quad (y, \sigma) \in Q_{T_1}, \quad (5)$$

$$v(0, \sigma) = \nu_1(\sigma), \quad v(\sigma, \sigma) = \nu_2(\sigma), \\ \sigma \in [0, T_1], \quad (6)$$

$$a(\sigma)v_y(0, \sigma) = h(\sigma)\nu_3(\sigma), \quad \sigma \in [0, T_1], \quad (7)$$

$$h(\sigma) \int_0^\sigma v(y, \sigma) dy = \nu_4(\sigma), \quad \sigma \in [0, T_1]. \quad (8)$$

Тут використані такі позначення:

$$T_1 = T^\gamma, \quad \beta_1 = \frac{\beta + 1 - \gamma}{\gamma}, \quad a(\sigma) = \tilde{a}(\sigma^{\frac{1}{\gamma}}),$$

$$h(\sigma) = \tilde{h}(\sigma^{\frac{1}{\gamma}}), \quad v(y, \sigma) = u(yh(\sigma), \sigma^{\frac{1}{\gamma}}),$$

$$f(yh(\sigma), \sigma) = \tilde{f}(y\tilde{h}(\sigma^{\frac{1}{\gamma}}), \sigma^{\frac{1}{\gamma}}),$$

$$\nu_i(\sigma) = \mu_i(\sigma^{\frac{1}{\gamma}}), \quad i = \overline{1, 4}.$$

Надалі будемо вважати виродження рівняння (5) слабким ($0 < \beta_1 < 1$). Це припущення буде виконуватись для будь-яких β, γ ,

таких, що $\gamma > 1, \gamma - 1 < \beta < 2\gamma - 1$. Припустимо також, що виконуються такі припущення:

(A1) $\mu_i \in C^1[0, T], i = 1, 2, 4, \mu_3 \in C[0, T], \mu'_i(t) = \lambda_i(t)t^{\gamma-1}, \lambda_i \in C[0, T], i = 1, 2; \tilde{f} \in C([0, \infty) \times [0, T])$ задовольняє локально умову Гельдера за змінною x з показником $\alpha \in (0, 1)$;

(A2) $\mu_i(t) > 0, i = 1, 2, 3, \mu_4(t) = \mu_0(t)t^\gamma, \mu_0(t) > 0, t \in [0, T], \tilde{f}(x, t) \geq 0, (x, t) \in [0, \infty) \times [0, T], \lambda_2(t) > \lambda_1(t), t \in [0, T]$;

(A3) $\mu_1(0) = \mu_2(0)$.

2. Зведення задачі (1)-(4) до системи інтегральних рівнянь. Встановимо існування розв'язку задачі (5)-(8), оскільки вона еквівалентна задачі (1)-(4).

Заміною

$$v(y, \sigma) = \tilde{v}(y, \sigma) + \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma))$$

перейдемо від (5)-(6) до задачі з нульовими крайовими умовами:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\sigma(y, \sigma) &= \frac{\sigma^{\beta_1} a(\sigma)}{\gamma h^2(\sigma)} \tilde{v}_{yy} + \frac{yh'(\sigma)}{h(\sigma)} \tilde{v}_y + \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} \times \\ &\times f(yh(\sigma), \sigma) - \nu'_1(\sigma) - \frac{y}{\sigma}(\nu'_2(\sigma) - \nu'_1(\sigma)) + \\ &+ \frac{y}{\sigma^2}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \frac{yh'(\sigma)}{h(\sigma)\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)), \\ (y, \sigma) &\in Q_{T_1}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\tilde{v}(0, \sigma) = \tilde{v}(\sigma, \sigma) = 0, \quad \sigma \in [0, T_1]. \quad (10)$$

Використовуючи функцію Гріна $G(y, \sigma, \eta, \tau)$ задачі

$$\begin{aligned} v_\sigma(y, \sigma) &= \frac{\sigma^{\beta_1} a(\sigma)}{\gamma h^2(\sigma)} v_{yy}, \quad (y, \sigma) \in Q_{T_1}, \\ v(0, \sigma) &= v(\sigma, \sigma) = 0, \quad \sigma \in [0, T_1], \end{aligned}$$

зведемо задачу (9), (10) до інтегродиференціального рівняння

$$\begin{aligned} \tilde{v}(y, \sigma) &= \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G(y, \sigma, \eta, \tau) \left(\frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)} \times \right. \\ &\times \tilde{v}_\eta(\eta, \tau) + \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(\eta h(\tau), \tau) - \nu'_1(\tau) - \\ &\left. - \frac{\eta}{\tau}(\nu'_2(\tau) - \nu'_1(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)\tau}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) \right) d\eta, \quad (y, \sigma) \in \overline{Q}_{T_1}.$$

Повертаючись до функції $v(y, \sigma)$, звідси отримуємо

$$\begin{aligned} v(y, \sigma) &= \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \\ &+ \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G(y, \sigma, \eta, \tau) \left(\frac{\eta h'(\tau)}{h(\tau)} v_\eta(\eta, \tau) + \right. \\ &+ \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(\eta h(\tau), \tau) - \nu'_1(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu'_2(\tau) - \\ &\left. - \nu'_1(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) \right) d\eta, \\ (y, \sigma) &\in \overline{Q}_{T_1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Оцінимо знизу розв'язок задачі (9), (10), подаючи його у вигляді

$$v(y, \sigma) = v_0(y, \sigma) + \hat{v}(y, \sigma),$$

де $v_0(y, \sigma)$ є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} v_\sigma &= a(\sigma) \frac{\sigma^{\beta_1}}{\gamma h^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{yh'(\sigma)}{h(\sigma)} v_y, \\ (y, \sigma) &\in Q_{T_1}, \\ v(0, \sigma) &= \nu_1(\sigma), v(\sigma, \sigma) = \nu_2(\sigma), \\ \sigma &\in [0, T_1], \end{aligned} \quad (12)$$

а $\hat{v}(y, \sigma)$ задовольняє умови

$$\begin{aligned} v_\sigma &= a(\sigma) \frac{\sigma^{\beta_1}}{\gamma h^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{yh'(\sigma)}{h(\sigma)} v_y + \\ &+ \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(yh(\sigma), \sigma), \quad (y, \sigma) \in Q_{T_1}, \\ v(0, \sigma) &= v(\sigma, \sigma) = 0, \quad \sigma \in [0, T_1]. \end{aligned} \quad (13)$$

З припущень **(A2)** та принципу максимуму знаходимо

$$\begin{aligned} v_0(y, \sigma) &\geq \min\{\min_{[0, T]} \mu_1(t), \min_{[0, T]} \mu_2(t)\} := \\ &= M_1 > 0, \\ \hat{v}(y, \sigma) &\geq 0, \quad (y, \sigma) \in \overline{Q}_{T_1}, \end{aligned}$$

або

$$v(y, \sigma) \geq M_1 > 0, \quad (y, \sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \quad (14)$$

Введемо позначення $w(y, \sigma) := v_y(y, \sigma)$, $p(\sigma) := \sigma h'(\sigma)$ і зведемо рівняння (11) до системи інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned} v(y, \sigma) &= \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma}(\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \\ &+ \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G(y, \sigma, \eta, \tau) \left(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)} w(\eta, \tau) + \right. \\ &+ \left. \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(\eta h(\tau), \tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) \right) d\eta, \\ (y, \sigma) &\in \bar{Q}_{T_1}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} w(y, \sigma) &= \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} + \\ &+ \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G_y(y, \sigma, \eta, \tau) \left(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)} w(\eta, \tau) + \right. \\ &+ \left. \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(\eta h(\tau), \tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau}(\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) - \right. \\ &+ \left. \frac{\eta}{\tau^2}(\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) \right) d\eta, \\ (y, \sigma) &\in \bar{Q}_{T_1}, \end{aligned} \quad (16)$$

Умови (7) та (8) подамо у вигляді

$$h(\sigma) = \frac{\nu_4(\sigma)}{\int_0^\sigma v(y, \sigma) dy}, \quad \sigma \in (0, T_1], \quad (17)$$

$$a(\sigma)w(0, \sigma) = h(\sigma)\nu_3(\sigma), \quad \sigma \in [0, T_1]. \quad (18)$$

Диференціюємо умову (8) :

$$\begin{aligned} h'(\sigma) \int_0^\sigma v(y, \sigma) dy + h(\sigma)v(\sigma, \sigma) + \\ + h(\sigma) \int_0^\sigma v_\sigma(y, \sigma) dy = \nu_4'(\sigma). \end{aligned}$$

Скориставшись рівнянням (5) , отримаємо

$$\begin{aligned} h'(\sigma) \int_0^\sigma v(y, \sigma) dy + h(\sigma)\nu_2(\sigma) + \\ + h(\sigma) \int_0^\sigma \left(a(\sigma) \frac{\sigma^{\beta_1}}{\gamma h^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{yh'(\sigma)}{h(\sigma)} v_y + \right. \\ \left. + \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} f(yh(\sigma), \sigma) \right) dy = \nu_4'(\sigma). \end{aligned}$$

Обчислюючи інтеграли, приходимо до рівняння

$$\begin{aligned} p(\sigma) &= \frac{1}{\nu_2(\sigma)} (\nu_4'(\sigma) - h(\sigma)\nu_2(\sigma) - \\ &- \frac{a(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h(\sigma)} (w(\sigma, \sigma) - w(0, \sigma)) - h(\sigma) \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} \times \\ &\times \int_0^\sigma f(yh(\sigma), \sigma) dy), \quad \sigma \in (0, T_1]. \end{aligned} \quad (19)$$

Отже, задачу (5)-(8) зведено до системи рівнянь (15)-(19) стосовно невідомих $h(\sigma), p(\sigma), a(\sigma), v(y, \sigma), w(y, \sigma)$.

3. Існування розв'язку задачі (1)-(4).

Теорема 1. Припустимо, що виконуються умови **(A1)**-**(A3)**. Тоді можна вказати таке число $T_0 \in (0, T]$, яке визначається відомими величинами, що задача (1)-(4) матиме розв'язок $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x, t))$ з класу $C[0, T_0] \cap C^1(0, T_0) \times C[0, T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_{T_0})$ такий, що $\tilde{h}(t) > 0, \tilde{a}(t) > 0, t \in [0, T_0]$.

Доведення. З міркувань, наведених в [5], випливає, що для доведення теореми достатньо встановити існування неперервного розв'язку системи рівнянь (15)-(18). Для цього скористаємося теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора.

Спочатку знайдемо апіорні оцінки розв'язків системи рівнянь (15)-(19). Беручи до уваги **(A2)** та (14), з (17) маємо

$$h(\sigma) \leq H_1 < \infty, \quad \sigma \in [0, T_1]. \quad (20)$$

Оскільки рівняння (15), (16) еквівалентні рівнянню (11), а рівняння (11) еквівалентне задачі (5), (6), то, застосовуючи до останньої принцип максимуму, отримаємо

$$v(y, \sigma) \leq M_2 < \infty, \quad (y, \sigma) \in \bar{Q}_{T_1}. \quad (21)$$

Тоді з (17) та (21) випливає оцінка

$$h(\sigma) \geq \frac{\sigma \nu_0(\sigma)}{\sigma M_2} \geq H_0 > 0, \quad \sigma \in [0, T_1]. \quad (22)$$

Знайдемо оцінку $w(y, \sigma)$ знизу. Виходячи з означення функцій $\nu_i(\sigma)$ та припущень

(A2), знаходимо

$$\begin{aligned} \nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma) &= \frac{1}{\gamma}(\lambda_2(t) - \lambda_1(t)) > 0, \\ \sigma &\in (0, T_1], \\ \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} &= \nu_2'(0) - \nu_1'(0) > 0. \end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} \geq M_3 > 0, \quad \sigma \in [0, T_1]. \quad (23)$$

Припускаючи, що функції $a(\sigma), w(y, \sigma), p(\sigma)$ є неперервними на проміжку $[0, T_1]$, дослідимо поведінку інтеграла у рівнянні (16). Використовуючи оцінки функції Гріна [11], будемо мати:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G_y(y, \sigma, \eta, \tau) \left(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)} w(\eta, \tau) + \right. \right. \\ &+ \frac{\tau^{1-\gamma}}{\gamma} f(\eta h(\tau), \tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau} (\nu_2'(\tau) - \\ &- \nu_1'(\tau)) + \frac{\eta}{\tau^2} (\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) \Big) d\eta \Big| \leq \\ &\leq C_1 \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau |G_y(y, \sigma, \eta, \tau)| d\eta \leq \\ &\leq C_2 \int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma) - \theta(\tau)}}, \end{aligned}$$

де $\theta(\sigma) = \int_0^\sigma a(s) s^{\beta_1} ds$. Тоді

$$\int_0^\sigma \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma) - \theta(\tau)}} \leq C_3 \sigma^{\frac{1-\beta_1}{2}}.$$

Це означає, що існує число $T_0 \in (0, T_1]$ таке, що

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G_y(y, \sigma, \eta, \tau) \left(\frac{\eta p(\tau)}{\tau h(\tau)} w(\eta, \tau) + \frac{\tau^{1-\gamma}}{\gamma} \times \right. \right. \\ &\times f(\eta h(\tau), \tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau} (\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) + \\ &+ \frac{\eta}{\tau^2} (\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) \Big) d\eta \Big| \leq \frac{M_3}{2}, \quad (y, \sigma) \in \bar{Q}_{T_0}. \end{aligned} \quad (24)$$

Звідси випливають оцінки

$$\begin{aligned} w(y, \sigma) &\geq \frac{M_3}{2}, \\ w(y, \sigma) &\leq \frac{M_3}{2} + \max_{[0, T_1]} \frac{\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)}{\sigma} := M_4, \\ (y, \sigma) &\in \bar{Q}_{T_0}. \end{aligned} \quad (25)$$

Використовуючи (25) у (18), (19), отримуємо

$$\begin{aligned} 0 < A_0 \leq a(\sigma) \leq A_1, \\ |p(\sigma)| &\leq M_5, \quad \sigma \in [0, T_0]. \end{aligned} \quad (26)$$

Отже, оцінки розв'язків системи рівнянь (15)-(19) отримані. Подамо систему рівнянь (15)-(19) у вигляді

$$\omega = P\omega, \quad (27)$$

де $\omega = (v, w, h, a, p)$, а оператор P визначається правою частиною рівнянь (15)-(19). Визначимо множину $\mathcal{N} := \{(v, w, h, a, p) \in (C(\bar{Q}_{T_0}))^2 \times (C[0, T_0])^3 : M_1 \leq v(y, \sigma) \leq M_2, M_3/2 \leq w(y, \sigma) \leq M_4, H_0 \leq h(\sigma) \leq H_1, A_0 \leq a(\sigma) \leq A_1, |p(\sigma)| \leq M_5\}$ З оцінок (14), (20)-(22), (25), (26) випливає, що оператор P переводить множину \mathcal{N} в себе. Компактність оператора P була встановлена в [12]. Використовуючи теорему Шаудера, отримуємо існування розв'язку задачі (1)-(4).

4. Єдиність розв'язку задачі.

Теорема 2. Нехай виконується умова:

(A4) $\tilde{f} \in C^{1,0}([0, \infty) \times [0, T])$, $\mu_i \in C^1[0, T]$, $i = 1, 2$, $\mu_i(t) \neq 0$, $i = 2, 3$, $\mu_4(t) = \mu_0(t)t^\gamma$, $\mu_0(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$.

Тоді задача (1)-(4) не може мати більше одного розв'язку $(\tilde{h}(t), \tilde{a}(t), u(x, t))$ з класу $C^1(0, T] \cap C[0, T] \times C[0, T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$.

Доведення. Оскільки задачі (1)-(4) та (5)-(8) є еквівалентними, то досить довести єдиність розв'язку задачі (5)-(8). Припустимо, що існують два різні розв'язки $(h_i(\sigma), a_i(\sigma), v_i(y, \sigma))$, $i = 1, 2$, задачі (5)-(8). Позначимо $h(\sigma) := h_1(\sigma) - h_2(\sigma)$, $a(\sigma) := a_1(\sigma) - a_2(\sigma)$, $v(y, \sigma) := v_1(y, \sigma) - v_2(y, \sigma)$. Для $(h(t), a(t), u(x, t))$ отримуємо з (5)-(8) таку задачу:

$$v_\sigma = \frac{a_1(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_1^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{y h_1'(\sigma)}{h_1(\sigma)} v_y +$$

$$+ \frac{\sigma^{\beta_1}(a(\sigma)h_2^2(\sigma) - a_2(\sigma)h(\sigma)(h_1(\sigma) + h_2(\sigma)))}{\gamma h_1^2(\sigma)h_2^2(\sigma)} \times v_{2yy} + \frac{h'(\sigma)h_2(\sigma) - h_2'(\sigma)h(\sigma)}{h_1(\sigma)h_2(\sigma)} yv_{2y} + \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} y h(\sigma) f_1(y, \sigma), (y, \sigma) \in Q_{T_1}, \quad (28)$$

$$v(0, \sigma) = v(\sigma, \sigma) = 0, \quad \sigma \in [0, T_1], \quad (29)$$

$$a_1(\sigma)v_y(0, \sigma) = \nu_3(\sigma)h(\sigma) - a(\sigma)v_{2y}(0, \sigma), \quad \sigma \in [0, T_1], \quad (30)$$

$$h_1(\sigma) \int_0^\sigma v(y, \sigma) dy = -h(\sigma) \int_0^\sigma v_2(y, \sigma) dy, \quad \sigma \in [0, T_1], \quad (31)$$

де

$$f_1(y, \sigma) := \int_0^1 \frac{\partial f(z, \sigma)}{\partial z} \Big|_{z=yh_2(\sigma)+syh(\sigma)} ds.$$

Використовуючи функцію Гріна $G^*(y, \sigma, \eta, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$v_\sigma = \frac{a_1(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_1^2(\sigma)} v_{yy} + \frac{yh_1'(\sigma)}{h_1(\sigma)} v_y, \quad (y, \sigma) \in Q_{T_1},$$

зведемо задачу (28)-(31) до системи рівнянь

$$v(y, \sigma) = \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau G^*(y, \sigma, \eta, \tau) (v_{2\eta\eta}(\eta, \tau) \times (\tau^{\beta_1}(a(\tau)h_2^2(\tau) - a_2(\tau)h(\tau)(h_1(\tau) + h_2(\tau))) (\gamma h_1^2(\tau)h_2^2(\tau))^{-1} + \frac{\eta(p(\tau)h_2(\tau) - \tau h_2'(\tau)h(\tau))}{\tau h_1(\tau)h_2(\tau)} v_{2\eta}(\eta, \tau) + \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} \eta h(\tau) f_1(\eta, \tau)) d\eta, (y, \sigma) \in \bar{Q}_{T_1}, \quad (32)$$

$$h(\sigma) = -\frac{h_1(\sigma) \int_0^\sigma v(y, \sigma) dy}{\int_0^\sigma v_2(y, \sigma) dy}, \quad \sigma \in [0, T_1], \quad (33)$$

$$a(\sigma) = \frac{\nu_3(\sigma)h(\sigma) - a_1(\sigma)v_y(0, \sigma)}{v_{2y}(0, \sigma)}, \quad \sigma \in [0, T_1], \quad (34)$$

$$p(\sigma) = \frac{1}{\nu_2(\sigma)} \left(-h(\sigma)\nu_2(\sigma) - \frac{a_1(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_1(\sigma)} \times (v_y(\sigma, \sigma) - v_y(0, \sigma)) + \frac{\sigma^{\beta_1}(a_2(\sigma)h(\sigma) - a(\sigma)h_2(\sigma))}{\gamma h_1(\sigma)h_2(\sigma)} (v_{2y}(\sigma, \sigma) - v_{2y}(0, \sigma)) - \frac{h(\sigma)h_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)} \sigma \nu_2(\sigma) - \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} h(\sigma)(h_1(\sigma)f_1(y, \sigma)) dy + \int_0^\sigma f(yh(\sigma), \sigma) dy \right), \sigma \in [0, T_1], \quad (35)$$

де $p(\sigma) := \sigma h'(\sigma)$. Підставивши вирази для $v(y, \sigma)$ і $h(\sigma)$ з (32) і (33) у формули (34) і (35), легко переконатись, що (32)-(35) є системою однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду. Окрім того, оскільки $v_2(y, \sigma)$ задовольняє умову (7), то з припущень теореми маємо $v_{2y}(0, \sigma) \neq 0, \sigma \in [0, T_1]$. Так само з припущень теореми випливає, що знаменник у (35) відмінний від нуля при $\sigma \in [0, T_1]$. Використовуючи умови теореми і те, що $v_2(y, \sigma)$ задовольняє умову (8), надамо правій частині рівняння (33) такого вигляду:

$$\frac{h_1(\sigma) \int_0^\sigma v(y, \sigma) dy}{\int_0^\sigma v_2(y, \sigma) dy} = \frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma) \int_0^\sigma v(y, \sigma) dy}{\nu_4(\sigma)} = \frac{h_1(\sigma)h_2(\sigma) \int_0^\sigma v(y, \sigma) dy}{\sigma \nu_0(\sigma)}.$$

З того, що функція $\frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma v(y, \sigma) dy$ є неперервною на проміжку $[0, T_1]$, випливає, що права частина рівняння (33) неперервна на $[0, T_1]$. Отже, ядра інтегральних рівнянь (32)-(35) інтегровні.

Дослідимо поведінку густин інтегральних рівнянь (32)-(35). Для оцінки $v_{2yy}(y, \sigma)$, що знаходиться під знаком інтеграла з (32), зробимо заміну

$$v_2(y, \sigma) = \tilde{v}_2(y, \sigma) + \nu_1(\sigma) + \frac{y}{\sigma} (\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)).$$

Функція $\tilde{v}_2(y, \sigma)$ є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{2\sigma} &= \frac{a_2(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_2^2(\sigma)} \tilde{v}_{2yy} + \frac{y h_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)} \tilde{v}_{2y} + \frac{\sigma^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} \times \\ &\times f(y h_2(\sigma), \sigma) - \nu_1'(\sigma) - \frac{y}{\sigma} (\nu_2'(\sigma) - \nu_1'(\sigma)) + \\ &+ \frac{y}{\sigma^2} (\nu_2(\sigma) - \nu_1(\sigma)) + \frac{y h_2'(\sigma)}{\sigma h_2(\sigma)} (\nu_2(\sigma) - \\ &- \nu_1(\sigma)), \quad (y, \sigma) \in Q_{T_1}, \\ \tilde{v}_2(0, \sigma) &= \tilde{v}_2(\sigma, \sigma) = 0, \quad \sigma \in [0, T_1]. \end{aligned}$$

За допомогою функції Гріна $\tilde{G}(y, \sigma, \eta, \tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\tilde{v}_{2\sigma} = \frac{a_2(\sigma)\sigma^{\beta_1}}{\gamma h_2^2(\sigma)} \tilde{v}_{2yy} + \frac{y h_2'(\sigma)}{h_2(\sigma)} \tilde{v}_{2y}$$

його можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{v}_2(y, \sigma) &= \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau \tilde{G}(y, \sigma, \eta, \tau) \left(\frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} \times \right. \\ &\times f(\eta h_2(\tau), \tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau} (\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) + \\ &+ \frac{\eta}{\tau^2} (\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) + \frac{\eta h_2'(\tau)}{\tau h_2(\tau)} (\nu_2(\tau) - \\ &\left. - \nu_1(\tau)) \right) d\eta, \quad (y, \sigma) \in \overline{Q}_{T_1}. \end{aligned} \quad (36)$$

Повертаючись до $v_2(y, \sigma)$, знаходимо

$$\begin{aligned} v_{2yy}(y, \sigma) &= \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau \tilde{G}_{yy}(y, \sigma, \eta, \tau) \left(\frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma} \times \right. \\ &\times f(\eta h_2(\tau), \tau) - \nu_1'(\tau) - \frac{\eta}{\tau} (\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)) + \\ &+ \frac{\eta}{\tau^2} (\nu_2(\tau) - \nu_1(\tau)) + \frac{\eta h_2'(\tau)}{\tau h_2(\tau)} (\nu_2(\tau) - \\ &\left. - \nu_1(\tau)) \right) d\eta, \quad (y, \sigma) \in Q_{T_1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Для оцінки одержаного виразу скористаємось оцінкою другої похідної об'ємного потенціалу [14]:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau \tilde{G}_{yy}(y, \sigma, \eta, \tau) q(\eta, \tau) d\eta \right| &\leq \\ &\leq C \int_0^\sigma \frac{d\tau}{(\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau))^{1-\delta/2}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Тут $q(y, \sigma)$ – довільна неперервна в \overline{Q}_{T_1} функція, яка задовольняє умову Гельдера за змінною y з показником $\delta, 0 < \delta < 1, C$ – відома стала, $\theta_2(\sigma) = \int_0^\sigma \frac{a_2(\tau)\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{\gamma h_2^2(\tau)} d\tau$.

Беручи до уваги (38) та співвідношення $\nu_1'(\sigma) = \frac{1}{\gamma} \mu_i'(\sigma^{\frac{1}{\gamma}}) \sigma^{\frac{1}{\gamma}-1}, i = 1, 2$, оцінимо один з виразів, що утворюють (37):

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\sigma d\tau \int_0^\tau \tilde{G}_{yy}(y, \sigma, \eta, \tau) \frac{\nu_2'(\tau) - \nu_1'(\tau)}{\tau} \eta d\eta \right| &\leq \\ &\leq C_4 \int_0^\sigma \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-\delta} d\tau}{(\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau))^{1-\frac{\delta}{2}}}, \end{aligned} \quad (39)$$

Інші вирази з (37) оцінюємо аналогічно, використовуючи умови теореми. Тоді, зважаючи на нерівність $\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau) \geq C_5(\sigma^{\frac{1}{\gamma}} - \tau^{\frac{1}{\gamma}})$, з (37) і (39) отримуємо

$$\begin{aligned} |v_{2yy}(y, \sigma)| &\leq C_6 \int_0^\sigma \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-\delta} d\tau}{(\theta_2(\sigma) - \theta_2(\tau))^{1-\frac{\delta}{2}}} \leq \\ &\leq C_{25} \int_0^\sigma \frac{\tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-\delta} d\tau}{(\sigma^{\frac{1}{\gamma}} - \tau^{\frac{1}{\gamma}})^{1-\frac{\delta}{2}}}. \end{aligned}$$

В останньому інтегралі виконаємо заміну $z = \frac{\tau}{\sigma}$:

$$\begin{aligned} |v_{2yy}(y, \sigma)| &\leq C_7 \sigma^{\frac{\delta}{2\gamma}-\delta} \int_0^1 \frac{z^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-\delta} dz}{(1-z^{\frac{1}{\gamma}})^{1-\frac{\delta}{2}}} \leq \\ &\leq C_8 \sigma^{\frac{\delta}{2\gamma}-\delta}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що права частина (32) визначена і неперервна в \overline{Q}_{T_1} . Отже, система рівнянь (32)-(35) має лише тривіальний розв'язок. Це означає, що розв'язок задачі (5)-(8), а також і задачі (1)-(4) єдиний. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Lorenzi L. An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. – 2001. – **9**, N6. – P. 1-27.
2. Іванчов М.І. Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, N7. – С. 901-910.

3. Баранська І. Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2005. – **48**, N2. – С. 32-42.

4. Баранська І., Іванчов М. Обернена задача для двовимірного параболічного рівняння в області з вільною межею // *Укр. мат. вісник.* – 2007. – **4**, N4. – С. 467-484.

5. Снітко Г.А. Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, N4. – С. 7-18.

6. Ivanchov M., Saldina N. An inverse problem for strongly degenerate heat equation // *J. Inv. Ill-Posed Problems.* – 2006. – **14**, N5. – P. 465-480.

7. Іванчов М., Салдіна Н. Обернена задача для параболічного рівняння із сильним степеневим виродженням // *Укр. мат. журн.* – 2006. – **58**, N2. – С. 1487-1500.

8. Ivanchov M., Lorenzi A., Saldina N. Solving a scalar degenerate multidimensional identification problem in a Banach space // *J. Inv. Ill-Posed Problems.* – 2008. – **16**, N4. – P. 397-415.

9. Гринців Н. Обернена задача для параболічного рівняння із сильним степеневим виродженням в області з вільною межею // *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 2005. – **64**. – С. 84-97.

10. Іванчов М.І. Задача теплопровідності з вільною межею, яка вироджується у початковий момент часу // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2007. – **50**, N2. – С. 82-87.

11. Іванчов М., Савіцька Т. Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею, яка вироджується в початковий момент часу // *Укр. мат. вісник.* – 2011. – **8**, N3. – С. 381-403.

12. Ivanchov M. Inverse problem for equation of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 240 p.

13. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.

14. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968. — 428 с.