УДК 517.988.6

©2016 р. **В.Ю. Слюсарчук**

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ У СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ

Отримано умови існування розв'язків нелінійного рівняння

$$\mathcal{F}x = y,$$

де $\mathcal{F} : X \to Y$ – неперервний оператор, X і Y – скінченновимірні банахові простори і $y \in Y$.

We obtain conditions for the existence of solutions of the nonlinear equation

$$\mathcal{F}x = y,$$

where $\mathcal{F} : X \to Y$ is a continuous map, X and Y are finite dimensional Banach spaces and $y \in Y$.

Стаття присвячена з'ясуванню умов існування розв'язків нелінійних рівнянь у просторах скінченної розмірності. В основі досліджень таких рівнянь лежить метод локальної лінійної апроксимації нелінійних відображень, що відповідають цим рівнянням.

1. Основні рівняння і задача. Нехай X і Y – скінченновимірні банахові простори, розмірності яких однакові. Розглянемо нелінійний оператор $\mathcal{F} : X \to Y$ і відповідне рівняння

$$\mathcal{F}x = y, \tag{1}$$

де y – заданий елемент простору Y, а x – елемент простору X, що задовольняє (1). Задачі про існування такого елемента буде приділена основна увага в статті.

Наведемо умови, коли рівняння (1) для кожного $y \in Y$ має хоча б один розв'язок $x \in X$, тобто щоб для множини $R(\mathcal{F})$ значень оператора $\mathcal{F}$ виконувалося співвідношення

$$R(\mathcal{F}) = Y. \tag{2}$$

Знаходження таких умов є складною задачею, оскільки оператор є нелінійним. Ми наведемо достатні умови виконання співвідношення (2), що для широкого класу операторів будуть і необхідними.

2. Умови розв'язності основної задачі. Нехай $L(X, Y)$ – банаховий простір лінійних неперервних операторів $A : X \to Y$ з нормою

$$\|A\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

Позначимо через $\mathcal{E}$ множину всіх операторів $\mathcal{A} \in L(X, Y)$, для кожного з яких існує обернений неперервний оператор $\mathcal{A}^{-1}$. Оскільки $\dim X = \dim Y < \infty$, то оператор $\mathcal{A}$ є елементом множини $\mathcal{E}$ тоді і тільки тоді, коли ядро $\ker \mathcal{A}$ цього оператора, тобто множина $\{x \in X : \mathcal{A}x = 0\}$, містить лише нульовий елемент простору X, або $R(\mathcal{A}) = Y$ [1].

Основним твердженням цього пункту є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай оператор $\mathcal{F} : X \to Y$ неперервний і для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, що виконується співвідношення*

$$\sup_{\|x\|_X \le r} \|\mathcal{F}x - \mathcal{A}x\|_Y \le \frac{r}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}} - H. \tag{3}$$

Тоді для кожного $y \in Y$ рівняння (1) має хоча б один розв'язок $x \in X$.

Доведення. Зафіксуємо довільний вектор $y \in Y$ і розглянемо таке число $H > 0$, щоб

$$\|y\|_Y \le H. \tag{4}$$

За теоремою існують число $r > 0$ і оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, для яких виконується співвідношення (3). Завдяки включенню $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ рівняння

(1) рівносильне рівнянню

$$x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x - \mathcal{F}x + y). \tag{5}$$

Покажемо, що це рівняння має розв'язок, який є елементом замкненої кулі

$$B_X[0,r] = \{x \in X : \|x\|_X \le r\}.$$

Використаємо оператор $\mathfrak{A} : X \to X$, що визначається формулою

$$\mathfrak{A}x = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x - \mathcal{F}x + y).$$

Цей оператор на підставі неперервності $\mathcal{A}^{-1}$, $\mathcal{A}$ і $\mathcal{F}$ є неперервним. Для нього також справджується співвідношення

$$\mathfrak{A}B_X[0,r] \subset B_X[0,r].$$

Дійсно, якщо $\|x\|_X \le r$, то завдяки (3) і (4)

$$\|\mathfrak{A}x\|_X = \|\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{A}x - \mathcal{F}x + y)\|_X \le$$
$$\le \|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)} (\|\mathcal{A}x - \mathcal{F}x\|_Y + \|y\|_Y) \le$$
$$\le \|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)} \left(\frac{r}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}} - H + \|y\|_Y \right) \le$$
$$\le r.$$

Оскільки також банахів простір X скінченновимірний, то за теоремою Боля–Брауера про нерухому точку [2] оператор $\mathfrak{A}$ має нерухому точку $x^* \in B_X[0,r]$. Ця точка є розв'язком рівняння (5).

Отже, рівняння (1) для кожного $y \in Y$ має хоча б один розв'язок $x \in X$.

Теорему 1 доведено.

Наслідок 1. *Нехай оператор $\mathcal{F} : X \to Y$ неперервний, $y \in Y$ і для деяких числа $r > 0$ і оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ виконується нерівність*

$$\sup_{\|x\|_X \le r} \|\mathcal{F}x - y - \mathcal{A}x\|_Y \le \frac{r}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}}.$$

Тоді рівняння (1) *має хоча б один розв'язок $x \in X$.*

Це твердження доводиться аналогічно, як і теорема 1.

Зауваження 1. У випадку виконання умов теореми 1 єдиність розв'язків рівняння (1) може порушуватися. Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад 1. Нехай $X = Y = \mathbb{R}$. Розглянемо неперервну функцію

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \le 0, \\ 0, & \text{якщо } x \in (0,1], \\ x-1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

і рівняння

$$F(x) = y. \tag{6}$$

В якості елемента множини $\mathcal{E}$ візьмемо функцію $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для якої $I(x) \equiv x$. Зафіксуємо довільне число $H > 0$. Оскільки для кожного числа $r \ge 1$

$$\max_{|x| \le r} |F(x) - I(x)| = 1,$$

$I^{-1} = I$ і $\|I^{-1}\|_{L(\mathbb{R},\mathbb{R})} = 1$, то для кожного $r \ge H + 1$

$$\max_{|x| \le r} |F(x) - I(x)| \le \frac{r}{\|I^{-1}\|_{L(\mathbb{R},\mathbb{R})}} - H = r - H,$$

тобто виконуються умови теореми 1 і, отже, $R(F) = \mathbb{R}$.

Очевидно, що для $y = 0$ рівняння (6) має розв'язки $x = c$, $c \in [0,1]$.

3. Множина рівнянь, до яких застосовна теорема 1. Покажемо, що множина нелінійних рівнянь у скінченновимірних просторах, існування розв'язків яких можна з'ясовувати за допомогою теореми 1, є достатньо широкою.

Теорема 2. *Для довільних послідовності додатних чисел H_n, $n \ge 1$, для якої*

$$\lim_{n \to \infty} H_n = +\infty,$$

і послідовності елементів $\mathcal{A}_n \in \mathcal{E}$, $n \ge 1$, існують неперевний оператор $\mathcal{F} : X \to Y$ і послідовність додатних чисел r_n, $n \ge 1$, що виконується співвідношення

$$\sup_{\|x\|_X \le r_n} \|\mathcal{F}x - \mathcal{A}_n x\|_Y \le \frac{r_n}{\|\mathcal{A}_n^{-1}\|_{L(X,Y)}} - H_n \tag{7}$$

для кожного $n \ge 1$.

Доведення. Розглянемо довільну послідовність додатних чисел r_n, $n \ge 1$, для якої $r_1 \ge 1$ і $r_{n+1} > r_n + 3$, $n \ge 1$ (значення r_n уточнимо пізніше). Для кожного $n \ge 1$ визначимо відображення

$$\omega_{1,n} : \{x \in X : r_n \le \|x\|_X \le r_n + 1\} \to [0,1]$$

і

$$\omega_{2,n} : \{x \in X : r_n + 1 \leq \|x\|_X \leq r_n + 2\} \to [0,1]$$

за допомогою рівностей

$$\omega_{1,n}(x) = \|r_n + 1 - \|x\|_X\|_X$$

і

$$\omega_{2,n}(x) = \|r_n + 1 - \|x\|_X\|_X .$$

Очевидно, що відображення $\omega_{1,n}$ і $\omega_{2,n}$ неперервні,

$$\omega_{1,n}(x) = 1, \tag{8}$$

якщо $\|x\|_X = r_n$,

$$\omega_{2,n}(x) = 1, \tag{9}$$

якщо $\|x\|_X = r_n + 2$,

$$\omega_{1,n}(x) = \omega_{2,n}(x) = 0, \tag{10}$$

якщо $\|x\|_X = r_n + 1$, і

$$R(\omega_{1,n}) = R(\omega_{2,n}) = [0,1]. \tag{11}$$

Оператор $\mathcal{F} : X \to Y$ і числа r_n, $n \geq 1$, визначимо наступним чином.

Спочатку розглянемо лінійний оператор $\mathcal{F}_1 : X \to Y$, що визначається рівністю

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{A}_1.$$

Очевидно, що для кожного числа $r > 0$

$$\sup_{\|x\|_X \leq r} \|\mathcal{F}_1 x - \mathcal{A}_1 x\|_Y = 0.$$

Виберемо число $r_1 \geq 1$ так, щоб

$$\frac{r_1}{\left\|\mathcal{A}_1{}^{-1}\right\|_{L(Y,X)}} - H_1 \geq 0.$$

Далі розглянемо оператор $\mathcal{F}_2 : X \to Y$, що визначається рівністю

$$\mathcal{F}_2 x = \begin{cases} \mathcal{F}_1 x, & \text{якщо} \;\; x \in M_{2,1}, \\ \omega_{1,1}(x)\mathcal{F}_1 x, & \text{якщо} \;\; x \in M_{2,2}, \\ \omega_{2,1}(x)\mathcal{A}_2 x, & \text{якщо} \;\; x \in M_{2,3}, \\ \mathcal{A}_2 x, & \text{якщо} \;\; x \in M_{2,4}, \end{cases}$$

де

$$M_{2,1} = \{x \in X : \|x\|_X \leq r_1\},$$

$$M_{2,2} = \{x \in X : r_1 < \|x\|_X \leq r_1 + 1\},$$

$$M_{2,3} = \{x \in X : r_1 + 1 < \|x\|_X \leq r_1 + 2\}$$

і

$$M_{2,4} = \{x \in X : \|x\|_X > r_1 + 2\}.$$

Цей оператор неперервний на підставі неперервності $\omega_{1,1}$ і $\omega_{2,1}$, співвідношень (8) – (11) та неперервності лінійних операторів $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{A}_2$. Легко перевірити, що на підставі неперервності $\mathcal{F}_1$ і $\mathcal{A}_2$ та скінченної розмірності простору X

$$\sup_{x \in X} \|\mathcal{F}_2 x - \mathcal{A}_2 x\|_Y =$$

$$= \max_{\|x\|_X \leq r_1 + 2} \|\mathcal{F}_2 x - \mathcal{A}_2 x\|_Y < +\infty.$$

Тому існує таке число $r_2 > r_1 + 3$, що виконується нерівність

$$\sup_{\|x\|_X \leq r_2} \|\mathcal{F}_2 x - \mathcal{A}_2 x\|_Y \leq \frac{r_2}{\left\|\mathcal{A}_2^{-1}\right\|_{L(Y,X)}} - H_2.$$

Далі визначимо оператор $\mathcal{F}_3 : X \to Y$ за допомогою рівності

$$\mathcal{F}_3 x = \begin{cases} \mathcal{F}_2 x, & \text{якщо} \;\; x \in M_{3,1}, \\ \omega_{1,2}(x)\mathcal{F}_2 x, & \text{якщо} \;\; x \in M_{3,2}, \\ \omega_{2,2}(x)\mathcal{A}_3 x, & \text{якщо} \;\; x \in M_{3,3}, \\ \mathcal{A}_3 x, & \text{якщо} \;\; x \in M_{3,4}, \end{cases}$$

де

$$M_{3,1} = \{x \in X : \|x\|_X \leq r_2\},$$

$$M_{3,2} = \{x \in X : r_1 < \|x\|_X \leq r_2 + 1\},$$

$$M_{3,3} = \{x \in X : r_1 + 1 < \|x\|_X \leq r_2 + 2\}$$

і

$$M_{3,4} = \{x \in X : \|x\|_X > r_2 + 2\}.$$

Цей оператор неперервний на підставі неперервності $\omega_{1,2}$ і $\omega_{2,2}$, співвідношень (8) – (11), неперервності нелінійного оператора $\mathcal{F}_2$ та неперервності лінійного оператора $\mathcal{A}_3$. Очевидно, що на підставі неперервності $\mathcal{F}_2$ і $\mathcal{A}_3$ та скінченної розмірності простору X

$$\sup_{x \in X} \|\mathcal{F}_3 x - \mathcal{A}_3 x\|_Y =$$

$$= \max_{\|x\|_X \leq r_2 + 2} \|\mathcal{F}_3 x - \mathcal{A}_3 x\|_Y < +\infty.$$

Тому існує таке число $r_3 > r_2 + 3$, що виконується нерівність

$$\sup_{\|x\|_X \leq r_3} \|\mathcal{F}_3 x - \mathcal{A}_3 x\|_Y \leq \frac{r_3}{\left\|\mathcal{A}_3^{-1}\right\|_{L(Y,X)}} - H_3.$$

Аналогічним чином визначаємо неперервні оператори $\mathcal{F}_n : X \to Y$, $n \geq 4$, і числа $r_n > r_{n-1} + 3$, $n \geq 4$.

Зазначимо, що оператор $\mathcal{F}_n : X \to Y$ визначається за допомогою рівності

$$\mathcal{F}_n x = \begin{cases} F_{n-1}x, & \text{якщо} \quad x \in M_{n,1}, \\ \omega_{1,n-1}(x)\mathcal{F}_{n-1}x, & \text{якщо} \quad x \in M_{n,2}, \\ \omega_{2,n-1}(x)\mathcal{A}_n x, & \text{якщо} \quad x \in M_{n,2}, \\ \mathcal{A}_n x, & \text{якщо} \quad x \in M_{n,4}, \end{cases}$$

де

$$M_{n,1} = \{x \in X : \|x\|_X \leq r_{n-1}\},$$

$$M_{n,2} = \{x \in X : r_1 < \|x\|_X \leq r_{n-1} + 1\},$$

$$M_{n,3} = \{x \in X : r_1 + 1 < \|x\|_X \leq r_{n-1} + 2\}$$

і

$$M_{n,4} = \{x \in X : \|x\|_X > r_{n-1} + 2\}.$$

Завдяки співвідношенню

$$\sup_{x \in X} \|\mathcal{F}_n x - \mathcal{A}_n x\|_Y =$$

$$= \max_{\|x\|_X \leq r_{n-1}+2} \|\mathcal{F}_n x - \mathcal{A}_n x\|_Y < +\infty$$

існує таке число $r_n > r_{n-1} + 3$, що виконується нерівність

$$\sup_{\|x\|_X \leq r_n} \|\mathcal{F}_n x - \mathcal{A}_n x\|_Y \leq \frac{r_n}{\|\mathcal{A}_n^{-1}\|_{L(Y,X)}} - H_n. \tag{12}$$

Оператор $\mathcal{F} : X \to Y$ визначимо за допомогою формули

$$\mathcal{F}x = \begin{cases} \mathcal{F}_1 x, & \text{якщо} \quad \|x\|_X \leq r_1, \\ \mathcal{F}_2 x, & \text{якщо} \quad r_1 < \|x\|_X \leq r_2, \\ \mathcal{F}_3 x, & \text{якщо} \quad r_2 < \|x\|_X \leq r_3, \\ & \vdots \\ \mathcal{F}_n x, & \text{якщо} \quad r_{n-1} < \|x\|_X \leq r_n, \\ & \ddots \end{cases}$$

Очевидно, що звуження $\mathcal{F}|_{B_X[0,r_n]}$ і $\mathcal{F}_n|_{B_X[0,r_n]}$ операторів $\mathcal{F}$ і $\mathcal{F}_n$ на кулю $B_X[0, r_n]$ збігаються, тобто

$$\mathcal{F}|_{B_X[0,r_n]} = \mathcal{F}_n|_{B_X[0,r_n]}. \tag{13}$$

Також очевидно, що для кожного $n \geq 1$

$$\mathcal{F}_n x = \mathcal{F}_{n+1} x,$$

якщо $\|x\|_X = r_n$. Завдяки цьому співвідношенню, співвідношенню (13) та неперервності операторів $\mathcal{F}_n : X \to Y$, $n \geq 1$, оператор $\mathcal{F} : X \to Y$ також є неперервним.

Співвідношення (7) випливає із співвідношень (12) і (13).

Теорему 2 доведено.

4. Застосування теореми 1. Очевидно, що теорема 1 дає достатні умови виконання співвідношення (2). Покажемо, що для деяких класів рівнянь умови цієї теореми є необхідними для виконання (2).

4.1. Випадок, коли рівняння (1) **лінійне.** Дослідимо рівняння (1) у випадку лінійного оператора $\mathcal{F}$.

Корисним є наступне твердження.

Лема 1. *Нехай $\mathcal{F} \in L(X, Y)$. Якщо для деяких оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ і додатних чисел H і r виконується нерівність*

$$\sup_{\|x\|_X \leq r} \|\mathcal{F}x - \mathcal{A}x\|_Y \leq \frac{r}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}} - H, \tag{14}$$

то

$$\|\mathcal{F} - \mathcal{A}\|_{L(X,Y)} < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}}. \tag{15}$$

Навпаки, якщо для оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ виконується нерівність (15), *то для деяких додатних чисел H і r буде виконуватися нерівність* (14).

Доведення. З лінійності операторів $\mathcal{F}$ і $\mathcal{A}$ і визначення норми елементів простору $L(X, Y)$ випливає, що

$$\sup_{\|x\|_X \leq r} \|\mathcal{F}x - \mathcal{A}x\|_Y = r\|\mathcal{F} - \mathcal{A}\|_{L(X,Y)}. \tag{16}$$

Звідси і (14) отримуємо співвідношення

$$\|\mathcal{F} - \mathcal{A}\|_{L(X,Y)} \leq \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}} - \frac{H}{r}, \tag{17}$$

з якого випливає нерівність (15), оскільки $\dfrac{H}{r} > 0$.

Навпаки, якщо виконується нерівність (15), то для кожного додатного числа H існує таке додатне число r, що буде виконуватися нерівність (17). Із цієї нерівності на підставі (16) випливає нерівність (14).

Лему 1 доведено.

Теорема 3. *Лінійний неперервний оператор* $\mathcal{F}: X \to Y$ *має обернений неперервний оператор* $\mathcal{F}^{-1}$ *тоді і тільки тоді, коли для кожного числа* $H > 0$ *існують такі число* $r > 0$ *і оператор* $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, *що виконується співвідношення* (14).

Доведення. Нехай для кожного числа $H > 0$ існують такі число $r > 0$ і оператор $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, що виконується співвідношення (14). Тоді на підставі леми 1 виконується нерівність (15). Завдяки цій нерівності оператор $\mathcal{F}$ можна подати як добуток двох оборотних операторів. Справді,

$$\mathcal{F} = \mathcal{A}\left(I + \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{F} - \mathcal{A})\right),$$

де I – одиничний елемент простору $L(X, X)$. На підставі (15)

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{F} - \mathcal{A})\right\|_{L(X,X)} < 1$$

і тому оператор $I + \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{F} - \mathcal{A})$ має неперервний обернений $\left(I + \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{F} - \mathcal{A})\right)^{-1}$ [3, с. 212]. Завдяки включенню $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$ аналогічну властивість має й оператор $\mathcal{A}$. Тому оператор $\mathcal{F}$ має неперервний обернений

$$\mathcal{F}^{-1} = \left(I + \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{F} - \mathcal{A})\right)^{-1}\mathcal{A}^{-1}.$$

Навпаки, якщо оператор $\mathcal{F} \in L(X, Y)$ має неперервний обернений $\mathcal{F}^{-1}$, то тоді у випадку $\mathcal{A} = \mathcal{F}$, буде виконуватися співвідношення (14), в якому додатні числа H і r є такими, щоб

$$\frac{r}{\|\mathcal{F}^{-1}\|_{L(Y,X)}} - H > 0.$$

Теорему 3 доведено.

Наслідок 2. *Оператор* $\mathcal{F} \in L(X, Y)$ *має неперервний обернений* $\mathcal{F}^{-1}$ *тоді і тільки тоді, коли існує такий оператор* $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, *для якого*

$$\|\mathcal{F} - \mathcal{A}\|_{L(X,Y)} < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}}.$$

4.2. Малі на нескінченності збурення лінійних рівнянь. Розглянемо рівняння

$$\mathcal{A}x + \mathcal{G}x = y, \tag{18}$$

де $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, $\mathcal{G}: X \to Y$ – неперервний оператор і y - заданий вектор простору Y.

Теорема 4. *Якщо*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\sup\limits_{\|x\|_X \le r} \|\mathcal{G}x\|_Y}{r} < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}}, \tag{19}$$

то для кожного вектора $y \in Y$ *рівняння* (18) *має хоча б один розв'язок* $x \in X$.

Доведення. Зафіксуємо довільний вектор $y \in Y$ і розглянемо число $H > \|y\|_Y$. На підставі (19) існує число $r > 0$, для якого

$$\sup_{\|x\|_X \le r} \|(\mathcal{A}x - \mathcal{G}) - \mathcal{A}x\|_Y \le \frac{r}{\|\mathcal{A}^{-1}\|_{L(Y,X)}} - H.$$

Тоді на підставі теореми 1 рівняння (18) має хоча б один розв'язок $x \in X$.

Теорему 4 доведено.

Позначимо через $\mathcal{O}$ множину всіх відображень $\mathcal{G}: X \to Y$, для кожного з яких

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\sup\limits_{\|x\|_X \le r} \|\mathcal{G}x\|_Y}{r} = 0.$$

Теорема 5. *Для того, щоб*

$$R(\mathcal{A} + \mathcal{G}) = Y \tag{20}$$

для кожного $\mathcal{G} \in \mathcal{O}$ *необхідно і достатньо, щоб* $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$.

Доведення. Якщо $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$, то для кожного $\mathcal{G} \in \mathcal{O}$ виконується рівність (20) на підставі теореми 4.

Якщо виконується рівність (20) для кожного $\mathcal{G} \in \mathcal{O}$, то

$$R(\mathcal{A}) = Y, \tag{21}$$

оскільки нульовий оператор $O: X \to Y$ є елементом множини $\mathcal{O}$. З (21) і того, що $\dim X = \dim Y < \infty$, випливає включення $\mathcal{A} \in \mathcal{E}$.

Теорему 5 доведено.

Зауваження 2. У теоремах 4 і 5 для оператора G можуть одночасно виконуватися співвідношення

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\sup\limits_{\|x\|_X \le r} \|\mathcal{G}x\|_Y}{r} = 0$$

і

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\sup\limits_{\|x\|_X\le r} \|\mathcal{G}x\|_Y}{r} = +\infty.$$

Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад 2. Нехай $X = Y = \mathbb{R}$. Розглянемо числові послідовності $(\alpha_n)_{n\ge1}$ і $(\beta_n)_{n\ge1}$, де $\alpha_n = n!$ і $\beta_n = \alpha_n + 1$. Також розглянемо неперервні функції $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \ge 1$, для яких:

1) носій $\operatorname{supp}\varphi_n$ функції φ_n збігається з відрізком $[\alpha_n, \beta_n]$ для кожного $n \ge 1$;

2) $\max\limits_{x\in[\alpha_n,\beta_n]} |\varphi_n(x)| = n!\sqrt{n}$, $n \ge 1$.

Таким умовам задовольняють, наприклад, функції $\psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \ge 1$, що визначаються формулами

$$\psi_n(x) = n!2\sqrt{n}\left(\frac{1}{2} - \left|x - \alpha_n - \frac{1}{2}\right|\right),$$

якщо $x \in [\alpha_n, \beta_n]$, і

$$\psi_n(x) = 0,$$

якщо $x \in \mathbb{R} \setminus [\alpha_n, \beta_n]$.

Нагадаємо, що *носієм* $\operatorname{supp}\varphi$ функції φ називається замикання множини

$$\{x : \varphi(x) \ne 0\}.$$

Визначимо функцію $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за допомогою рівності

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_n(x).$$

Очевидно, що ця функція неперервна,

$$\frac{\max\limits_{|x|\le\beta_n} |G(x)|}{\beta_n} = \frac{n!\sqrt{n}}{n!+1} = \sqrt{n} - \frac{1}{n!+1}$$

і

$$\frac{\max\limits_{|x|\le\alpha_{n+1}} |G(x)|}{\alpha_{n+1}} = \frac{n!\sqrt{n}}{(n+1)!} = \frac{\sqrt{n}}{n+1}.$$

Із цих співвідношень випливає, що

$$\underline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\max\limits_{|x|\le r} |G(x)|}{r} = 0$$

і

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\max\limits_{|x|\le r} |G(x)|}{r} = +\infty.$$

4.3. Випадок, коли рівняння (1) **скалярне.** Будемо вважати, що $X = Y = \mathbb{R}$, а відображення $\mathcal{F}$ у рівнянні (1) є елементом множини Ω всіх неперервних на $\mathbb{R}$ функцій ω, для кожної з яких

$$R(\omega) = \mathbb{R}$$

і

$$\lim_{|x|\to+\infty} |\omega(x)| = +\infty.$$

Кожна функція $\omega \in \Omega$ задовольняє умови теореми 1 на підставі наступної теореми.

Теорема 6 ([4],[5]). *Нехай $\omega \in \Omega$. Тоді для кожного числа $H > 0$ існують такі числа $k \ne 0$ і $a > 0$, що для всіх $x \in [-a, a]$*

$$|\omega(x) - kx| \le |k|a - H. \qquad (22)$$

Справді, функція $g(x) = kx$, що використовується в теоремі 6, має обернену функцію $g^{-1}(x) = k^{-1}x$. Тому праву частину нерівності (22) можна подати у вигляді $\frac{a}{|k|^{-1}} - H$, де $|k|^{-1}$ – норма g^{-1}. Звідси випливає, що кожна функція $\omega \in \Omega$ задовольняє умови теореми 1.

5. Хибність основної теореми у випадку $\dim X = \infty$**.** Якщо банахів простір X нескінченновимірний, то для деяких операторів $\mathcal{F}$ твердження теореми 1 не справджується. Це підтверджується наступним прикладом.

Приклад 3. Будемо вважати, що

$$X = Y = l_1,$$

де l_1 – банахів простір числових послідовностей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, для кожної з яких $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$, з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Розглянемо неперервний оператор $\mathcal{G} : l_1 \to l_1$, що визначається рівністю

$$\mathcal{G}\mathbf{x} = \left(1 - \frac{\|\mathbf{x}\|_{l_1}}{\omega(\mathbf{x})}, \frac{x_1}{\omega(\mathbf{x})}, \frac{x_2}{\omega(\mathbf{x})}, \ldots, \frac{x_n}{\omega(\mathbf{x})}, \ldots\right), \qquad (23)$$

де

$$\omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \|\mathbf{x}\|_{l_1} \le 1, \\ \|\mathbf{x}\|_{l_1}, & \text{якщо} \quad \|\mathbf{x}\|_{l_1} > 1. \end{cases} \tag{24}$$

Нехай $\mathcal{I} : l_1 \to l_1$ – одиничний оператор і

$$\mathcal{F} = \mathcal{I} - \mathcal{G}.$$

Покажемо, що рівняння

$$\mathcal{F}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{25}$$

не має в просторі l_1 жодного розв'язку і для оператора $\mathcal{F}$ виконуються умови теореми 1.

Справді, якщо $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \ldots)$ – розв'язок рівняння (25), то завдяки (23) і (24)

$$\|\mathbf{x}^*\|_{l_1} = 1. \tag{26}$$

Тоді

$$\mathcal{F}\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \ldots) - \\ -\mathcal{G}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \ldots) = \\ = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \ldots) - (0, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, \ldots) = \\ = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

і тому

$$\mathbf{x}^* = (0, 0, \ldots, 0, \ldots),$$

що суперечить (26).

Отже, множина розв'язків рівняння (25) є порожньою.

Далі зафіксуємо довільне число $H > 0$. В якості числа r і елемента $\mathcal{A}$ множини $\mathcal{E}$ візьмемо відповідно $1+H$ і $\mathcal{I}$ (зазначимо, що $\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}$ і $\|\mathcal{I}^{-1}\|_{L(l_1,l_1)} = 1$). Тоді на підставі (23) і (24)

$$\sup_{\|\mathbf{x}\|_{l_1} \le r} \|\mathcal{F}\mathbf{x} - \mathcal{I}\mathbf{x}\|_{l_1} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{l_1} \le 1+H} \|\mathcal{G}\mathbf{x}\|_{l_1} =$$

$$= (1 + H) - H = \frac{r}{\|\mathcal{I}^{-1}\|_{L(l_1,l_1)}} - H.$$

Отже, для оператора $\mathcal{F}$ умови теореми 1 виконуються.

Зазначимо, що у випадку конкретних нескінченновимірних просторів X і Y множина розв'язків рівняння (1) може бути непорожньою, що підтверджується дослідженнями в [6]–[11]. У цих роботах метод локальної лінійної апроксимації нелінійних операторів, що використовувався і в цій статті, застосовано до дослідження існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих, диференціальних і диференціально-функціональних рівнянь.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.

2. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 512 с.

3. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.

4. *Слюсарчук В. Е.* Условия существования ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1999. – **54**, № 4 (328). – С. 181–182.

5. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 4. – С. 523–539.

6. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 109–115.

7. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 11. – С. 1541–1556.

8. *Слюсарчук В. Е.* Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 8. – С. 103–126.

9. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних диференціальних операторів слабко регулярними операторами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1685–1698.

10. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 1. – С. 122–126.

11. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Мат. сб. – 2012. – **203**, № 5. – С. 135–160.