УДК 517.956

©2016 р. А.О. Широковських

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ ДРОБОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного псевдодиференціального рівняння з аналітичним символом та початковою умовою у просторі узагальнених фкнкцій типу ультрарозподілів

We prove the well posedness of a nonlocal multipoint with respect to time problem for an evolution pseudo-differential equation with an analytic symbol and the initial condition in the space of generalized functions of ultra-sharing type.

1. Теорія нелокальних крайових задач, як розділ загальної теорії крайових задач для рівнянь з частинними похідними, інтенсивно розвивається впродовж кількох останніх десятиліть. Нелокальними крайовими задачами прийнято називати задачі, в яких замість задання значень розв'язку або його похідних на фіксованій частині межі задається зв'язок цих значень із значеннями тих самих функцій на інших внутрішніх або межових многовидах. Дослідження таких задач зумовлене багатьма застосуваннями в механіці, фізиці, хімії, біології, екології та інших природничо-наукових дисциплінах, які виникають при математичному моделюванні тих чи інших процесів. На доцільність використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач вперше вказав О.О. Дезін [1], який досліджував розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Він показав, що для постановки коректної крайової задачі поруч з локальними умовами необхідно використовувати і нелокальні умови. Напрям дослідження, який розпочав О.О. Дезін, розвивався також у працях В.К. Романка, М.Ю. Юнусова, А.Х. Мамяна, О.А. Макарова та інших математиків.

Нелокальні крайові задачі у різних аспектах вивчало багато математиків, використовуючи при цьому різноманітні методи й підходи (А.М. Нахушев, В.М. Борок, О.А. Самарський, Б.Й Пташник, В.С. Ільків, В.І. Чесалін, О.І. Скубачевський, М.І. Матійчук та ін. [2-8]). Одержані важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, досліджені питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовані умоаи регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь. До таких задач відноситься і нелокальна багатоточкова за часом задача, яка є узагальненням задачі Коші, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0}=f$ замінюється умовою

$$\sum_{k=0}^{m}\alpha_k u(t,\cdot)|_{t=t_k}=f,\ \ t_0=0,\{t_1,...,t_m\}\subset(0,T],$$

де $\{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_m\}\subset\mathbb{R},\ m\in\mathbb{N}$ - фіксовані числа (якщо $\alpha_0=1,\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_m=0$, то маемо, очевидно, задачу Коші), при цьому вказана умова трактується в класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f - узагальнена функція типу ультрарозподілів (така постановка задачі є природною, оскільки f може мати особливості в одній або декількох точках і може допускати регуляризацію в тому чи іншому просторі узальнених функцій).

У цій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційного рівняння з оператором Бесселя дробового диференціювання, який відноситься до псевдодиференціальних операторів, побудованих за символами, які допускають аналітичне продовження в певну область комплексної площини. Встановлена структура та властивості фундаментального розв'язку, коректна розв'язність задачі у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу ультрарозподілів, описано простір X основних нескінченно диференційовних функцій, елементом якого є розв'язок $u(t,\cdot)$ багатоточкової задачі при кожному $t \in (0,T]$, при цьому відповідну умову, яка задає багатоточкову задачу, $u(t,\cdot)$ задовольняє в просторі X', топологічно спряженому з постором основних функцій X.

2. Простори основних та узагальнених функцій.

І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов ввели в [9] серію просторів, названих ними просторами типу S. Вони складаються з нескінченно диференційовних функцій, визначених на $\mathbb{R}$, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності і зростання похідних. Ці умови задаються за допомогою нерівностей

$$|x^k\varphi^{(m)}(x)| \leq c_{km}, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

де c_{km} - деяка подвійна послідовність додатних чисел. Якщо на елементи послідовності $\{c_{km}\}$ не накладаються жодні обмеження (тобто c_{km} можуть змінюватись довільним чином разом з функцією φ), то маємо, очевидно простір S Л. Шварца швидко спадних на нескінченності функцій. Якщо ж числа c_{km} задовольняють певні умови, то відповідні конкретні простори містяться в S і називаються просторами типу S. Означимо деякі з них.

Для довільних $\alpha,\beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S | \exists c > 0\, \exists A > 0\, \exists B > 0$$
$$\forall \{m,n\} \subset \mathbb{Z}_+ \;\; \forall x \in \mathbb{R}:$$
$$\{|x^m\varphi^{(n)}(x)| \leq cA^m B^n m^{m\alpha} n^{n\beta}\}.$$

Введені простори типу S можна охарактеризувати щей так [9].

S_α^β складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq cB^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними символами c, B і a, залежними лише від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1-\beta$, то S_α^β складається з тих і тільки тих функцій φ, які аналітично продовжуються в $\mathbb{C}$ і для яких

$$|\varphi(x+iy)| \leq c\exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\},$$
$$c > 0, \;\; a > 0, \;\; b > 0.$$

Простір S_α^1 складаються з функцій φ, які аналітично продовжуються в деяку смугу $|y| < \delta$ (залежну від φ), при цьому справджується оцінка

$$|\varphi(x+iy)| \leq c\exp\{-a|x|^{1/\alpha}\},$$
$$c > 0, \;\; a > 0, \;\; \delta > 0, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Топологічна структура в просторах S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову:

$$\forall \bar{A} > A \forall \bar{B} > B : |x^k\varphi^{(m)}(x)| \leq c\bar{A}^k\bar{B}^m k^{k\alpha} m^{m\beta},$$
$$\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний злічено нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$||\varphi||_{\delta\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{|x^k\varphi^{(m)}(x)|}{(A+\delta)^k(B+\rho)^m k^{k\alpha} m^{m\beta}},$$
$$\{\delta,\rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}.$$

Вказану систему норм іноді замінюють еквівалентною їй системою норм

$$||\varphi||'_{\delta\rho} = \sup_{x,m} \frac{\exp\{a(1-\delta)|x|^{1/\alpha}\} \cdot |\varphi^{(m)}(x)|}{(B+\rho)^m m^{m\beta}},$$
$$\{\delta,\rho\} \subset \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}, \;\; a = \frac{\alpha}{eA^{1/\alpha}}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$.

У просторах S_α^β визначена і є неперервною операція зсуву аргументу $T_x : \varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)$. Ця операція є також диференційовною (навіть нескінченно диференційовною [9]) у тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \to \varphi'(x), \ \ h \to 0,$$

справджується для кожної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ в сенсі збіжності за топологією простору S_α^β. У S_α^β визначена і неперервна операція диференціювання. Простори типу S є досконалими [9] (тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні), вони тісно пов'язані між собою перетворенням Фур'є, а саме, правильною є формула: $F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha$, $\alpha, \beta > 0$, де

$$F[S_\alpha^\beta] := \{\psi : \psi(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \ \ \varphi \in S_\alpha^\beta\}.$$

Символом $(S_\alpha^\beta)'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на S_α^β зі слабкою збіжністю. Оскільки в основному просторі S_α^β визначена операція зсуву, аргументу T_x, то згортку узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ з основною функцією φ задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) =< f, T_{-x}\check{\varphi}(\cdot) >\equiv< f, \varphi(x - \cdot) >,$$

$$\check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi).$$

Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргументу в просторі S_α^β випливає, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Оскільки $F^{-1}[S_\beta^\alpha] = S_\alpha^\beta$, а також $F[S_\beta^\alpha] = S_\alpha^\beta$, бо кожний простір типу S разом з функцією $\varphi(x)$ містить і функцію $\varphi(-x)$, то перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ означимо за допомогою співвідношення $< F[f], \varphi >=< f, F[\varphi] >$, $\varphi \in S_\beta^\alpha$.

Нехай $f \in (S_\alpha^\beta)'$. Якщо $f*\varphi \in S_\alpha^\beta, \forall \varphi \in S_\alpha^\beta$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору S_α^β випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору S_α^β, то функціонал f називається згортувачем у просторі S_α^β. Якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$ - згортувач у просторі S_α^β, то для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ правильною є формула $F[f*\varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$.

3. Коректна розв'язність багатоточкової задачі. Розглянемо функцію $a_\omega(\xi) := (1 + \xi^2)^{\omega/2}$, $\omega \geq 1$, $\omega \neq 2, 4, 6, ...$, $\xi \in \mathbb{R}$. За допомогою безпосередніх обчислень знаходими, що для $|\xi| \geq 1$ справджуються нерівності

$$|D_\xi^m a_\omega(\xi)| \leq c B_0^m m! |\xi|^\omega,$$

$$m \in \mathbb{Z}_+, \ \ B_0 = B_0(\omega) > 0.$$

Оскільки $|\xi|^\omega \leq \frac{1}{\varepsilon} \exp\{\varepsilon|\xi|^\omega\}$ для довільного $\varepsilon > 0$, то

$$|D_\xi^m a_\omega(\xi)| \leq c_\varepsilon B^m m^m \exp\{\varepsilon |\xi|^\omega\}, \qquad (1)$$

$$c_\varepsilon = \frac{c}{\varepsilon}, \ \ B = B(\omega), \ \ \xi \in \mathbb{R}, \ \ m \in \mathbb{Z}_+.$$

З (1) випливає, що a_ω - мультиплікатор у просторі $S_{1/\omega}^1$. Справді, нехай $\varphi \in S_{1/\omega}^1$, тобто функція φ та її похідні задовольняють нерівності

$$|D_\xi^k a_\omega(\xi)| \leq c A^k k^k \exp\{-a|\xi|^\omega\}, \qquad (2)$$

$$k \in \mathbb{Z}_+, \ \ \xi \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c, A, a. Тоді, скориставшись формулою Лейбніца диференціювання добутку двох функцій, а також нерівностями (1), (2) знайдемо, що

$$|(a_\omega(\xi) \cdot \varphi(\xi))^{(k)}| = \left| \sum_{l=0}^k C_k^l a_\omega^{(l)}(\xi) \varphi^{(k-l)}(\xi) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{l=0}^k C_k^l |a_\omega^{(l)}(\xi)| \cdot |\varphi^{(k-l)}(\xi)| \leq$$

$$\leq c c_\varepsilon \sum_{l=0}^k C_k^l B^l l^l A^{k-l} (k-l)^{(k-l)} \times$$

$$\times \exp\{-(a - \varepsilon)|\xi|^\omega\}.$$

Оскільки в (1) $\varepsilon > 0$ - довільно фіксований параметр, то покладемо $\varepsilon = a/2$. Тоді

$$|(a_\omega(\xi) \cdot \varphi(\xi))^{(k)}| \leq \tilde{c} \tilde{B}^k k^k \exp\{-\tilde{a}|\xi|^\omega\}, k \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\tilde{c} = c c_\varepsilon$, $\tilde{B} = 2\max\{A, B\}$, $\tilde{a} = a/2$. Отже, $a_\omega \cdot \varphi \in S_{1/\omega}^1$.

Операція множення на функцію a_ω є неперервною в $S^1_{1/\omega}$. Справді, нехай $\{\varphi_n, n \geq 1\}$ - послідовність функцій з простору $S^1_{1/\omega}$, яка збігається в цьому просторі до нуля. Це означає, що $\{\varphi_n, n \geq 1\} \subset S^{1,B_0}_{1/\omega,A_0}$ з деякими $A_0, B_0 > 0$ і

$$||\varphi_n||_{\delta,\rho} = \sup_{k,\xi} \frac{\exp\{a(1-\delta)|\xi|^\omega\} \cdot |\varphi_n^{(k)}(\xi)|}{(B_0+\rho)^k k^k} \to 0,$$

$$n \to \infty, \ \ \{\delta, \rho\} \subset \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\}, \ \ a = \frac{1}{\omega e A_0^\omega}.$$

Іншими словами, для кожного $\tilde{\varepsilon} > 0$ існує номер $n_0 = n_0(\tilde{\varepsilon})$ такий, що для $n \geq n_0$

$$|\varphi_n^{(k)}(\xi)| \leq \tilde{\varepsilon}(B_0+\rho)^k k^k \exp\{-a(1-\delta)|\xi|^\omega\}.$$

Аналогічно тому, як це було зроблено раніше знаходимо, що

$$|(a_\omega(\xi)\varphi_n(\xi))^{(k)}| <$$

$$< \tilde{\varepsilon}(\tilde{B}+\rho)^k k^k \exp\{-\tilde{a}(1-\delta)|\xi|^\omega\},$$

де $\tilde{B} = 2\max\{B, B_0+1/2\}$, $\tilde{a} = a/2$. Це означає, що

$$\sup_{\xi,k} \frac{\exp\{\tilde{a}(1-\delta)|\xi|^\omega\} \cdot |(a_\omega(\xi)\varphi_n(\xi))^{(k)}|}{(\tilde{B}+\rho)^k k^k} \to 0,$$

$$n \to \infty.$$

Отже, послідовність $\{a_\omega \cdot \varphi_n, n \geq 1\}$ збігається до нуля у просторі $S^{1,\tilde{B}}_{1/\omega,\tilde{A}}$, $\tilde{A} = 2^{-1/\omega}A_0$, тобто в просторі $S^1_{1/\omega}$, що й потрібно було довести.

Із властивостей функції a_ω випливає, що в просторі $S_1^{1/\omega}$ визначений, є лінійним і неперервним оператор A_ω, який розуміємо як псевдодиференціальний оператор, побудований за символом a_ω, тобто

$$A_\omega \varphi = F^{-1}[a_\omega(\xi)F[\varphi]], \ \ \forall \varphi \in S_1^{1/\omega},$$

де F, F^{-1} - пряме та обернене перетворення Фур'є.

Відомо [10], що оператор A_ω є конструктивною реалізацією оператора $(I-\Delta)^{\omega/2}$, $\Delta = d^2/dx^2, \omega \neq 2, 4, 6, ...$: $(I-\Delta)^{\omega/2}\varphi = A_\omega\varphi$, $\forall \varphi \in S$. Слідуючи [10], A_ω надалі називатимемо оператором Бесселя дробового диференціювання.

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + A_\omega u(t,x) = 0, \tag{3}$$

$$(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R},$$

поставимо нелокальну багатоточкову (m-точкову) за часом задачу: знайти розв'язок $u \in C^1((0,T], S_1^{1/\omega})$ рівняння (3), який задовольняє умову:

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - ... -$$

$$-\mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = \varphi, \tag{4}$$

де $\varphi \in S_1^{1/\omega}$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, ..., \mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\{t_1, ..., t_m\} \subset (0,T]$ - фіксовані числа, $\mu > m\sum\limits_{k=1}^m \mu_k$, $0 < t_1 < ... < t_m \leq T$.

Скориставшись методом перетворення Фур'є знайдемо що розв'язок задачі (3), (4) має вигляд:

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} G(t, x-\xi)\varphi(\xi)d\xi = G(t,x) * \varphi(x),$$

$$(t,x) \in \Omega,$$

де $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)](x)$,

$$Q(t,\xi) = \exp\{-ta_\omega(\xi)\} \times$$

$$\times \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k a_\omega(\xi)\}\right)^{-1}.$$

Введемо позначення:

$$Q_1(t,\xi) = \exp\{-ta_\omega(\xi)\},$$

$$Q_2(\xi) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{-t_k a_\omega(\xi)\}\right)^{-1}.$$

Тоді $Q(t,\xi) = Q_1(t,x)Q_2(\xi)$.

Лема 1. *1.* $Q_1(t,\cdot) \in S^1_{1/\omega}$ *при кожному* $t \in (0,T]$. *Для похідних функцій* $Q_1(t,\xi)$ *правильними є оцінки:*

$$|D_\xi^s Q_1(t,\xi)| \leq A^s s^s \exp\{-c_0 t|\xi|^\omega\},$$

$$s \in \mathbb{N}, \ \ (t,\xi) \in \Omega,$$

де сталі $A, c_0 > 0$ *не залежать від* t.

2. Функція

$$Q_2(\xi)=\left(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_k a_\omega(\xi)\}\right)^{-1}\equiv$$

$$\equiv\left(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\xi)\right)^{-1}$$

є мультиплікатором у просторі $S^1_{1/\omega}$.

Доведення. 1. Для доведення твердження скористаємося формулою Фаа де Бруно диференціювання складеної функції

$$D^s_\xi F(g(\xi))=\sum_{m=1}^{s}\frac{d^m}{dg^m}F(g)\sum\frac{s!}{m_1!...m_l!}\times$$

$$\times\left(\frac{d}{d\xi}g(\xi)\right)^{m_1}...\left(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l}g(\xi)\right)^{m_l}$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах ріняння $s=m_1+2m_2+...+lm_l$, $m=m_1+...+m_l$), де покладемо $F=e^g$, $g=-ta_\omega(\xi)$. Тоді

$$D^s_\xi e^{-ta_\omega(\xi)}=e^{-ta_\omega(\xi)}\sum_{m=1}^{s}\sum\frac{s!}{m_1!...m_l!}\bigwedge,$$

де символом $\bigwedge$ тут позначено вираз

$$\bigwedge:=\left(\frac{d}{d\xi}(-ta_\omega(\xi))\right)^{m_1}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\xi^2}(-ta_\omega(\xi))\right)^{m_2}...\left(\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l}(-ta_\omega(\xi))\right)^{m_l}.$$

Урахувавши оцінки (1) знайдемо, що

$$|\bigwedge|\le\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{m_1+...+m_l}t^{m_1+...+m_l}B^{m_1+2m_2+...+lm_l}\times$$

$$\times\exp\{\varepsilon(m_1+...+lm_l)|\xi|^\omega\}=$$

$$=\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^{m}t^m B^s\exp\{\varepsilon s|\xi|^\omega\}.$$

Оскільки $t\in(0,T]$ та $s\in\mathbb{N}$ - фіксовані параметри, а $\varepsilon>0$ - довільне, то покладемо $\varepsilon=t/(2s)$. Тоді

$$|D^s_\xi Q_1(t,\xi)|\le A^s s^s\exp\{-c_0 t|\xi|^\omega\},\qquad(5)$$

$$s\in\mathbb{N},\ \ (t,\xi)\in\Omega,$$

$$c_0=1/2,\ \ A=4B\cdot\max\{1,c\}$$

з (5) та нерівності $|Q_1(t,\xi)|\le\exp\{-t|\xi|^\omega\}$ випливає твердження 1 леми.

2. Оскільки

$$\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_k a_\omega(\xi)\}=$$

$$=\mu\left(1-\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_k a_\omega(\xi)\}\right),$$

причому

$$\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\{-t_k a_\omega(\xi)\}\le\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\mu_k<1,$$

то, скориставшишь поліноміальною формулою знайдемо, що

$$Q_2(\xi)=\frac{1}{\mu}\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-r}\left(\sum_{k=1}^{m}\mu_k e^{-t_k a_\omega(\xi)}\right)^r=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\Big(\sum_{r_1+...+r_m=r}\frac{r!}{r_1!...r_m!}\times$$

$$\times(\mu_1 e^{-t_1 a_\omega(\xi)})^{r_1}...(\mu_m e^{-t_m a_\omega(\xi)})^{r_m}\Big)=$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\sum_{r_1+...+r_m=r}\frac{r!}{r_1!...r_m!}\times$$

$$\times\mu_1^{r_1}...\mu_m^{r_m}Q_1(\lambda,\xi),\qquad(6)$$

де $\lambda:=t_1r_1+...+t_mr_m$, $Q_1(\lambda,\xi)=e^{-\lambda a_\omega(\xi)}$. З (5) та (6) випливають нерівності

$$|D^s_\xi Q_2(\xi)|\le A^s s^s\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{-(r+1)}\times$$

$$\times\sum_{r_1+...+r_m=r}\frac{r!}{r_1!...r_m!}\mu_0^r e^{-\lambda c_0|\xi|^\omega}\le$$

$$\le\mu^{-1}A^s s^s\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^r\sum_{r_1+...+r_m=r}\frac{r!}{r_1!...r_m!},$$

$s\in\mathbb{N}$, $\mu_0=\max\{\mu_1,...,\mu_m\}$. Далі скористаємося тим, що

$$\sum_{r_1+...+r_m=r}\frac{r!}{r_1!...r_m!}=m^r.$$

Тоді

$$|D^s_\xi Q_2(\xi)|\le\mu^{-1}A^s s^s\sum_{r=0}^{\infty}\tilde{\mu}^r=cA^s s^s,$$

$$s \in \mathbb{N},\ \ \tilde{\mu} = \mu_0 \mu^{-1} m < 1,\ \ c = \mu^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \tilde{\mu}^r.$$

З останньої нерівності та обмеженості функції Q_2 випливає, що Q_2 є мультиплікатором у просторі $S^1_{1/\omega}$.

Лема доведена.

Наслідок 1. *При фіксованому* $t \in (0,T]$ *функція* $Q(t,\xi) = Q_1(t,\xi)Q_2(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$ *є елементом простору* $S^1_{1/\omega}$, *при цьому справджуються оцінки*

$$|D^s_\xi Q(t,\xi)| \leq c\tilde{B}^s s^s \exp\{-c_0 t|\xi|^\omega\}, \qquad (7)$$

$$s \in \mathbb{Z}_+,\ \ (t,\xi) \in \Omega,$$

де сталі $c, c_0, \tilde{B} > 0$ *не залежать від* t.

Урахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та співвідношення $F^{-1}[S^1_{1/\omega}] = S^{1/\omega}_1$ отримаємо, що $G(t,\cdot) \in S^{1/\omega}_1$ при кожному $t \in (0,T]$. Виділимо в оцінках функції G та її похідних (за змінною x) залежність від параметра $t \in (0,T]$. Для цього скористаємося співвідношенням

$$x^k D^s_x F[\varphi](x) = i^{k+s} F[(\sigma^s \varphi(\sigma))^{(k)}] =$$

$$= i^{k+s} \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s \varphi(\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma,$$

$$\{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+,\ \ \varphi \in S^1_{1/\omega}.$$

Отже,

$$x^k D^s_x G(t,x) = (2\pi)^{-1} i^{k+s} (-1)^s \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}} (\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)} e^{ix\sigma} d\sigma.$$

Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох фцнкцій та оцінки (7) знайдемо, що

$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| =$$

$$= \left| \sum_{p=0}^{k} C^p_k (\sigma^s)^{(p)} Q^{(k-p)}(t,-\sigma) \right| \leq$$

$$\leq |\sigma^s Q^{(k)}(t,-\sigma)| + ks|\sigma^{s-1} Q^{(k-1)}(t,-\sigma)| +$$

$$+ \frac{k(k-1)}{2!} s(s-1) |\sigma^{s-2} Q^{(k-2)}(t,-\sigma)| + \ldots \leq$$

$$\leq c\tilde{B}^k k^k s^{s/\omega} t^{-s/\omega} e^{-\frac{c_0}{2} t|\sigma|^\omega} \Big(1 + \frac{t^{1/\omega}}{B} ks \frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(\frac{t^{1/\omega}}{B}\right)^2 ks \frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} \times$$

$$\times (k-1)(s-1) \frac{m_{k-2,s-2}}{m_{k-1,s-1}} + \ldots \Big),$$

де $m_{ks} = k^k s^{s/\omega}$.

Безпосередньо переконуємося в тому, що для подвійної послідовності m_{ks} справджується нерівність

$$ks \frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} \leq \gamma(k+s),\ \ \gamma = 2^{1/\omega+1}.$$

Тоді

$$|(\sigma^s Q(t,-\sigma))^{(k)}| \leq c\tilde{B}^k k^k s^{s/\omega} t^{-s/\omega} e^{-\frac{c_0}{2} t|\sigma|^\omega} \times$$

$$\times \Big(1 + \frac{\gamma t^{1/\omega}}{\tilde{B}} (k+s) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\gamma t^{1/\omega}}{\tilde{B}}\right)^2 (k+s)^2 + \ldots \Big) \leq$$

$$\leq c\tilde{B}^k k^k s^{s/\omega} t^{-s/\omega} e^{\frac{\gamma t^{1/\omega}}{\tilde{B}}(k+s)} e^{-\frac{c_0}{2} t|\sigma|^\omega} \leq$$

$$\leq c B^k_1 A^s_1 t^{-s/\omega} k^k s^{s/\omega} e^{-\bar{c}_0 t|\sigma|^\omega},$$

$$A_1 = e^{\frac{\gamma T^{1/\omega}}{\tilde{B}}},\ \ B_1 = \tilde{B} e^{\frac{\gamma T^{1/\omega}}{\tilde{B}}},\ \ \bar{c}_0 = \frac{c_0}{2}.$$

Отже,

$$|x^k D^s_x G(t,x)| \leq c_1 B^k_1 A^s_1 t^{-(s+1)/\omega} k^k s^{s/\omega},$$

$$\{k,s\} \subset \mathbb{Z}_+,\ \ t \in (0,T],\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, для похідних функцій G (за змінною x) справджуються оцінки

$$|D^k_x G(t,x)| \leq c A^s_1 s^{s/\omega} t^{-(s+1)/\omega} \inf_k \frac{B^k_1 k^k}{|x|^k} \leq$$

$$\leq \tilde{c} A^s_1 s^{s/\omega} t^{-(s+1)/\omega} \exp\{-a_0|x|\},$$

$$(t,x) \in \Omega,\ \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

де сталі $\tilde{c}, A_1, a_0 > 0$ не залежать від t.

Лема 2. *Функція* $G(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями в просторі* $S^{1/\omega}_1$, *диференційовна по* t.

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (як прямого, так і оберненого) в просторах типу S випливає, що для доведення леми досить показати, що функція $F[G(t,x)] = Q(t,\sigma)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $F[S_1^{1/\omega}] = S^1_{1/\omega}$, диференційовна по t. Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t}[Q(t+\Delta t,\sigma) - Q(t,\sigma)] \to$$

$$\to \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma), \ \ \Delta t \to 0,$$

виконується в тому розумінні, що: 1) $D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} D^s_\sigma(-a_\omega(\sigma)Q(t,\sigma))$, $s \in \mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$; 2) $|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \bar{c}\bar{B}^s s^s \exp\{-\bar{a}|\sigma|^\omega\}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $\bar{c}, \bar{a}, \bar{B} > 0$ не залежить від Δt, якщо Δt досить мале.

Функція $Q(t,\sigma)$, $(t,\sigma) \in \Omega$, диференційовна по t у звичайному розумінні, тому, внаслідок теореми Лагранжа про скінченні прирости

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = -a_\omega(\sigma)Q(t+\theta\Delta t,\sigma),$$

$$0 < \theta < 1, \ \ t + \theta\Delta t \leq T.$$

Отже,

$$D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) = -\sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma a_\omega(\sigma) D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma)$$

і

$$D^s_\sigma\left(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\right) =$$

$$= -\sum_{l=0}^{s} C^l_s D^l_\sigma a_\omega(\sigma)[D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) -$$

$$-D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma)].$$

Оскільки

$$D^{s-l}_\sigma Q(t+\theta\Delta t,\sigma) - D^{s-l}_\sigma Q(t,\sigma) =$$

$$= D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t, \ \ 0 < \theta_1 < 1,$$

то звідси та з оцінок (7) випливає, що

$$D^{s-l+1}_\sigma Q(t+\theta_1\Delta t,\sigma)\theta\Delta t \to 0, \ \ \Delta t \to 0$$

рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тоді і $D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma) \to D^s_\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)\right)$ при $\Delta t \to 0$ рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Урахувавши оцінки, які задовольняють похідні функцій $a_\omega(\sigma)$, $Q(t,\sigma)$ знайдемо, що

$$|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq cc_\varepsilon \sum_{l=0}^{s} C^l_s B^l l^l \tilde{B}^{s-l}(s-l)^{s-l} \times$$

$$\times e^{-c_0(t+\theta\Delta t)|\sigma|^\omega} e^{\varepsilon|\sigma|^\omega}$$

(тут $\varepsilon > 0$ - довільно фіксований параметр). Покладемо $\varepsilon = c_0 t/2$. Тоді

$$|D^s_\sigma \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \bar{c}\bar{B}^s s^s \exp\{-\bar{a}|\sigma|^\omega\},$$

$\bar{c} = cc_\varepsilon$, $\bar{B} = 2\max\{B, \tilde{B}\}$, $\bar{a} = c_0 t/2$, причому всі сталі не залежать від Δt. Лема доведена.

Наслідок 2. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,\cdot)) = f * \frac{\partial G(t,\cdot)}{\partial t},$$

$$\forall f \in (S_1^{1/\omega})', \ \ t \in (0,T].$$

Доведення. За означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$(f * G)(t,x) = < f_\xi, T_{-x}\check{G}(t,\xi) >,$$

$$\check{G}(t,\xi) = G(t,-\xi).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G)(t,\cdot) =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[(f*G)(t+\Delta t,\cdot) - (f*G)(t,\cdot)] =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} < f_\xi, \frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)] > .$$

Внаслідок леми 2 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)] \underset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial t} T_{-x}\check{G}(t,\cdot)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $S_1^{1/\omega}$, тому

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G)(t,\cdot) =$$

$$= < f_\xi, \lim_{\Delta t \to 0}[T_{-x}\check{G}(t+\Delta t,\cdot) - T_{-x}\check{G}(t,\cdot)] >=$$

$$=< f_\xi, \frac{\partial}{\partial t} T_{-x}\check{G}(t,\cdot) >=< f_\xi, T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\check{G}(t,\cdot) >=$$

$$= (f * \frac{\partial G}{\partial t})(t,x).$$

Твердження доведено.

Лема 3. *У просторі $(S_1^{1/\omega})'$ справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} G(t,\cdot) = \delta \qquad (8)$$

(тут δ - дельта-функція Дірака).

Доведення. Скориставшишь властивістю неперервності перетворення Фур'є та функції $G(t,\cdot)$, як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $S_1^{1/\omega}$, співвідношення (8) замінимо еквівалентним граничним співвідношенням

$$\mu \lim_{t\to+0} F[G(t,\cdot)] - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} F[G(t,\cdot)] = F[\delta] \qquad (9)$$

у просторі $(S_1^{1/\omega})'$. Урахувавши зображення функції G, (9) подамо у вигляді

$$\mu \lim_{t\to+0} Q(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} Q(t,\cdot) = 1. \qquad (10)$$

Для доведення (10) візьмемо довільну функцію $\varphi \in S^1_{1/\omega}$ і, скориставшись теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега знайдемо, що

$$\mu \lim_{t\to+0} < Q(t,\cdot), \varphi > -$$

$$- \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} < Q(t,\cdot), \varphi >=$$

$$= \mu \lim_{t\to+0} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma -$$

$$- \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} \int_{\mathbb{R}} Q(t,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\mu Q(0,\sigma) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l Q(t_l,\sigma) \right] \varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big[\frac{\mu}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)} -$$

$$- \sum_{l=1}^{m} \mu_l \frac{Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)} \Big] \varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu - \sum\limits_{l=1}^{m} \mu_l Q_1(t_l,\sigma)}{\mu - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k,\sigma)} \varphi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(\sigma)d\sigma =< 1, \varphi > .$$

Звідси випливає, що співвідношення (10) виконується в просторі $(S^1_{1/\omega})'$, а, отже, правильним є співвідношення (8). Лема доведена.

Символом $(S_{1,*}^{1/\omega})'$ позначимо клас узагальнених функцій з $(S_1^{1/\omega})'$, які є згортувачами в просторі $S_1^{1/\omega}$.

Наслідок 3. *Нехай $u(t,x) = f * G(t,x)$, $f \in (S_{1,*}^{1/\omega})'$, $(t,x) \in \Omega$. Тоді в просторі $(S_1^{1/\omega})'$ справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f.$$

Функцію G надалі називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової (m-точкової) задачі для рівняння (3).

З наслідку 3 випливає, що для рівняння (3) m-точкову за часом задачу можна ставити так: знайти розв'язок $u \in C^1((0,T], S_1^{1/\omega})$ рівняння (3), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, \qquad (11)$$

$$f \in (S_{1,*}^{1/\omega})',$$

де граничне співвідношення (11) розглядається в просторі $(S_1^{1/\omega})'$ (обмеження на параметри $\mu, \mu_1, ..., \mu_m$, $t_1, ..., t_m$ такі ж, як у випадку задачі (3), (4)).

Основний результат містить наступне твердження.

Теорема. *Задача (3), (11) коректно розв'язна. Розв'язок зображається формулою:* $u(t,x) = f * G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *де* G *- фундаментальний розв'язок задачі (3), (11).*

Доведення. Передусім переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (3). Справді (див. наслідок 2),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f * G(t,x)) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t},$$

$$A_\omega u(t,x) = F^{-1}[a_\omega(\sigma)F[f * G(t,x)](\sigma)](x).$$

Оскільки f - згортувач у просторі $S_1^{1/\omega}$, то

$$F[f * G(t,x)](\sigma) = F[f](\sigma) \cdot F[G(t,x)](\sigma) =$$
$$= F[f]Q(t,\sigma).$$

Отже,

$$Au(t,x) = F^{-1}[a_\omega(\sigma)Q(t,\sigma)F[f](\sigma)](x) =$$
$$= -F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\sigma)F[f](\sigma)\right](x) =$$
$$= -F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t}G\right](t,\sigma) \cdot F[f](\sigma)\right](x) =$$
$$= -F^{-1}\left[F\left[f * \frac{\partial G}{\partial t}\right]\right](x) =$$
$$= -f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}.$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (3). З наслідку 3 випливає, що u задовольняє умову (11) у вказаному сенсі.

Залишається переконатися в тому, що задача (3), (11) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A^* v = 0, \tag{12}$$

$$(t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R} \equiv \Omega',$$
$$0 \le t < t_0 \le T,$$

$$v(t,\cdot)|_{t=t_0} = \psi, \ \ \psi \in (S_{1,*}^{1/\omega})', \tag{13}$$

де $A^* g = F[a_\omega F^{-1}[g]]$, $g \in S_1^{1/\omega}$, A^* - звуження спряженого оператора до оператора A на простір $S_1^{1/\omega} \subset (S_1^{1/\omega})'$. Умову (13) розуміємо в слабкому сенсі.

Із результатів, отриманих в [11] випливає, що задача Коші (12), (13) є розв'язною, при цьому $v(t,\cdot) \in S_1^{1/\omega}$ при кожному $t \in [0,t_0)$.

Нехай $Q_{t_0}^t : (S_{1,*}^{1/\omega})' \to S_1^{1/\omega}$ - оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in (S_{1,*}^{1/\omega})'$ розв'язок задачі (12), (13). Оператор $Q_{t_0}^t$ є лінійним і неперервним, він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$ і володіє властивостями:

$$\forall \psi \in (S_{1,*}^{1/\omega})' : \frac{dQ_{t_0}^t \psi}{dt} - A^* Q_{t_0}^t \psi = 0,$$

$$\lim_{t \to t_0} Q_{t_0}^t \psi = \psi$$

(границя розглядається в просторі $(S_1^{1/\omega})'$).

Розглянемо розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задачі (3), (11), який розумітимемо як регулярний функціонал з простору $(S_{1,*}^{1/\omega})' \supset S_1^{1/\omega}$. Доведемо, що задача (3), (11) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(S_{1,*}^{1/\omega})'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (1) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$ (при кожному $t \in (0,T]$). Застосуємо функціонал u до функції $Q_{t_0}^t \psi \in S_1^{1/\omega}$, де ψ - довільно фіксований елемент з простору $S_1^{1/\omega} \subset (S_{1,*}^{1/\omega})'$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (3), (12) знайдемо, що

$$\frac{\partial}{\partial t} < u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi >=$$
$$=< \frac{\partial u}{\partial t}, Q_{t_0}^t \psi > + < u, \frac{\partial Q_{t_0}^t \psi}{\partial t} >=$$
$$= - < Au, Q_{t_0}^t \psi > + < u, A^* Q_{t_0}^t \psi >=$$
$$= - < Au, Q_{t_0}^t \psi > + < Au, Q_{t_0}^t \psi >= 0,$$
$$t \in [0,t_0).$$

Звідси випливає, що $< u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi >$ є сталою величиною. Із властивостей абстрактних функцій випливає співвідношення

$$\lim_{t \to t_0} < u(t,\cdot), Q_{t_0}^t \psi >=$$
$$=< u(t_0,\cdot), \psi >= const \equiv c$$

у довільній точці $t_0 \in (0,T]$. Отже, якщо в (11) $f = 0$, то

$$\mu \lim_{t\to+0} < u(t,\cdot), \psi > -$$
$$- \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} < u(t,\cdot), \psi >=$$
$$= c\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k\right) = 0,$$

тобто $c = 0$. Таким чином, $< u(t_0,\cdot), \psi >= 0$ для довільного $\psi \in S_1^{1/\omega}$, тобто $u(t_0,)$ - нульовий функціонал з простору $(S_{1,*}^{1/\omega})'$. Оскільки $t_0 \in (0,T]$ і t_0 вибране довільним чином, то $u(t,) = 0$ для всіх $t \in (0,T]$. Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Дезин А.А.* Операторы с первой производной по "времени"и нелокальные граничные условия / А.А. Дезин // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – **Т. 31**, N1. – С. 61-86.

2. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. –М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

3. *Самарский А.А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений / А.А. Самарский // Дифференц. уравнения. – 1980. – **Т.16**, N11. – С. 1925-1935.

4. *Чесалин В.И.* Задача с нелокальными граничными условиями для дифференциально-операторных уравнений нечетного порядка / В.И. Чесалин // Дифференц. уравнения. – 1977. – **Т.13**, N3. – С. 468-476.

5. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б.И. Пташник. –К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

6. *Илькив В.С.* Многоточечная нелокальная задача для уравнений с частными производными / В.С. Илькив // Дифференц. уравнения. – 1987. – **Т.23**, N3. – С. 487-492.

7. *Борок В.М.* Нелокальные корректные краевые задачи в слое / В.М. Борок, Л.В. Фардигола // Матем. заметки. – 1990. – **Т.48**, N1. – С. 20-25.

8. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі / М.І. Матійчук. –К.: Інститут математики НАН України, 1999. – 176 с.

9. *Гельфанд И.М.* Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов.– М.:Физматгиз, 1958. – 307 с.

10. *Самко С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. –Минск.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

11. *Городецький В.В.* Про дробове диференціювання у просторах типу S' / В.В. Городецький, О.М. Ленюк // Доп. НАН України. – 1998. – N11. – С. 20-24.