УДК 517.95

©2013 р. М. М. Бокало

Львівський національний університет імені Івана Франка

МІШАНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ АНІЗОТРОПНИХ ЕЛІПТИЧНО-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

Розглянуто еліптично-параболічні анізотропні рівняння другого порядку в необмежених областях. Встановлено умови існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаних задач для таких рівнянь і оцінки цих розв'язків за відсутності будь-яких обмежень на зростання вихідних даних та поведінку розв'язків на нескінченності.

The present paper is devoted to elliptic-parabolic anisotropic second order equations in unbounded domains. We establish conditions for the existence and uniqueness of generalized solutions of initial-boundary value problems and estimate the solutions without any restrictions on the growth of the data-in and the behavior of the solutions at infinity.

Вступ. Як добре відомо, крайові задачі для лінійних еліптичних і параболічних рівнянь в необмежених областях є коректними, якщо на їхні розв'язки та вихідні дані додатково до крайових умов накладені певні обмеження на зростання на нескінченності. Така ж ситуація з крайовими задачами в необмежених областях і для нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь з певних класів. Проте є рівняння, крайові задачі для яких однозначно розв'язні без будь-яких умов на нескінченності. У [1] вперше отримано такий результат для найпростіших півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь. Згодом нові класи рівнянь з таким ефектом отримано в багатьох працях, серед яких [2]–[7].

Тут ми вперше вивчаємо проблему існування та єдиності узагальнених розв'язків мішаних задачі для нелінійних анізотропних еліптично-параболічних рівнянь другого порядку в необмежених областях без умов на нескінченності. Відмітимо, що нелінійні еліптично-параболічні рівняння досліджували в багатьох працях, серед яких [8], [9].

Робота складається з трьох частин: в першій частині формулюється задача і основний результат, в другій наведено допоміжні твердження, а в третій – обґрунтування основного результату.

1. Формулювання задачі й основного результату. Нехай Ω – необмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, елементами якого є впорядковані набори дійсних чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$ і на якому введена норма $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Припускаємо, що межа $\partial\Omega$ області Ω є кусково-гладкою поверхнею і $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, де Γ_0 – замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема, Γ_0 може бути порожньою множиною або збігатися з $\partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$. Через $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ позначимо одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі. Нехай $T > 0$ – яке-небудь фіксоване число. Приймемо $Q := \Omega \times (0, T)$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times (0, T)$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times (0, T)$.

Нехай b – функція, яка визначена на Ω, приймає значення в $\mathbb{R}$ і задовольняє умову $(\mathcal{B})$: b – невід'ємна, вимірна та обмежена на кожній обмеженій підмножині Ω, причому множина $\Omega_0 := \{x \in \Omega \,|\, b(x) > 0\}$ – область в $\mathbb{R}^n$.

Розглядаємо задачу: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$(b(x)u)_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i}\, a_i(x, t, u, \nabla u) +$$

$$+ a_0(x, t, u, \nabla u) = f(x, t), \;\; (x, t) \in Q, \quad (1)$$

крайові умови

$$u\Big|_{\Sigma_0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_a}\Big|_{\Sigma_1} = 0 \quad (2)$$

та початкову умову

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega_0. \qquad (3)$$

Тут $a_j(x,t,s,\xi)$, $(x,t,s,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$ $(j = \overline{0,n})$, $f(x,t)$, $(x,t) \in Q$, $u_0(x)$, $x \in \Omega$, – задані дійснозначні функції, про які точніше буде сказано пізніше, а $\partial u(y,t)/\partial \nu_a := \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(y,t,u,\nabla u)\,\nu_i(y)$, $(y,t) \in \Sigma_1$, – похідна по "конормалі ". Рівняння (1) називаємо *еліптично-параболічним*, оскільки припускаємо, що рівність $b = 0$ може виконуватися на підмножині Ω ненульової міри, а просторова частина диференціального виразу в лівій частині рівняння (1) є еліптичною. Далі сформульовану вище задачу коротко називатимемо задачею (1)–(3).

Введемо ще деякі позначення. Нехай G – довільна необмежена область в $\mathbb{R}^m$, де $m = n$ або $m = n+1$, а $Bd(G)$ – множина обмежених підобластей області G. Для будь-якого $r \in [1,\infty]$ через $L_{r,\,\mathrm{loc}}(\overline{G})$ позначатимемо лінійний локально опуклий простір визначених на G і вимірних функцій, звуження яких на довільну область $G' \in Bd(G)$ належить $L_r(G')$, з топологією, що породжена системою півнорм: $\{\|\cdot\|_{L_r(G')} \mid G' \in Bd(G)\}$. Зауважимо, що послідовність $\{v_l\}_{l=1}^{\infty}$ *сильно* (відповідно, *слабко*) збігається до v в $L_{r,\,\mathrm{loc}}(\overline{G})$, якщо для будь-якої $G' \in Bd(G)$ послідовність $\{v_l|_{G'}\}_{l=1}^{\infty}$ збігається до $v|_{G'}$ сильно (відповідно, слабко) в $L_r(G')$.

Нехай $p = (p_0, \ldots, p_n)$ – впорядкований набір дійсних чисел, що задовольняють умову

$(\mathcal{P}): \ \ p_0 \geq 2, \ \ p_i > 1 \ (i = \overline{1,n})$.

Позначимо через $p' = (p_0{}', \ldots, p_n{}')$ впорядкований набір дійсних чисел, для яких правильні рівності $1/p_j + 1/p_j{}' = 1$ $(j = \overline{0,n})$.

Під $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ розумітимемо лінійний локально опуклий простір функцій $v \in L_{p_0,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ таких, що $v_{x_i} \in L_{p_i,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i = \overline{1,n})$, із системою півнорм: $\big\{\|v\|_{L_{p_0}(\Omega')} + \sum\limits_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{L_{p_i}(\Omega')} \ \big| \ \Omega' \in Bd(\Omega)\big\}$. Позначимо через $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_0)$ замикання простору $C^1(\overline{\Omega},\Gamma_0) := \big\{v \in C^1(\overline{\Omega}) \,\big|\, v|_{\Gamma_0} = 0\big\}$ в просторі $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Нехай $W^1_{p,\mathrm{c}}(\Omega,\Gamma_0)$ – підпростір простору $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_0)$, складений з функцій з обмеженими носіями.

Нехай $W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q},\Sigma_0) := \{w : (0,T) \to W^1_{p,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_0) \,\big|\, w \in L_{p_0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\ w_{x_i} \in L_{p_i,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \ \ (i = \overline{1,n})\}$ – лінійний локально опуклий простір функцій із системою півнорм: $\big\{\|w\|_{L_{p_0}(\Omega'\times(0,T))} + \sum_{i=1}^{n} \|w_{x_i}\|_{L_{p_i}(\Omega'\times(0,T))} \ \big| \ \Omega' \in Bd(\Omega)\big\}$.

Визначимо функцію $\widetilde{b} : \Omega \to \mathbb{R}$, прийнявши $\widetilde{b}(x) := b(x)$, якщо $x \in \Omega_0$, і $\widetilde{b}(x) := 1$, якщо $x \in \Omega \setminus \Omega_0$. Для будь-якої $\Omega' \in Bd(\Omega)$ через $H^b(\Omega')$ позначимо лінійний півнормований простір функцій $w : \Omega' \to \mathbb{R}$ таких, що $w = \widetilde{b}^{-1/2}v$, де $v \in L_2(\Omega')$, з півнормою $\|w\|_{H^b(\Omega')} := \big(\int_{\Omega'} b(x)|w(x)|^2\,dx\big)^{1/2}$, а через $H^b_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ – лінійний локально опуклий простір, складений з вимірних функцій $w : \Omega \to \mathbb{R}$, звуження яких на довільну $\Omega' \in Bd(\Omega)$ належить $H^b(\Omega')$, з топологією, заданою системою півнорм: $\{\|\cdot\|_{H^b(\Omega')} \,\big|\, \Omega' \in Bd(\Omega)\}$. Легко переконатися, що простір $H^b_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ є поповненням простору $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_0)$ і, якщо $b(x) \geq b_0 = \mathrm{const} > 0$ для майже всіх $x \in \Omega$, то $H^b_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}) = L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Нехай $C([0,T];H^b(\Omega'))$, де $\Omega' \in Bd(\Omega)$, – лінійний півнормований простір , складений з функцій $h : [0,T] \to H^b(\Omega')$ таких, що $b^{1/2}w \in C([0,T];L_2(\Omega'))$, з півнормою $\|h\|_{C([0,T];H^b(\Omega'))} := \max\limits_{t\in[0,T]} \|h(\cdot,t)\|_{H^b(\Omega')} \equiv \max\limits_{t\in[0,T]} \|b^{1/2}(\cdot)h(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega')}$. Через $C([0,T];H^b_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$ позначимо лінійний локально опуклий простір функцій $h : [0,T] \to H^b_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ таких, що для довільної $\Omega' \in Bd(\Omega)$ функція $t \to h(\cdot,t)|_{\Omega'}$ належить простору $C([0,T];H^b(\Omega'))$, з топологією, породженою системою півнорм: $\{\|h\|_{C([0,T];H^b(\Omega'))}\|_{H^b(\Omega')} \,\big|\, \Omega' \in Bd(\Omega)\}$.

Відмітимо, що якщо $w \in W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q},\Sigma_0)$, то для майже всіх $t \in [0,T]$ маємо $w(\cdot,t) \in H^b_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$. Введемо лінійний локально опуклий простір

$$\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}} := W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q},\Sigma_0) \cap C([0,T];H^b_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})).$$

Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину впорядкованих наборів функцій $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ таких, що для кожного $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ функція $a_i(x, t, s, \xi)$, $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, задовольняє умови:

$(\mathcal{A}_1)$: a_i є дійснозначною та каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x, t) \in Q$ функція $a_i(x, t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – неперервна і для будь-яких $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ функція $a_i(\cdot, \cdot, s, \xi) : Q \to \mathbb{R}$ – вимірна; $a_i(x, t, 0, 0) = 0$ для майже всіх $(x, t) \in Q$;

$(\mathcal{A}_2)$: для будь-яких $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ і майже всіх $(x, t) \in Q$ виконується нерівність

$$|a_i(x,t,s,\xi)| \le h_{1,i}(x,t)\big(|s|^{p_0/p_i'} + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j/p_i'}\big) + h_{2,i}(x,t),$$

де $h_{1,i} \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $h_{2,i} \in L_{p_i',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $1/p_i + 1/p_i' = 1$.

Означення 1. *Нехай b і p задовольняють умови, відповідно, $(\mathcal{B})$ та $(\mathcal{P})$, $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}_p$, $u_0 \in H^b_{loc}(\overline{\Omega})$ і $f \in L_{p_0',loc}(\overline{Q})$. Скажемо, що функція $u \in \mathbb{U}^b_{p,loc}$ є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), якщо вона задовольняє умову (3) та інтегральну рівність*

$$\iint_Q \Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u)\psi_{x_i}\varphi + a_0(x,t,u,\nabla u)\psi\varphi - b(x)u\psi\varphi'\Big\}\,dxdt = \iint_Q f\psi\varphi\,dxdt \qquad (4)$$

для будь-яких $\psi \in W^1_{p,c}(\Omega, \Gamma_0)$, $\varphi \in C^1_0(0,T)$.

Відмітимо, що тут і далі під $C^1_0(0,T)$ розуміємо простір неперервно диференційовних на $(0,T)$ функцій, які мають компактний в $(0,T)$ носій. Також зауважимо, що якщо u – узагальнений розв'язок задачі (1)–(3), то умова (3) є рівносильна умові: $\|u(\cdot,0) - u_0(\cdot)\|_{H^b(\Omega')} = 0$ для кожної $\Omega' \in Bd(\Omega)$.

Наклавши додаткові умови на вихідні дані, доведемо однозначну розв'язність задачі (1)–(3).

Нехай $k \in \{1, \dots, n\}$ – число таке, що множина $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^2 + \ldots + x_k^2 < R^2\}$ обмежена для будь-якого $R > 0$. Зокрема, коли $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, де Ω_1 – необмежена область в $\mathbb{R}^k$, Ω_2 – обмежена область в $\mathbb{R}^{n-k}$, то k – саме те, про яке тільки що говорилося. Вважатимемо, що $0 \in \Omega$ і позначимо для будь-якого $R > 0$ через Ω_R зв'язну компоненту множини $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1^2 + \ldots + x_k^2 < R^2\}$, що містить 0, і приймемо $Q_R := \Omega_R \times (0,T)$.

Нехай $\alpha > 0$ – найменше з чисел, для якого правильна нерівність

$$\mathrm{mes}_n\{\Omega_R\} \le c_1 R^\alpha \quad \text{для кожного} \quad R > 0, \qquad (5)$$

де $\mathrm{mes}_n\{G\}$ – міра Лебега множини G в $\mathbb{R}^n$, $c_1 > 0$ – деяка стала.

Далі всюди припускатимемо, що $p = (p_0, \dots, p_n)$ задовольняє сильнішу ніж $(\mathcal{P})$ умову

$(\mathcal{P}^*)$: $p_0 \ge 2$ та для кожного $i \in \{1, \dots, k\}$ виконуються нерівності $1 < p_i \le 2$ і $p_i < p_0$, а для кожного $i \in \{k+1, \dots, n\}$ правильна нерівність $p_i > 1$.

Під $\mathbb{A}^*_p$ розумітимемо підмножину $\mathbb{A}_p$, елементи якої задовольняють умови

$(\mathcal{A}_3)$: для довільних $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ та майже всіх $(x,t) \in Q$ правильна нерівність

$$\sum_{i=1}^n (a_i(x,t,s_1,\xi^1) - a_i(x,t,s_2,\xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) + (a_0(x,t,s_1,\xi^1) - a_0(x,t,s_2,\xi^2))(s_1 - s_2) \ge K_1|s_1 - s_2|^q,$$

де $K_1 = \mathrm{const} > 0$, $2 \le q \le p_0$, $q > p_i$ та $r_i := qp_i/(q - p_i) > \alpha$ для кожного $i \in \{1, \dots, k\}$ (α – стала з умови (5));

$(\mathcal{A}_4)$: для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^n a_i(x,t,s,\xi)\,\xi_i + a_0(x,t,s,\xi)\,s \ge K_2\Big(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i} + |s|^{p_0}\Big) - h_3(x,t),$$

де $K_2 = \mathrm{const} > 0$, $h_3 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $h_3 \ge 0$;

$(\mathcal{A}_5)$: для будь-яких $(s_1,\xi^1),(s_2,\xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ і майже всіх $(x,t) \in Q$ правильна нерівність

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i(x,t,s_1,\xi^1) - a_i(x,t,s_2,\xi^2)|^{p_i'} \leq$$

$$\leq K_3 \Big[\sum_{i=1}^{n} (a_i(x,t,s_1,\xi^1) -$$

$$- a_i(x,t,s_2,\xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) +$$

$$+ (a_0(x,t,s_1,\xi^1) - a_0(x,t,s_2,\xi^2))(s_1 - s_2) \Big],$$

де $K_3 = \mathrm{const} > 0$.

Зауваження 1. Неважко переконатися (див. [5]), що підмножиною множини $\mathbb{A}_p^*$ є множина $\mathbb{A}_p'$ тих елементів $(a_0,\ldots,a_n)$ з $\mathbb{A}_p$, які задовольняють умови

$(\mathcal{A}_3{}')$: для кожного $i \in \{1,\ldots,n\}$ $a_i(x,t,s,\xi) \equiv a_i(x,t,\xi_i)$, $(x,t,s,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$, і для майже всіх $(x,t) \in Q$ існує похідна $\partial a_i(x,t,\xi_i)/\partial \xi_i$, $\xi_i \neq 0$, та виконуються нерівності

$$A_i |\xi_i|^{p_i - 2} \leq \partial a_i(x,t,\xi_i)/\partial \xi_i \leq \widetilde{A}_i |\xi_i|^{p_i-2},\ \xi_i \neq 0,$$

якщо $i \in \{1,\ldots,k\}$, а якщо $i \in \{k+1,\ldots,n\}$, то

$$\partial a_i(x,\xi_i)/\partial \xi_i \geq A_i |\xi_i|^{p_i-2},\ \xi_i \neq 0,$$

$$|a_i(x,\xi_i)| \leq \widetilde{A}_i |\xi_i|^{p_i-1} + h_i(x,t),\ \xi_i \in \mathbb{R},$$

де $A_i > 0$, $\widetilde{A}_i > 0$ – сталі, $h_i \in L_{p_i',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$;

$(\mathcal{A}_4{}')$: $a_0(x,t,s,\xi) \equiv a_0(x,t,s)$, $(x,t,s,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^{1+n}$, і для майже всіх $(x,t) \in Q$ існує похідна $\partial a_0(x,s)/\partial s$, $s \neq 0$, та виконуються нерівності

$$\partial a_0(x,t,s)/\partial s \geq A_0 |s|^{p_0-2} + A_0',\ s \neq 0,$$

$$|a_0(x,t,s)| \leq \widetilde{A}_0 |s|^{p_0-1} + h_0(x,t),\ s \in \mathbb{R},$$

де h_0 – функція з $L_{p_0',\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, а A_0, $\widetilde{A}_0$ – додатні сталі, A_0' – невід'ємна стала, причому $A_0' = 0$ тільки в тому випадку, коли $p_0 p_i/(p_0 - p_i) > \alpha$ (α – стала з умови (5)).

Прикладом елемента з $\mathbb{A}_p'$ є набір функцій $(\widetilde{a}_0(x,t)\,|s|^{p_0-2}\,s,\ \widetilde{a}_1(x,t)\,|\xi_1|^{p_1-2}\,\xi_1,\ \ldots,\ \widetilde{a}_n(x,t)\,|\xi_n|^{p_n-2}\,\xi_n)$, де $\widetilde{a}_i \in L_\infty(Q)$ – додатні і відділені від нуля функції. Тоді рівняння (1) набуде вигляду

$$(b(x)u)_t - \sum_{i=1}^{n} \left(\widetilde{a}_i(x,t) \big| u_{x_i} \big|^{p_i-2} u_{x_i} \right)_{x_i} +$$

$$+ \widetilde{a}_0(x,t)|u|^{p_0-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q. \quad (6)$$

□

Зауваження 2. Іншою підмножиною множини $\mathbb{A}_p^*$ є множина $\mathbb{A}_p''$ (див. [5]) тих елементів $(a_0,\ldots,a_n)$ з $\mathbb{A}_p$ при $p_1 = \ldots = p_k = 2$, які задовольняють умову $(\mathcal{A}_4)$ та умови

$(\mathcal{A}_3{}'')$: для будь-яких $(s_1,\xi^1),(s_2,\xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ та м.в. $(x,t) \in Q$ і виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i(x,t,s_1,\xi^1) - a_i(x,t,s_2,\xi^2)| \leq$$

$$\leq D_1 \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^1 - \xi_i^2| + D_2 |s_1 - s_2|,$$

де D_1, D_2 – невід'ємні сталі;

$(\mathcal{A}_4{}'')$: для будь-яких $(s_1,\xi^1),(s_2,\xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ та м.в. $(x,t) \in Q$ виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^{n} (a_i(x,t,s_1,\xi^1) - a_i(x,t,s_2,\xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) +$$

$$+ (a_0(x,t,s_1,\xi^1) - a_0(x,t,s_2,\xi^2))(s_1 - s_2) \geq$$

$$\geq K_4 \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^1 - \xi_i^2|^2 + K_5 |s_1 - s_2|^2 + K_6 |s_1 - s_2|^{p_0},$$

де $K_4 > 0$, $K_5 \geq 0$, $K_6 > 0$ – сталі, причому $K_5 = 0$ тільки в тому випадку, коли $D_2 = 0$ та $p_0 p_i/(p_0 - p_i) > \alpha$ (α – стала з умови (5)).

Прикладом рівнянь вигляду (1), для якого коефіцієнти $(a_0,\ldots,a_n)$ належать класу $\mathbb{A}_p''$, є рівняння

$$(b(x)u)_t - \sum_{i,j=1}^{k} \left(\widehat{a}_{ij}(x,t) u_{x_j} \right)_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i=k+1}^{n} \Big(\widehat{a}_i(x,t) |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} \Big)_{x_i} +$$

$$+\widehat{a}_*(x,t)u+\widehat{a}_0(x,t)|u|^{p_0-2}u=f(x,t), \quad (7)$$

$(x,t)\in Q$, де $\widehat{a}_{ij}\,(i,j=\overline{1,k})$ – обмежені функції, які задовольняють умову: існує число $\lambda>0$ таке, що $\sum\limits_{i,j=1}^{k}\widehat{a}_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \lambda\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2$ будь-яких $\xi_i\in\mathbb{R}\,(i=\overline{1,k})$ та м.в. $(x,t)\in Q$. $\square$

Теорема. *Нехай b і p задовольняють умови, відповідно, $(\mathcal{B})$ та $(\mathcal{P}^*)$, $(a_0,a_1,\ldots,\ a_n)\in\mathbb{A}_p^*$, $u_0\in H_{loc}^b(\overline{\Omega})$ і $f\in L_{p_0',loc}(\overline{Q})$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)–(3), причому для будь-яких R,R_0 таких, що $R>R_0>0$, $R\ge 1$, виконується оцінка*

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}} b(x)|u(x,t)|^2\,dx+$$

$$+\iint\limits_{Q_{R_0}}\Big[\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}(x,t)|^{p_i}+|u(x,t)|^{p_0}\Big]\,dxdt\le$$

$$\le C_1\Big(R/(R-R_0)\Big)^{s}\Big\{R^{\alpha-\theta}+$$

$$+\int\limits_{\Omega_R} b(x)|u_0(x)|^2\,dx+\iint\limits_{Q_R}|f(x,t)|^{p_0'}\,dxdt+$$

$$+\iint\limits_{Q_R} h_3(x,t)\,dxdt\Big\}, \quad (8)$$

де $s:=\max\limits_{1\le i\le k} r_i$, $\theta:=\min\limits_{1\le i\le k} r_i$, C_1 – стала, яка залежать тільки від K_1,K_2,K_3, c_1, $r_i\ (i=\overline{1,k})$, q (числа $r_i\ (i=\overline{1,k})$ – визначені в умові $(\mathcal{A}_3)$).

2. Допоміжні твердження.

Тут наведемо потрібні нам для обґрунтування основного результату допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай b задовольняє умову $(\mathcal{B})$, а $R>0$ – довільне фіксоване число. Припустимо, що функція $v\in W_{p,loc}^{1,0}(\overline{Q},\Sigma_0)$ така, що для деяких функцій $g_j\in L_{p_j'(\cdot),loc}(\overline{Q})$ $(j=\overline{0,n})$ виконується рівність*

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=1}^{n} g_i\psi_{x_i}\varphi+g_0\psi\varphi-bv\psi\varphi'\Big\}\,dxdt=0 \quad (9)$$

для всіх $\varphi\in C_0^1(0,T)$, $\psi\in W_{p,loc}^1(\overline{\Omega},\Gamma_0)$, $supp\,\psi\subset\overline{\Omega_R}$.

Тоді $b^{1/2}v\in C([0,T];L_2(\Omega_{R'}))$ для кожного $R'\in(0,R)$. Крім того, для довільних функцій $\chi\in C^1([0,T])$, $w\in C^1(\overline{\Omega})$, $supp\,w\subset\overline{\Omega_R}$, $w\ge 0$ і будь-яких чисел t_1,t_2 таких, що $0\le t_1<t_2\le T$, виконується рівність

$$\chi(t)\int\limits_{\Omega_R} b(x)|v(x,t)|^2w(x)\,dx\Big|_{t=t_1}^{t=t_2}-$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_R} b(x)|v(x,t)|^2w(x)\chi'(t)\,dxdt+$$

$$+2\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=1}^{n} g_i(vw)_{x_i}+g_0vw\Big\}\chi\,dxdt=0. \quad (10)$$

Це твердження доводиться аналогічно, як лема 1 праці [4].

Лема 2. *Нехай $a\in\mathbb{A}_p^*$ і для кожного $l\in\{1,2\}$ функції $u_l\in\mathbb{U}_{p,loc}^b$, $f_l\in L_{p_0',loc}(\overline{Q})$ такі, що для деякого числа $R>1$ виконується рівність (4) з $u=u_l$ і $f=f_l$ для будь-яких $\psi\in W_{p,c}^1(\Omega,\Gamma_0)$, $supp\,\psi\subset\overline{\Omega_R}$, $\varphi\in C_0^1(0,T)$.*

Тоді для будь-якого числа $R_0\in(0,R)$ правильна нерівність

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\Omega_{R_0}} b(x)|u_1(x,t)-u_2(x,t)|^2\,dx+$$

$$+\iint\limits_{Q_{R_0}}\Big[\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(x,t,u_1,\nabla u_1)-$$

$$-a_i(x,t,u_2,\nabla u_2)\big)\big(u_{1,x_i}-u_{2,x_i}\big)+$$

$$+\big(a_0(x,t,u_1,\nabla u_1)-a_0(x,t,u_2,\nabla u_2)\big)\big(u_1-u_2\big)+$$

$$+|u_1(x)-u_2(x)|^q\Big]\,dxdt\le$$

$$\le C_2\Big(\frac{R}{R-R_0}\Big)^{s}\Big\{R^{\alpha-\theta}+$$

$$+\int\limits_{\Omega_R} b(x)|u_1(x,0)-u_2(x,0)|^2\,dx+$$

$$+\iint\limits_{Q_R} |f_1(x,t)-f_2(x,t)|^{q'}\,dxdt\Big\}, \qquad (11)$$

де s,θ – такі ж як в теоремі 1, а C_2 – додатна стала, яка залежить тільки від $K_1, K_3, c_1,\ r_i\ (i=\overline{1,k}),\ q$.

Тут і далі використовуємо позначення $a_j(u_l)(x,t)\ :=\ a_j(x,t,u_l(x,t),\nabla u_l(x,t))$, $(x,t)\in Q,\ j=\overline{0,n},\ l=1,2,$.

Доведення леми 2. Введемо в розгляд "зрізаючу" функцію

$$\zeta(x')=\begin{cases} (R^2-|x'|^2)/R, & |x'|<R,\\ 0, & |x'|\ge R,\end{cases}$$

де $x'=(x_1,\ldots,x_k)$, $|x'|=(x_1^2+\ldots+x_k^2)^{1/2}$.

Для заданих $\psi\in W^1_{p,c}(\Omega,\Gamma_0)$, $\operatorname{supp}\psi\subset\overline{\Omega_R}, \varphi\in C^1_0(0,T)$ розглянемо рівність (4) при $u=u_1$, $f=f_1$ та цю ж рівність при $u=u_2$, $f=f_2$ і віднімемо ці рівності. У підсумку, прийнявши $u_{12}(x,t):=u_1(x,t)-u_2(x,t)$, $f_{12}(x,t)\ :=\ f_1(x,t)-f_2(x,t)$, $a_{j,12}(x,t)\ :=\ a_j(u_1)(x,t)-a_j(u_2)(x,t),\ (x,t)\in Q,\ j=\overline{0,n}$, отримаємо рівність, до якої застосуємо лему 1 з $v=u_{12}$, $g_0:=a_{0,12}-f_{12}$, $g_i=a_{i,12}$ $(i=\overline{1,n})$, $w=\zeta^s$, $s:=\max\limits_{1\le i\le k} r_i$, $\chi=1$, $t_1=0$, $t_2=\tau\in(0,T]$ – довільне число. Внаслідок простих перетворень отримаємо рівність

$$\int\limits_{\Omega_R} b(x)|u_{12}(x,\tau)|^2\zeta^s(x)dx+$$

$$+2\iint\limits_{Q_R^\tau}\Big\{\sum_{i=1}^n a_{i,12}(u_{12})_{x_i}+a_{0,12}u_{12}\Big\}\zeta^s\,dxdt=$$

$$=\int\limits_{\Omega_R} b(x)|u_{12}(x,0)|^2\zeta^s(x)dx-$$

$$-2s\iint\limits_{Q_R^\tau}\Big(\sum_{i=1}^k a_{i,12}\,\zeta_{x_i}\Big)\,u_{12}\,\zeta^{s-1}\,dxdt+$$

$$+2\iint\limits_{Q_R^\tau} f_{12}\,u_{12}\,\zeta^s\,dxdt, \qquad (12)$$

де $Q_R^\tau:=\Omega_R\times(0,\tau)$.

Зробимо відповідні оцінки інтегралів рівності (12). За умовою $(\mathcal{A}_3)$ маємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau}\Big\{\sum_{i=1}^n a_{i,12}(u_{12})_{x_i}+a_{0,12}\,u_{12}\Big\}\zeta^s dxdt\ge$$

$$\ge K_1\iint\limits_{Q_R^\tau}|u_{12}|^q\,\zeta^s dxdt. \qquad (13)$$

Далі нам будуть потрібні такі дві нерівності:

$$a\,c\le\varepsilon|a|^\nu+\varepsilon^{1-\nu'}\,|c|^{\nu'},$$

$$a,c\in\mathbb{R},\ \nu>1,\ 1/\nu+1/\nu'=1,\ \varepsilon>0,\ (14)$$

(ця нерівність є наслідком стандартної нерівності Юнга: $a\,c\le|a|^\nu/\nu+|c|^{\nu'}/\nu'$) та

$$a\,c\,d\le\varepsilon|a|^{\nu_1}+\varepsilon|c|^{\nu_2}+\varepsilon^{1-\nu_3}\,|d|^{\nu_3},$$

$$a,c,d\in\mathbb{R},\ \nu_1>1,\ \nu_2>1,\ \nu_3>1,$$

$$1/\nu_1+1/\nu_2+1/\nu_3=1,\ \varepsilon>0, \qquad (15)$$

(ця нерівність є наслідком стандартної нерівності Юнга: $a\,c\,d\ \le\ |a|^{\nu_1}/\nu_1+|c|^{\nu_2}/\nu_2+|d|^{\nu_3}/\nu_3$).

На підставі нерівності (15), врахувавши оцінку $|\zeta_{x_i}(x')|\ \le\ 2\ (x'\in\mathbb{R}^k, i=\overline{1,k})$, та взявши $a=-a_{i,12}\zeta^{s/p_i'}$, $c=u_{12}\zeta^{s/q}$, $d=\zeta^{s/r_i-1}\zeta_{x_i}$, $\varepsilon=\varepsilon_1$, отримаємо

$$-2s\iint\limits_{Q_R^\tau}\Big(\sum_{i=1}^k a_{i,12}\,\zeta_{x_i}\Big)\,u_{12}\,\zeta^{s-1}\,dxdt\le$$

$$\le 2s\varepsilon_1\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{i=1}^k|a_{i,12}|^{p_i'}\zeta^s\,dxdt+$$

$$+2sk\varepsilon_1\iint\limits_{Q_R^\tau}|u_{12}|^q\zeta^s\,dxdt+$$

$$+2^{r_i+1}s\varepsilon_1^{1-r_i}\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{i=1}^k\zeta^{\,s-r_i}\,dxdt, \qquad (16)$$

де $\varepsilon_1>0$ – довільне число.

Згідно з умовою $(\mathcal{A}_5)$ маємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{i=1}^k|a_{i,12}|^{p_i'}\zeta^s\,dxdt\le$$

$$\le K_3 \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_{i,12}\,(u_{12})_{x_i} + a_{0,12}\,u_{12} \Big\} \zeta^s\,dxdt. \tag{17}$$

На підставі нерівності (14), вибравши $a = u_{12}\zeta^{s/\nu}$, $c = f_{12}\zeta^{s/\nu'}$, $\nu = q$ ($\nu' = q' := q/(q-1)$), $\varepsilon = \varepsilon_2 > 0$, одержуємо

$$\Big| \iint\limits_{Q_R^\tau} f_{12}u_{12}\zeta^s dxdt \Big| \le \varepsilon_2 \iint\limits_{Q_R^\tau} |u_{12}|^q \zeta^s\,dxdt + \\ +\varepsilon_2^{-1/(q-1)} \iint\limits_{Q_R^\tau} |f_{12}|^{q'}\zeta^s\,dxdt, \tag{18}$$

де $\varepsilon_2 > 0$ – довільне число.

З (12) на підставі (13), (16)-(18) за достатньо малих значень ε_1 і ε_2 отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R} b(x)|u_{12}(x,\tau)|^2\zeta^s(x)dx + \\ + \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big\{ \sum_{i=1}^n a_{i,12}(u_{12})_{x_i} + \\ + a_{0,12}\,u_{12} + |u_{12}|^q \Big\}\zeta^s\,dxdt \le \\ \le C_3 \Big[\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^k \zeta^{s-r_i}\,dxdt + \\ + \int\limits_{\Omega_R} b(x)|u_{12}(x,0)|^2\zeta^s(x)dx + \\ + \iint\limits_{Q_R^\tau} |f_{12}|^{q'}\zeta^s\,dxdt \Big], \tag{19}$$

де C_3 – додатна стала, яка залежить тільки від $K_1, K_3, r_i\,(i=\overline{1,k}), q$, а $\tau \in [0,T]$ – довільне число.

Зауважимо, що $0 \le \zeta(x') \le R$, коли $x' \in \mathbb{R}^k$, $\zeta(x') \ge R - R_0$ при $|x'| \le R_0$, де $R_0 \in (0,R)$ – яке-небудь число. Враховуючи це, а також умову (5) та те, що $R \ge 1$, з (19) легко отримаємо потрібне твердження. $\square$

Наслідок 1. *Нехай $a \in \mathbb{A}_p^*$ і функції $\widetilde{u} \in \mathbb{U}_{p,loc}^b$, $f \in L_{p_0',loc}(\overline{\Omega})$, $u_0 \in H_{loc}^b(\overline{\Omega})$ такі, що для деякого числа $R > 1$ виконується рівність (4) з $u = \widetilde{u}$ для будь-яких $\psi \in W_{p,c}^1(\Omega,\Gamma_0)$, $supp\,\psi \subset \overline{\Omega_R}$, $\varphi \in C_0^1(0,T)$. Тоді для будь-якого числа $R_0 \in (0,R)$ правильна нерівність (8) з $u = \widetilde{u}$.*

Доведення наслідку 1. Доведення цього твердження повторює доведення леми 2, якщо прийняти $u_1 := \widetilde{u}$, $u_2 := 0$, але тут треба замінити нерівність (13) на відповідну нерівність, що випливає з умови $(\mathcal{A}_4)$, а також нерівність (18) на нерівність

$$\Big| \iint\limits_{Q_R^\tau} f\widetilde{u}\zeta^s dxdt \Big| \le \varepsilon_3 \iint\limits_{Q_R^\tau} |\widetilde{u}|^{p_0}\zeta^s dxdt + \\ + \varepsilon_3^{-1/(p_0-1)} \iint\limits_{Q_R^\tau} |f|^{p_0'}\zeta^s dxdt,$$

де $\varepsilon_3 > 0$ – довільне число. $\square$

3. Доведення основного результату.

Перший етап (єдиність розв'язку). Покажемо, що задача (1)-(3) має не більше одного узагальненого розв'язку. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 – (різні) узагальнені розв'язки цієї задачі. З леми 2 отримуємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^q\,dxdt \le \\ \le C_2 \Big(\frac{R}{R-R_0} \Big)^s R^{\alpha-\theta}, \tag{20}$$

де R_0, R – довільні числа такі, що $0 < R_0 < R$, $R \ge 1$.

Зафіксуємо $R_0 > 0$ і перейдемо в (20) до границі при $R \to +\infty$, врахувавши нерівність $\alpha - \theta < 0$. У підсумку отримаємо, що $u_1 = u_2$ майже скрізь на Q_{R_0}. Оскільки R_0 – довільне додатне число, то звідси одержуємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Q.

Другий етап (побудова наближень розв'язку). Нехай $\Gamma_{0,R} := \overline{\partial\Omega_R \setminus \Gamma_1}$, $\Gamma_{1,R} := \partial\Omega_R \setminus \Gamma_{0,R}$ для довільного $R > 0$. Введемо банахів простір $W_p^1(\Omega_R) := \{v \in L_{p_0}(\Omega_R) \,|\, v_{x_i} \in L_{p_i}(\Omega_R)\,(i=\overline{1,n})\}$ з нормою $\|v\|_{W_p^1(\Omega_R)} := \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L_{p_i}(\Omega_R)} + \|v\|_{L_{p_0}(\Omega_R)}$. Під $W_p^1(\Omega_R,\Gamma_{0,R})$ розумітимемо замикання $C^1(\overline{\Omega_R},\Gamma_{0,R}) := \{v \in C^1(\overline{\Omega_R})\,|\, v|_{\Gamma_{0,R}} = 0\}$ в $W_p^1(\Omega_R)$. Введемо в розгляд також простір $\mathbb{U}_R := \{w : (0,T) \to W_p^1(\Omega_R,\Gamma_{0,R})\,|\, w \in L_{p_0}(Q_R), w_{x_i} \in L_{p_i}(Q_R)$ $(i=\overline{1,n})\} \cap C([0,T];H^b(\Omega_R))$ з нормою

$\|w\|_{\mathbb{U}_R} := \sum_{i=1}^{n} \|w_{x_i}\|_{L_{p_i}(Q_R)} + \|w\|_{L_{p_0}(Q_R)} + \max_{t\in[0,T]} \|b^{1/2}(\cdot)w(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega_R)}$.

Для кожного $l \in \mathbb{N}$ розглянемо задачу: знайти функцію $u_l \in \mathbb{U}_l$, яка задовольняє початкову умову

$$u_l(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega_{0,l} := \Omega_0 \cap \Omega_l, \quad (21)$$

та інтегральну рівність

$$\iint\limits_{Q_l} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u_l,\nabla u_l)\psi_{x_i}\varphi + +a_0(x,t,u_l,\nabla u_l)\psi\varphi - b(x)u_l\psi\varphi' \Big\}\, dxdt = = \iint\limits_{Q_l} f\psi\varphi\, dxdt \quad (22)$$

для будь-яких $\psi \in W_p^1(\Omega_l, \Gamma_{0,l})$, $\varphi \in C_0^1(0,T)$.

Доведення існування розв'язку $u_l \in \mathbb{U}_l$ цієї задачі проводимо методом Гальоркіна з використанням методу параболічної регуляризації. Єдиність функції u_l випливає з умови $(\mathcal{A}_3)$. Продовжимо функцію u_l нулем на Q, залишивши за цим продовженням позначення u_l. Очевидно, що $u_l \in \mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}$ $(l \in \mathbb{N})$. Покажемо, що послідовність $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ містить підпослідовність, яка збігається в певному сенсі до узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

Третій етап (збіжність послідовності наближень розв'язку). Нехай l і m – довільні натуральні числа, причому $1 < l < m$, R_0, R – будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R \le l-1$, $R \ge 1$. Тоді з леми 2 отримуємо

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} b(x)|u_l(x,t) - u_m(x,t)|^2\, dx + + \iint\limits_{Q_{R_0}} |u_l(x,t) - u_m(x,t)|^q\, dxdt \le \le C_2\Big(R/(R-R_0)\Big)^s R^{\alpha-\theta}. \quad (23)$$

Нехай $\varepsilon > 0$ – яке-небудь число. Зафіксуємо довільно вибране значення $R_0 > 0$ і виберемо $R > \max\{1; R_0\}$ настільки великим, щоби права частина нерівності (23) була меншою за ε. Це можна зробити, оскільки $\alpha - \theta < 0$. Тоді для будь-яких $l \ge R+1$ і $m > l$ ліва частина нерівності (23) менша за ε. Це означає, що послідовності $\{u_l\big|_{Q_{R_0}}\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b^{1/2}u_l\big|_{Q_{R_0}}\}_{l=1}^{\infty}$ є фундаментальними відповідно в $L_q(Q_{R_0})$ і $C([0,T]; L_2(\Omega_{R_0}))$. Оскільки $R_0 > 0$ – довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in L_{q,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такої, що $b^{1/2}u \in C([0,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$ і

$$u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в} \quad L_{q,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad (24)$$

$$b^{1/2}u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} b^{1/2}u \quad \text{в} \quad C([0,T]; L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})). \quad (25)$$

З (21) і (25) випливає, що $u \in C([0,T]; H^b_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$ і виконується умова (3). Далі покажемо, що $u \in W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q}, \Sigma_0)$ і для u правильна тотожність (4). Для цього спочатку встановимо обмеженість послідовностей $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\{u_{l,x_i}\}_{l=1}^{\infty}$ $(i = \overline{1,n})$, $\{a_j(u_l)\}_{l=1}^{\infty}$ $(j = \overline{0,n})$, відповідно, в $L_{p_0,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $L_{p_i,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i = \overline{1,n})$, $L_{p_j',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(j = \overline{0,n})$. Справді, нехай R_0 – будь-яке дійсне число, а $R := R_0 + 1$. На підставі наслідку з леми 2 для довільного натурального числа $l > R+1$ отримаємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u_{l,x_i}(x,t)|^{p_i} + |u_l(x,t)|^{p_0} \Big] dxdt \le \le C_4(R_0), \quad (26)$$

де $C_4(R_0) > 0$ – стала, яка від l не залежить.

Згідно з умовою $(\mathcal{A}_2)$ та оцінкою (26) для кожного $j \in \{0,1,\ldots,n\}$ маємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} |a_j(u_l)|^{p_j'}\, dxdt \le \le C_5 \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u_{l,x_i}(x,t)|^{p_i} + |u_l(x,t)|^{p_0}\Big]\, dxdt + +C_6 \iint\limits_{Q_{R_0}} |h_{2,j}(x,t)|^{p_j'}\, dxdt < C_7(R_0), \quad (27)$$

де C_5, C_6, C_7 – додатні сталі, які від l не залежать.

З (24), (26), (27), використовуючи рефлексивність просторів $L_{p_j'}(Q_{R_0})$ $(j=\overline{0,n})$ для довільного $R_0>0$, отримаємо існування підпослідовності послідовності $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ (за якою залишимо те саме позначення) та функцій $\chi_j\in L_{p_j',\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(j=\overline{0,n})$ таких, що

$$u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабко в} \quad L_{p_0,\mathrm{loc}}(\overline{Q}),$$

$$u_{l,x_i} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u_{x_i} \quad \text{слабко в} \quad L_{p_i,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \ (i=\overline{1,n}), \tag{28}$$

$$a_j(u_l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \chi_j \ \text{слабко в} \quad L_{p_j',\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \ (j=\overline{0,n}). \tag{29}$$

На підставі (29) можемо зробити висновок про те, що $u\in W^{1,0}_{p,\mathrm{loc}}(\overline{Q},\Sigma_0)$.

За означенням функції u_l $(l\in\mathbb{N})$ для довільних $\psi\in W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega,\Gamma_0)$, $\operatorname{supp}\psi\subset\overline{\Omega}_l$, $\varphi\in C_0^1(0,T)$ маємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n a_i(u_l)\psi_{x_i}\varphi + \big(a_0(u_l)-f\big)\psi\varphi- -bu_l\psi\varphi'\Big]\,dxdt=0. \tag{30}$$

З (30) на підставі (25), (29) отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n \chi_i\psi_{x_i}\varphi+\big(\chi_0-f\big)\psi\varphi-bu\psi\varphi'\Big]\,dxdt=0 \tag{31}$$

для довільних $\psi\in W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega,\Gamma_0)$, $\varphi\in C_0^1(0,T)$.

Залишилося довести, що

$$\chi_i=a_i(u) \quad (j=\overline{0,n}). \tag{32}$$

Справді, якщо співвідношення (32) є правильними, то з (31) безпосередньо випливає правильність тотожності (4). Враховуючи це і те, що u належить $\mathbb{U}^b_{p,\mathrm{loc}}$ (як встановлено вище), приходимо до висновку, що u є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3).

Четвертий етап (правильність рівностей (32)). Використаємо метод монотонності [10]. Нехай $v\in L_{p_0,loc}(\overline{Q})$ – довільна функція така, що $v_{x_i}\in L_{p_i,loc}(\overline{Q})$ $(i=\overline{1,n})$, а $w\in C^1(\overline{\Omega})$, $w\geq 0$, $\operatorname{supp}w$ – компакт, і $\chi\in C_0^1(0,T), \chi\geq 0$.

На підставі умови $\mathcal{A}_3$ для всіх $l\in\mathbb{N}$ отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n (a_i(u_l)-a_i(v))(u_{l,x_i}-v_{x_i})+ +(a_0(u_l)-a_0(v))(u_l-v)\Big]w\chi\,dxdt\geq 0. \tag{33}$$

Звідси маємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n a_i(u_l)u_{l,x_i}+a_0(u_l)u_l\Big]w\chi\,dxdt- -\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n \Big(a_i(u_l)v_{x_i}+a_i(v)(u_{l,x_i}-v_{x_i})\Big)+ +a_0(u_l)v+a_0(v)(u_l-v)\Big]w\chi\,dxdt\geq 0 \tag{34}$$

для всіх $l\in\mathbb{N}$.

Нехай m таке, що $\operatorname{supp}w\subset\Omega_m$. На підставі леми 1 з тотожності (30) при $l>m$ отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n a_i(u_l)u_{l,x_i}+a_0(u_l)u_l\Big]w\chi\,dxdt= =\frac12\iint\limits_Q b|u_l|^2w\chi'\,dxdt- -\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n a_i(u_l)\,u_l\,w_{x_i}-f\,u_l\,w\Big]\chi\,dxdt. \tag{35}$$

З (34) та (35) одержимо

$$\frac12\iint\limits_Q b|u_l|^2w\chi'\,dxdt- -\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n a_i(u_l)\,u_l\,w_{x_i}-f\,u_l\,w\Big]\chi\,dxdt- -\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n \Big(a_i(u_l)v_{x_i}+a_i(v)(u_{l,x_i}-v_{x_i})\Big)+ +a_0(u_l)v+a_0(v)(u_l-v)\Big]w\chi\,dxdt\geq 0. \tag{36}$$

Перейдемо в (36) до границі при $l\to\infty$. На підставі (24), (25), (28), (29) і того, що $L_q(\Omega')\subset L_2(\Omega')\subset L_{p_i}(\Omega')$ для будь-яких $i\in\{1,\ldots,k\}$ та довільної $\Omega'\in Bd(\Omega)$, отримаємо

$$\frac12\iint\limits_Q b|u|^2w\chi'\,dxdt-$$

$$-\iint_Q \Big[\sum_{i=1}^n \chi_i\, u\, w_{x_i} - f\, u\, w\Big]\chi\, dxdt-$$
$$-\iint_Q \Big[\sum_{i=1}^n \Big(\chi_i v_{x_i} + a_i(v)(u_{x_i} - v_{x_i})\Big)+$$
$$+\chi_0 v + a_0(v)(u-v)\Big] w\chi\, dxdt \ge 0. \qquad (37)$$

З (31) на підставі леми 1 одержуємо

$$\iint_Q \Big[\sum_{i=1}^n \chi_i\, u_{x_i} + \chi_0\, u\Big]\, w\chi\, dxdt =$$
$$= \frac{1}{2}\iint_Q b|u|^2 w\chi'\, dxdt-$$
$$-\iint_Q \Big[\sum_{i=1}^n \chi_i\, u\, w_{x_i} - f\, u\, w\Big]\chi\, dxdt. \qquad (38)$$

З (37) та (38) отримаємо

$$\iint_Q \Big[\sum_{i=1}^n \chi_i\, u_{x_i} + \chi_0\, u\Big] w\chi\, dxdt-$$
$$-\iint_Q \Big[\sum_{i=1}^n \big(\chi_i v_{x_i} + a_i(v)(u_{x_i} - v_{x_i})\big)+$$
$$+\chi_0 v + a_0(v)(u-v)\Big] w\chi\, dxdt \ge 0,$$

тобто

$$\iint_Q \Big[\sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(v))(u_{x_i} - v_{x_i})+$$
$$+(\chi_0 - a_0(v))(u-v)\Big]\, w\chi\, dxdt \ge 0. \qquad (39)$$

Візьмемо в (39) $v = u - \lambda g$, де $\lambda > 0$ – довільне число, $g \in L_{p_0,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ – будь-яка функція така, що $g_{x_i} \in L_{p_i,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i = \overline{1,n})$. У підсумку після ділення на λ і врахування довільності функції g одержуємо

$$\iint_Q \Big[\sum_{i=1}^n \big(\chi_i - a_i(u-\lambda g)\big) g_{x_i}+$$
$$+(\chi_0 - a_0(u-\lambda g))g\Big]\, w\chi\, dxdt = 0. \qquad (40)$$

В цій рівності спрямуємо λ до 0

$$\iint_Q \Big[\sum_{i=1}^n \big(a_i(u) - \chi_i\big) g_{x_i}+$$
$$+(a_0(u) - \chi_0)g\Big]\, w\chi\, dxdt = 0. \qquad (41)$$

Тепер приймемо в (41) спочатку $g(x,t) = 1$, $(x,t) \in Q$,, а потім $g(x,t) = x_i$, $(x,t) \in Q$, для кожного $i \in \{1,\dots,n\}$. Внаслідок отримаємо

$$\iint_Q \big(a_0(u) - \chi_0\big) w\chi\, dxdt = 0,$$
$$\iint_Q \big(a_i(u) - \chi_i\big) w\chi\, dxdt = 0,\ i = \overline{1,n}. \qquad (42)$$

Оскільки рівності (42) виконуються для довільних неперервно-диференційовних невід'ємних фінітних функцій w, χ, то правильними є рівності (32). $\square$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Brézis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity // Appl. Math. Optim. – 1984. – **12**, N3. – P. 271-282.

2. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Rational Mech. Anal. – 1989. – **106**, N3. – P. 217-241.

3. *Gladkov A., Guedda M.* Diffusion-absorption equation without growth restridtions on the data at infinity // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – **269**, N1. – P. 16-37.

4. *Бокало М.М., Паучок І.Б.* Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності // Мат. студії. – 2006. – **24**, N1. – С. 25-48.

5. *Bokalo M., Domanska O.* On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces // Math. studii. – 2007. – **28**, N1. – P. 77-91.

6. *Медвідь І.* Задачі для нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь в анізотропних просторах // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – **64**. – С. 149-166.

7. *Бугрій О.М.* Задача з початковою умовою для нелінійної параболічної варіаційної нерівності в необмеженій за просторовими змінними області // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – **67**. – С. 30-52.

8. *Kuttler K.L., Jr.* The Galerkin method and degenerate evolution equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1985. – **107**. – P. 396-413.

9. *Showalter R.E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. – Mathematical surveys and monographs, 49. – Amer. Math. Soc., Providence, 1997.

10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., 1972.