УДК 517.98

©2013 р. В.М. Статкевич

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут"

# ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЛІНІЙНОГО ТИПУ З СУТТЄВО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИМ ЕЛІПТИЧНИМ ОПЕРАТОРОМ

Досліджуються лінійні та квазілінійні диференціальні рівняння з суттєво нескінченновимірним еліптичним оператором (типу Лапласа-Леві). Для квазілінійного рівняння доведена теорема існування та єдиності розв'язку. Також проводиться паралель зі звичайними диференціальними рівняннями та алгебраїчними рівняннями.

We investigate linear and quasi-linear differential equations with essentially infinite-dimensional elliptic operator (of the Laplace-Lévy type). For a quasi-linear equation, we prove a theorem on the existence and uniqueness of a solution. Also we obtain a parallel with ordinary differential equations and algebraic equations.

**1. Суттєво нескінченновимірні еліптичні оператори.** В нескінченновимірному просторі існують оператори, які не мають скінченновимірних аналогів. Таким оператором, зокрема, є оператор Лапласа-Леві, введений П. Леві [1] в 1922 р., як узагальнення класичного оператора Лапласа. Для двічі диференційовних функцій на дійсному гільбертовому просторі $l_2$ оператор Лапласа-Леві задається формулою

$$(Lu)(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

а для функцій на абстрактному дійсному нескінченновимірному сепарабельному гільбертовому просторі $H$

$$(Lu)(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tr} P_n u''(x),$$

де $\{e_i\}$ – ортонормований базис в $H$, $P_n$ – ортопроектор на лінійну оболонку $e_1, \dots, e_n$, tr – слід оператора. Такий оператор є диференціальним оператором другого порядку, але він задовольняє лейбніцевську властивість $L(uv) = Lu \cdot v + u \cdot Lv$ та приймає нульове значення на циліндричних функціях; останній факт дав підставу Г.Є. Шилову, редактору перекладу [1], назвати його суттєво нескінченновимірним. Сучасний стан теорії оператора Лапласа-Леві викладено в монографії М.Н. Феллера [2].

В 1977 р. Ю.В. Богданським [3] (див. також [4—5]) запропонований суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор, який узагальнює оператор Лапласа-Леві та успадковує його специфічні властивості. Такий оператор (точніше, диференціальний вираз) задається формулою

$$(Lu)(x) = j(u''(x)), \tag{1}$$

де $j$ є невід'ємним ненульовим функціоналом на $B_C(H)$, ядру якого належать всі оператори скінченного рангу. Відповідний функціонал згідно з роботою [3] також називаємо суттєво нескінченновимірним (за іншою термінологією – сингулярним).

Множину $D \subset B_C(H)$ називаємо майже компактною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існують компактна множина $K \subset B_C(H)$ та числа $n \in \mathbb{N}$ та $d > 0$ такі, що $K + Q_{n,d}$ є $\varepsilon$-сіткою для $D$ (тут $Q_{n,d} \subset B_C(H)$ – множина операторів, ранг яких не перевищує $n$, а норма не перевищує $d$).

Нехай $B_R = \{x \in H \mid \|x\| \leqslant R\}$ – фіксована куля радіуса $R$. Через $Z$ позначимо множину дійсних функцій класу $C^2(H)$, носії яких належать кулі $B_R$, $u''(\cdot)$ є рівномірно неперервною на $H$, а множина $\{u''(x) \mid x \in B_R\}$ є майже компактною. Нехай $X$ – замикання $Z$ в просторі $C^b(H)$ (тут $C^b(H)$ – банахів простір неперервних обмежених функцій на $H$ з нормою $\sup_{x\in H} |u(x)|$). $X$ є дійсною комутативною банаховою алгеброю відносно поточкових операцій з sup-нормою. З $u \in Z$ випливає $Lu \in X$; суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор $L$ коректно визначений на $Z$ формулою (1). Він допускає замикання $\bar{L}$, яке породжує $(C_0)$-півгрупу стиску $T(t)$ в $X$ [4—5]. Ця півгрупа є мультиплікативною ($\forall u, v \in X,\ \forall t \geqslant 0\colon T(t)(uv) = T(t)u{\cdot}T(t)v$) та нільпотентною ($\exists t_0 > 0\colon T(t_0) = 0$). Для функції $g \in C^1(\mathbb{R})$ такої, що $g(0) = 0$, має місце властивість

$$\bar{L}(g \circ u) = (g' \circ u) \cdot \bar{L}u. \tag{2}$$

Ймовірнісні властивості оператора Лапласа-Леві досліджувались М.Й. Ядренком, М.Н. Феллером і школою Т. Хіди. С.В. Кошкіним вивчались ймовірнісні аспекти характерів Леві з точки зору випадкових процесів та зв'язок з теорією білого шуму та статистичною механікою (1998—1999 рр.). Зацікавленість оператором Лапласа-Леві на даний час в значній мірі обумовлена роботами Л. Аккарді, П. Гібіліско, І.В. Воловича (1992, 1994 рр.), а також Р. Леандра, І.В. Воловича (2001 р.), у яких виявлено зв'язок між гармонічними за Леві функціями та розв'язками рівнянь Янга-Міллса. Детальна бібліографія наведена в [2]. Також зауважимо, що існує паралель між диференціальними рівняннями з суттєво нескінченновимірними еліптичними операторами та класичною теорією звичайних диференціальних рівнянь (див. [6—8]); для рівнянь з оператором типу Лапласа-Леві така паралель відслідковувалась Є.М. Поліщуком, Г.Є. Шиловим та В.Я. Сикирявим.

**2. Диференціальні рівняння лінійного типу.** Розглянемо лінійне диференціальне рівняння вищого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$\begin{aligned}(\bar{L}^n u)(x) + a_1(x)(\bar{L}^{n-1}u)(x) + \ldots +\\ +a_n(x)u(x) = f(x).\end{aligned} \tag{3}$$

Має місце наступна теорема, доведена в [6].

**Теорема 1.** *Нехай $a_1, \ldots, a_n, f \in X$. Тоді рівняння* (3) *має і до того ж єдиний розв'язок.*

В інших функціональних просторах рівняння виду (3) з оператором Лапласа-Леві та його модифікаціями досліджувалось Є.М. Поліщуком, Г.Є. Шиловим та В.Я. Сикирявим, а полігармонічне рівняння – М.Н. Феллером.

Розглянемо квазілінійне диференціальне рівняння

$$\begin{aligned}(\bar{L}^n u)(x) + a_1(x)(\bar{L}^{n-1}u)(x) + \ldots +\\ +a_n(x)u(x) = f(x, u(x)),\end{aligned} \tag{4}$$

де $a_1, \ldots, a_n \in X$ – змінні коефіцієнти.

**Теорема 2.** *Нехай функція $f : H \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має наступні властивості:*

*а) для будь-якого $p \in \mathbb{R}$ $f(\cdot, p) \in X$,*

*б) $f$ задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом рівномірно відносно першого: існує $C > 0$ таке, що для будь-яких $x \in H$, $p, q \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|f(x, p) - f(x, q)| \leqslant C|p - q|$.*

*Тоді рівняння* (4) *має і до того ж єдиний розв'язок.*

**Доведення.** Виберемо в $R^n$ норму $\|\vec{y}\| = |y^1| + \ldots |y^n|$ ($\vec{y} \in \mathbb{R}^n$). Має місце наступний варіант теореми Пікара для системи диференціальних рівнянь з суттєво нескінченновимірними еліптичними операторами [8, теорема 2].

**Теорема 3.** *Нехай $i = 1, \ldots, n$; $j_1, \ldots, j_n$ – суттєво нескінченновимірні функціонали; $(L_i u)(x) = j_i(u''(x))$ – відповідні їм суттєво нескінченновимірні еліптичні оператори; функція $\vec{g} = (g^1, \ldots g^n)\colon H \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ має наступні властивості:*

*а) для будь-якого $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$, $g^i(\cdot, \vec{p}) \in X$,*

*б) $\vec{g}$ задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом рівномірно відносно першого: існує $C > 0$ таке, що для будь-яких $x \in H$, $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n$ виконується нерівність $\|\vec{g}(x, \vec{p}) - \vec{g}(x, \vec{q})\| \leqslant C\|\vec{p} - \vec{q}\|$.*

*Тоді система рівнянь*

$$(\bar{L}_i u_i)(x) = g^i(x, u_1(x), \ldots, u_n(x)), \tag{5}$$

*де $i = 1, \ldots, n$, має і до того ж єдиний розв'язок.*

Якщо в теоремі 3 умову а) замінити на умову а') для будь-яких $u_i \in X$ функції $g^i(\cdot, u_1(\cdot), \ldots, u_n(\cdot))$ належать $X$, то теорема 3 також має місце (детальніше див. [8]).

Продовжимо доведення теореми 2. Заміною змінних $v_1 = u \in X, v_2 = \bar{L}u \in$

$X, \ldots, v_n = \bar{L}^{n-1}u \in X$ рівняння (4) зводиться до системи виду (5):

$$(\bar{L}v_1)(x) = v_2(x),$$
$$\ldots$$
$$(\bar{L}v_{n-1})(x) = v_n(x),$$
$$(\bar{L}v_n)(x) = f(x, v_1(x)) - a_n(x)v_1(x) - \ldots -$$
$$-a_1(x)v_n(x).$$

Виберемо функцію $\vec{g}$: $H \times \mathbb{R}^n \ni (x, \vec{p}) \mapsto (p^2, \ldots, p^n, f(x, p^1) - a_n(x)p^1 - \ldots - a_1(x)p^n) \in \mathbb{R}^n$. Перевіримо умови а') та б) теореми 3. Умова а') теореми 3 випливає з того, що за умов а)–б) теореми 2 з $u \in X$ випливає $f(\cdot, u(\cdot)) \in X$ (див. [7]), а $X$ є алгеброю. Умова б) теореми 3 випливає з нерівності

$$\|\vec{g}(x, \vec{p}) - \vec{g}(x, \vec{q})\| =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} |g^k(x, \vec{p}) - g^k(x, \vec{q})| = \sum_{k=2}^{n} |p^k - q^k| +$$
$$+|(f(x, p^1) - a_n(x)p^1 - \ldots - a_1(x)p^n) -$$
$$-(f(x, q^1) - a_n(x)q^1 - \ldots - a_1(x)q^n)| \leqslant$$
$$\leqslant \max(1 + \|a_1\|, \ldots, 1 + \|a_{n-1}\|, C + \|a_n\|) \times$$
$$\times \|\vec{p} - \vec{q}\| \quad (\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^n).$$

Посилання на теорему 3 з умовами а') та б) завершує доведення теореми.

**3. Приклади.** Спочатку нагадаємо два відомі факти. В алгебраїчному рівнянні $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = f$, де $a_1, \ldots, a_n, f \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, заміна $x = y - \frac{a_1}{n}$ приводить до того, що в отриманому рівнянні коефіцієнт при $y^{n-1}$ виявиться нульовим. Якщо у звичайному лінійному диференціальному рівнянні

$$u^{(n)}(x) + a_1(x)u^{(n-1)}(x) + \ldots +$$
$$+a_{n-1}(x)u'(x) + a_n(x)u(x) = f(x),$$

де $a_1, \ldots, a_n, f$ – неперервні на деякому відрізку функції, зробити заміну $u(x) = v(x)\exp\Bigl(-\frac{1}{n}\int a_1(x)dx\Bigr)$, то в отриманому рівнянні коефіцієнт при $u^{(n-1)}(\cdot)$ також стане нульовим. Наведемо аналоги вказаних фактів для суттєво нескінченновимірних рівнянь другого та третього порядку.

**Приклад 1.** Доведемо, що для рівняння

$$(\bar{L}^2u)(x) + a_1(x)(\bar{L}u)(x) +$$
$$+a_2(x)u(x) = f(x), \tag{6}$$

де $a_1$ задовольняє додаткову умову $a_1 \in D(\bar{L})$, а $a_2, f \in X$, заміна

$$u(x) = v(x)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right) \tag{7}$$

перетворює рівняння (6) на таке, що не містить $\bar{L}v$.

Другий множник у правій частині формули (7) не належить $X$, оскільки за межами кулі $B_R$ дорівнює одиниці, а тому має необмежений носій. Запишемо (7) у вигляді

$$u(x) = v(x) +$$
$$+v(x)\Biggl(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right) - 1\Biggr).$$

Врахуємо лейбніцевську властивість оператора $\bar{L}$, властивість (2) та нільпотентність півгрупи $T(t)$:

$$(\bar{L}u)(x) = (\bar{L}v)(x) +$$
$$+(\bar{L}v)(x)\Biggl(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right) - 1\Biggr) +$$
$$+\frac{1}{2}v(x)\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right) \times$$
$$\times \int_0^{t_0}\frac{\partial}{\partial t}(T(t)a_1)(x)dt =$$
$$= \Bigl((\bar{L}v)(x) - \frac{1}{2}a_1(x)v(x)\Bigr) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right). \tag{8}$$

Формулу (8) застосуємо рекурсивно до себе:

$$(\bar{L}^2u)(x) = \Biggl(\bar{L}\Bigl((\bar{L}v)(x) - \frac{1}{2}a_1(x)v(x)\Bigr) -$$
$$-\frac{1}{2}a_1(x)\Bigl((\bar{L}v)(x) - \frac{1}{2}a_1(x)v(x)\Bigr)\Biggr) \times$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right) = \Bigl((\bar{L}^2v)(x) -$$
$$-a_1(x)(\bar{L}v)(x) - \frac{1}{2}(\bar{L}a_1)(x)v(x) + \frac{1}{4}a_1^2(x) \times$$

$$\times v(x)\Bigg)\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right). \qquad (9)$$

Підстановка формул (7)-(9) у рівняння (6) та наступне спрощення приводять до рівняння:

$$(\bar{L}^2v)(x)+\left(a_2(x)-\frac{1}{2}(\bar{L}a_1)(x)-\frac{1}{4}a_1^2(x)\right)\times$$
$$\times v(x)=f(x)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right).$$

Підкреслимо, що наведені перетворення можливі лише за умови $a_1\in D(\bar{L})$.

**Приклад 2.** Доведемо, що для рівняння

$$(\bar{L}^3u)(x)+a_1(x)(\bar{L}^2u)(x)+a_2(x)(\bar{L}u)(x)+$$
$$+a_3(x)u(x)=f(x), \qquad (10)$$

де $a_1$ задовольняє додаткову умову $a_1\in D(\bar{L}^2)$, а $a_2,a_3,f\in X$, заміна

$$u(x)=v(x)\exp\left(\frac{1}{3}\int\limits_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right)$$

перетворює рівняння (10) на таке, що не містить $\bar{L}^2v$.

Аналогічними міркуваннями отримуємо:

$$(\bar{L}u)(x)=\left((\bar{L}v)(x)-\frac{1}{3}a_1(x)v(x)\right)\times$$
$$\times\exp\left(\frac{1}{3}\int\limits_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right);$$
$$(\bar{L}^2u)(x)=\Bigg((\bar{L}^2v)(x)-\frac{2}{3}a_1(x)(\bar{L}v)(x)-$$
$$-\frac{1}{3}(\bar{L}a_1)(x)v(x)+\frac{1}{9}a_1^2(x)v(x)\Bigg)\times$$
$$\times\exp\left(\frac{1}{3}\int\limits_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right);$$
$$(\bar{L}^3u)(x)=\Bigg((\bar{L}^3v)(x)-a_1(x)(\bar{L}^2v)(x)+$$
$$+\left(\frac{1}{3}a_1^2(x)-(\bar{L}a_1)(x)\right)(\bar{L}v)(x)+\Bigg(\frac{1}{3}a_1(x)\times$$
$$\times(\bar{L}a_1)(x)-\frac{1}{3}(\bar{L}^2a_1)(x)-\frac{1}{27}a_1^3(x)\Bigg)v(x)\Bigg)\times$$
$$\times\exp\left(\frac{1}{3}\int\limits_0^{t_0}(T(t)a_1)(x)dt\right).$$

Підстановка наведених формул у рівняння (10) та наступне спрощення приводять до рівняння, що не містить $\bar{L}^2v$.

Викладені в роботі результати були представлені на Всеукраїнській науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці" [9].

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа.— М.: Наука, 1967.— 512 с.

2. *Feller M.N.* The Lévy Laplacian.— Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 2005.— 153 p.

3. *Богданский Ю.В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн.— 1977.— **29**, №6.— С. 781—784.

4. *Богданский Ю.В.* Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, №5.— С. 584—590.

5. *Bogdansky Yu.V., Dalecky Yu.L.* Cauchy problem for the simpliest parabolic equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator // Suppl. to chapters IV, V in book: *Dalecky Yu.L., Fomin S.V.* Measures and differential equations in infinite-dimensional space.— Amsterdam—New York: Kluwer Acad. Publ., 1991.— P. 309—322.

6. *Богданський Ю.В., Статкевич В.М.* Лінійні диференціальні рівняння з суттєво нескінченновимірними операторами // Наукові вісті НТУУ "КПІ".— 2008.— №2.— С. 144—147.

7. *Богданський Ю.В., Статкевич В.М.* Нелінійні рівняння з суттєво нескінченновимірними диференціальними операторами // Укр. мат. журн.— 2010.— **62**, №11.— С. 1571—1576.

8. *Статкевич В.М.* Системи суттєво нескінченновимірних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн.— 2011.— **63**, №9.— С. 1257—1262.

9. *Статкевич В.М.* Суттєво нескінченновимірні диференціальні рівняння лінійного типу // Всеукраїнська наукова конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці", Чернівці, 11—13 червня 2012 р.— С. 99.