

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
Львівський національний університет імені Івані Франка

ТЕОРЕМА ТИПУ ВІМАНА-ВАЛІРОНА ДЛЯ ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ З ДОВІЛЬНОЮ КОМПЛЕКСНОЮ ПОСЛІДОВНІСТЮ ПОКАЗНИКІВ

У цій статті доведено теорему типу Вімана-Валірона про оцінку загального члена цілого ряду Діріхле з довільною необмеженою комплексною послідовністю показників λ_n через максимальний член цього ряду, а також отримано новий опис за площею мірою $\tau_2(E) = \int_E \frac{dx dy}{|z|^2} < +\infty$, $z = x + iy$ виняткової множини E .

In this article a Wiman-Valiron's type theorem about estimation of a general term of entire Dirichlet Series with arbitrary complex exponents λ_n by means of its maximum term is proved. Additionally, a new statement concerning the plane measure $\tau_2(E) = \int_E \frac{dx dy}{|z|^2} < +\infty$, $z = x + iy$ of an exclusive set E is obtained.

1. Вступ і огляд результатів

Розглянемо цілі функції F , задані в класі $D^{+\infty}$ абсолютно збіжними у всій комплексній площині рядами Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}, \quad (1)$$

де $\lambda = (\lambda_n)$ — довільна послідовність попарно різних невід'ємних дійсних чисел, тобто $\lambda_n \neq \lambda_k$ ($n \neq k$), $\{\lambda_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} [0, +\infty)$. Через D_a позначатимемо клас абсолютно збіжних у півплощині

$$\Pi_a = \{z : \operatorname{Re} z < a\}, \quad a \leq +\infty,$$

рядів Діріхле вигляду (1), де $\{\lambda_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$.

Для $F \in D_a$, $a \leq +\infty$, та $x < a$ позначимо

$$M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)| : y \in \mathbb{R}\},$$

$$\mu(x, F) = \max\{|a_n| e^{x\lambda_n} : n \geq 0\}.$$

Через L позначимо клас неперервних, додатних, зростаючих до $+\infty$ функцій; L_1 — підклас L , до якого входять функції $\Phi(t)$ такі, що

$$\int_{x_0}^x \frac{\Phi(t)}{t} dt = O(\Phi(x)) \quad (x \rightarrow +\infty),$$

$\mathcal{L}_0$ — клас функцій $\Phi \in \mathcal{L}$ таких, що $\int_{x_0}^x \frac{\Phi(t)}{t} dt = O(\Phi(x))$ ($x \rightarrow +\infty$),

L_2 — підклас L , до якого входять функції $\Phi(t)$, обернені функції $\varphi(t)$ до яких задовольняють умову Карамати

$$(\forall c > 0) : \varphi(ct) = O(\varphi(t)) \quad (t \rightarrow +\infty).$$

Через $D_*^{+\infty}$ позначимо підклас класу $D^{+\infty}$, в який входять лише ті функції $F \in D^{+\infty}$, для яких виконуються умови

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \mu(x, F)}{x} = 0, \quad (2)$$

$$\mu(0, F) = \max\{|a_n| : n \geq 0\} = 1.$$

Логарифмічною мірою вимірної множини $E \subset [1, +\infty)$ називаємо величину

$$\ln - \operatorname{meas}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E d \ln x.$$

Додатну послідовність (x_n) назвемо *майже монотонно спадною*, якщо знайдеться стала $\delta > 0$ така, що $x_m \leq \delta x_n$ для всіх $n \geq n_1$ і $m \geq n + 1$.

Зрозуміло, що кожна незростаюча додатна послідовність є майже монотонно спадною. Для того, щоб у цьому перекоонатись досить вибрати $\delta = 1$.

У статті [12] отримано оцінку загального члена цілого ряду Діріхле з класу D через максимальний член цього ряду.

Теорема 1. [12] Нехай функція $F \in D_*^{+\infty}$, така що $\Phi_1 \in \mathcal{L}_0$, де $x\Phi_1(x) = \ln \mu(x, F)$. Якщо $v(t)$ – невід’ємна на $[0, +\infty)$, додатна при $t \rightarrow +\infty$ функція, така, що $\int_0^{+\infty} v(t)dt < +\infty$ і виконується умова $\ln n = o(\ln |a_n|)$ ($n \rightarrow +\infty$), то існують функція $c_1(t) \uparrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$), для якої виконується умова $\int_0^{+\infty} c_1(t)v(4t)dt < +\infty$, і множина $E \subset \mathbb{R}_+$ така, що

$$\ln -meas(E) \leq 2 \cdot \int_0^{\infty} c_1(t)v(4t)dt < +\infty \quad (3)$$

і для всіх $n \geq 0$ та $x > 0$ ($x \notin E$) виконується нерівність

$$|a_n|e^{x\lambda_n} \leq \mu(x, F) \times \quad (4)$$

$$\times \exp \left\{ -xe^{-2K_F} \int_{\mu_n}^{\mu_n} (\mu_n - t) \frac{c_1(t)}{\varphi(t)} v(4t)dt \right\},$$

де $\mu_n = -\ln |a_n|$, $\varphi(t)$ – обернена функція до функції $\Phi(t) = \ln \mu(t, F)$

$$K_F \stackrel{def}{=} \sup \left\{ \frac{1}{\Phi_1(x)} \int_0^x \frac{\Phi_1(t)}{t} dt : x \geq x_0 \right\} <$$

$$< +\infty, \quad \Phi_1(x) := \frac{\ln \mu(x, F)}{x}, \quad F \in D^{+\infty},$$

$\nu = \nu(x, F) = \max\{n : |a_n|e^{x\lambda_n} = \mu(x, F)\}$ – центральний індекс ряду (1).

Метою цієї роботи є доведення одного варіанту теореми типу Вімана-Валірона в класі абсолютно збіжних у всій комплексній площині рядів Діріхле вигляду (1), послідовність показників яких (λ_n) , взагалі кажучи, є довільною послідовністю комплексних чисел, для якої нескінченність є точкою скупчення, тобто $\lambda_n \in \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{Z}_+$) і $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_n| = +\infty$. Відзначимо, що подібне твердження анонсовано у 2003 р. в [10].

2. Основні результати

Через S_a позначимо клас абсолютно збіжних у півплощині

$$\Pi_a = \{z : \operatorname{Re} z < a\}, \quad a \leq +\infty,$$

рядів Діріхле вигляду (1), де $\{\lambda_n : n \geq 0\} \subset [0, +\infty)$.

Через $\mathcal{S}$ позначимо клас абсолютно збіжних у всій комплексній площині $\mathbb{C}$ (цілих) рядів Діріхле вигляду (1), послідовність показників яких $\{\lambda_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{C}$.

Для $F \in \mathcal{S}$ і $z \in \mathbb{C}$ позначимо

$$\mu(z, F) \stackrel{def}{=} \sup\{|a_n|e^{\operatorname{Re}(z\lambda_n)} : n \in \mathbb{Z}_+\}.$$

У випадку дійсної послідовності показників дане означення переходить в означення максимального члена ряду Діріхле з класу S .

Для вимірної за Лебегом (наприклад, для Борелевої) множини $E \subset \mathbb{C}$ та $\alpha > 0$ позначимо

$$\tau_\alpha(E) \stackrel{def}{=} \int_{E \cap \{z : |z| \geq 1\}} \frac{dx dy}{|z|^\alpha}, \quad z = x + iy.$$

Зауважимо, що для круга $D_R = \{z : |z| \leq R\}$ і кругового сектора $B_R = \{z : |z| \leq R, \alpha_1 \leq \arg z \leq \alpha_2\}$

$$\tau_2(D_R) = 2\pi \ln R, \quad \tau_2(B_R) = (\alpha_2 - \alpha_1) \ln R$$

$$(R \geq 1).$$

Для функції $F \in \mathcal{S}$ і фіксованого $z \in \mathbb{C}$ визначимо функцію

$$\Phi_z(t) = \frac{1}{t} \ln \mu(tz, F) : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty),$$

а через $\varphi_z(t)$ – обернену до неї.

Для функції $F \in \mathcal{S}$ визначимо, відповідно, конус зростання і конус її швидкого зростання

$$\gamma(F) \stackrel{def}{=} \{z \in \mathbb{C} : \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_z(t) = +\infty\},$$

$$\gamma_+(F) \stackrel{def}{=} \{z \in \gamma(F) : \Phi_z \in L_1\}.$$

Твердження 1. Для кожної функції $F \in \mathcal{S}$

$$z \in \gamma(F) \iff (\forall r > 0) : (rz) \in \gamma(F),$$

а також

$$z \in \gamma_+(F) \iff (\forall r > 0) : (rz) \in \gamma_+(F).$$

Справді, для $r > 0$, оскільки $\Phi_{rz}(t) = r\Phi_z(rt)$, то перше твердження очевидне. Звідси, досить довести, що $z \in \gamma(F) \implies (\forall r > 0): (rz) \in \gamma(F)$. Маємо

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{\Phi_{rz}(t)}{t} dt &= r \int_{x_0}^x \frac{\Phi_z(rt)}{rt} d(rt) = \\ &= r \int_{rx_0}^{rx} \frac{\Phi_z(u)}{u} d(u) = O(\Phi_z(rx)) = O(\Phi_{rz}(x)) \\ &\quad (x \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

У статті [11] доведено таке твердження.

Твердження 2 ([11]). Для кожної функції $F \in \mathcal{S}$

$$\gamma(F) = \{z \in \mathbb{C}: \sup\{\operatorname{Re}(z\lambda_n): n \in \mathbb{Z}_+ = +\infty\} > 0\}.$$

Зауважимо тепер, що, якщо $z \notin \gamma(F)$, то у випадку, коли

$$\beta(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{\operatorname{Re}(z\lambda_n): n \in \mathbb{Z}_+\} > 0,$$

за Твердженням 1 для

$$\mathfrak{M}(z, F) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| e^{\operatorname{Re}(z\lambda_n)}$$

маємо

$$\begin{aligned} \ln \mathfrak{M}(tz, F) &= (1 + o(1)) \ln \mu(tz, F) = \\ &= (1 + o(1)) \beta(z)t \quad (t \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Якщо ж $z \in \gamma_+(F)$, то за твердженням 3 до $\mathfrak{M}(z, F)$ можна застосувати Теорему 1, за якою

$$\ln \mathfrak{M}(tz, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(tz, F)$$

при $t \rightarrow +\infty$ зовні деякої множини E_z скінченної логарифмічної міри.

Зауважимо, що якщо знайдеться така стала $A < +\infty$, що для кожного $z \in \gamma(F)$, $|z| = 1$

$$\ln -\operatorname{meas}(E_z) \leq A,$$

то для множини $E = \bigcup_{z \in \gamma(F), |z|=1} E_z$ негайно отримаємо, що

$$\tau_2(E) = \int_{\psi: e^{i\psi} \in \gamma(F)} \left(\int_{E_{e^{i\psi}}} \frac{dt}{t} \right) d\psi \leq A \cdot \theta,$$

де θ — кутова міра множини $\{z: z \in \gamma(F), |z| = 1\}$.

Наведені вище міркування, дозволяють вважати доведеним таке твердження.

Теорема 2. Нехай функція $F \in \mathcal{S}$, а $v(u)$ — невід'ємна на $[0, +\infty)$ і додатна при $u \rightarrow +\infty$ функція, така, що $\int_0^{+\infty} v(u) du < +\infty$. Якщо $\ln n = o(\ln |a_n|)$ ($n \rightarrow +\infty$), то для кожного $z \in \gamma_+(F)$, $|z| = 1$ існує функція $c_z(u) \uparrow +\infty$ ($u \rightarrow +\infty$) така, що для всіх $n \geq 0$ і для всіх $t > 0$ ($t \notin E_z$, $\ln -\operatorname{meas}(E_z) < +\infty$) виконується нерівність

$$|a_n| e^{t \operatorname{Re}(z\lambda_n)} \leq \mu(tz, F) \times \quad (5)$$

$$\times \exp \left\{ -t \int_{\mu_\nu}^{\mu_n} (\mu_n - u) \frac{c_z(u)}{\varphi_z^*(u)} v(4u) du \right\}.$$

де $\mu_n = -\ln |a_n|$, а $\nu = \nu(tz, F) = \max\{n: |a_n| e^{t \operatorname{Re}(z\lambda_n)} = \mu(tz, F)\}$ — центральний індекс ряду (1), а функція $\varphi_z^*(u)$ — обернена функція до функції $\Phi_z^*(t) = \ln \mu(tz, F)$.

Однак, звідси не випливає, що $\tau_2(E) < +\infty$. Насправді правильне дещо сильніше твердження, тобто, доведемо таку теорему.

Теорема 3. Якщо виконуються умови теорему 2, то функцію c_z можна для всіх z вибрати одну і ту ж, тобто, $c_z(u) \equiv c_1(u)$, а для множини

$$E = \bigcup_{z \in \gamma(F), |z|=1} E_z$$

виконується $\tau_2(E) < +\infty$.

Доведення. Зафіксуємо $z \in \gamma_+(F)$, $|z| = 1$. Зауважимо спочатку, що з того, що $F(0) \neq \infty$ випливає, що $|a_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), звідки $\mu_n = -\ln |a_n| \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$). Не зменшуючи загальності, припустимо, що $\mu_n \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$),

тобто, послідовність (μ_n) монотонно зростає до $+\infty$.

Оскільки інтеграл $\int_0^{+\infty} v(u)du$ збіжний, то $l(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_x^{+\infty} v(u)du \downarrow 0$ ($x \rightarrow +\infty$), а також $c_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} (l(x))^{-1/2} \uparrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$). Крім того,

$$M = \int_0^{+\infty} c_1(u)v(4u)du \leq -\frac{1}{4} \int_0^{+\infty} (l(x))^{-\frac{1}{2}} dl(x) = \frac{1}{2} \sqrt{l(0)} < +\infty.$$

Виберемо тепер

$$\alpha(t) = - \int_t^{+\infty} \frac{1}{\varphi_z^*(u)} c_1(u)v(4u)du.$$

Зауважимо, що з (6) випливає, що

$$\alpha(t) = o\left(\frac{1}{\varphi_z^*(t)}\right) \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (7)$$

Позначимо

$$\alpha_n = \exp\left\{-\int_0^{\mu_n} \alpha(t)dt\right\}, \quad \tau_n = \alpha(\mu_n),$$

і розглянемо ряд Діріхле

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\alpha_n} e^{s\mu_n}, \quad (8)$$

з $b_n = e^{\text{Re}(z\lambda_n)}$. Покажемо, що функція $f \in S_0$. Справді, з того, що $F \in \mathcal{S}$, випливає

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_n|}{\text{Re}(z\lambda_n)} = +\infty,$$

тому $\text{Re}(z\lambda_n) = o(\mu_n)$ ($n \rightarrow +\infty$). Звідси та з (6)

$$\ln \frac{b_n}{\alpha_n} = \text{Re}(z\lambda_n) - \int_0^{\mu_n} \int_t^{+\infty} \frac{c(u)}{\varphi_z^*(u)} v(4u)du = o(\mu_n) \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Оскільки за умовою $\ln n = o(\mu_n)$ ($n \rightarrow +\infty$), то за теоремою Валірона для абсциси абсолютної збіжності ряду (8) маємо

$$\sigma_a(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(b_n/\alpha_n)}{\mu_n} = 0.$$

Отже, $f \in S_0$.

Для того, щоб можна було застосувати міркування, подібні як при доведенні теореми 2 з [12], досить показати, що центральний індекс $\nu(x, f) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -0$). Це випливає з того, що $\mu(x, f) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -0$). Останнє співвідношення є рівносильне до умови

$$\sup \left\{ \frac{b_n}{\alpha_n} : n \geq 0 \right\} = +\infty. \quad (9)$$

(6) Покажемо, що ця умова виконується. Справді, $0 \leq \ln \mu(tz, F) = -\mu_\nu + t \text{Re}(z\lambda_\nu)$ ($t \geq t_0$), $\nu = \nu(tz - 0, F)$, звідки $\mu_\nu \leq t \text{Re}(z\lambda_\nu)$. Оскільки, $\Phi_z^*(t) = t\Phi_z(t) = \ln \mu(tz, F) \leq t \text{Re}(z\lambda_\nu)$ ($t \geq t_0$), то $t \leq \varphi_z(\text{Re}(z\lambda_\nu))$, де φ_z – обернена функція до функції Φ_z . Тому

$$t \leq \varphi_z(\text{Re}(z\lambda_\nu)) \implies \mu_\nu \leq t \text{Re}(z\lambda_\nu) \leq \quad (10)$$

$$\text{Re}(z\lambda_\nu) \varphi_z(\text{Re}(z\lambda_\nu)) \quad (t \geq t_0),$$

де $\nu = \nu(tz - 0, F)$. Залишилося зауважити, що функція $t/\varphi_z^*(t)$ є оберненою до функції $t\varphi_z(t)$, де φ_z – функція обернена до функції $\Phi_z(t) = \frac{\Phi_z^*(t)}{t}$, тому

$$\text{Re}(z\lambda_\nu) \geq \frac{\mu_\nu}{\varphi_z^*(\mu_\nu)} \quad (t \geq t_0) \quad \nu = \nu(tz - 0, F).$$

Звідси

$$\ln \frac{b_\nu}{\alpha_\nu} \geq \frac{\mu_\nu}{\varphi_z^*(\mu_\nu)} - \int_0^{\mu_\nu} |\alpha(t)|dt, \quad \nu = \nu(\sigma - 0, F).$$

З умови $\Phi_z \in L_1$ випливає, що $t/\varphi_z^*(t) = \Phi_z(\varphi_z^*(t)) \rightarrow +\infty$ ($t \rightarrow +\infty$), а також

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{\varphi_z^*(t)} &= \frac{x}{\varphi_z^*(x)} + \int_0^{\varphi_z^*(x)} \frac{\Phi_z^*(u)}{u^2} du + O(1) = \\ &= \frac{x}{\varphi_z^*(x)} + O\left(\frac{\Phi_z^*(\varphi_z^*(x))}{\varphi_z^*(x)}\right) = O\left(\frac{x}{\varphi_z^*(x)}\right) \\ &\quad (x \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Тому, застосовуючи (7), отримуємо

$$\int_0^{\mu_\nu} |\alpha(u)|du = o(\mu_\nu/\varphi_z^*(\mu_\nu)) \quad (t \rightarrow +\infty),$$

$$\nu = \nu(tz - 0, F),$$

звідки, остаточно одержуємо

$$\ln \frac{b_\nu}{\alpha_\nu} \geq (1 + o(1)) \frac{\mu_\nu}{\varphi_z^*(\mu_\nu)} \rightarrow +\infty \quad (t \rightarrow +\infty),$$

$$\nu = \nu(tz - 0, F),$$

тобто виконується (9) і тому $\nu(x, f) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -0$).

Нехай (s_j) – послідовність точок стрибка центрального індекса $\nu(s, f)$ занумерована у такий спосіб, що $\nu(s, f) = j$ для $s \in [s_j, s_{j+1})$ і, якщо $\nu(s_{j+1}-0, f) = j$ і $\nu(s_{j+1}, f) = j+p$, то $s_{j+1} = s_{j+2} = \dots = s_{j+p} < s_{j+p+1}$. Зрозуміло, що $s_j \rightarrow -0$ ($j \rightarrow +\infty$).

Якщо $x \in [s_k + \tau_k, s_{k+1} + \tau_k) \stackrel{\text{def}}{=} E_k^* \subset (-\infty; 0)$, то $\nu(x - \tau_k, f) = k$ і за означенням $\mu(x - \tau_k, f)$ подібно, як і у доведенні теореми 2 з [2] та теореми 1 з [12] для всіх $n \geq 0$ одержуємо

$$\frac{b_n}{\alpha_n} e^{(x-\tau_k)\mu_n} \leq \mu(x - \tau_k, f).$$

Звідси, при $n \neq k$

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_k} e^{x(\mu_n - \mu_k)} &\leq \frac{\alpha_n}{\alpha_k} e^{\tau_k(\text{Re}(z\lambda_n) - z\lambda_k)} = \\ &= \exp \left\{ - \int_{\mu_k}^{\mu_n} (\alpha(u) - \alpha(\mu_k)) du \right\} < 1. \end{aligned}$$

Підставляючи тут $x = -\frac{1}{t}$, $t > 0$, одержуємо

$$\frac{|a_n| e^{t \text{Re}(z\lambda_n)}}{|a_k| e^{t \text{Re}(z\lambda_k)}} = \left(\frac{b_n e^{x\mu_n}}{b_k e^{x\mu_k}} \right)^t < 1 \quad (n \neq k), \quad (11)$$

тобто $\nu(tz, F) = k$ і $\mu(tz, F) = |a_k| e^{t \text{Re}(z\lambda_k)}$ при $t \in [-(s_k + \tau_k)^{-1}, -(s_{k+1} + \tau_k)^{-1})$. Тому для всіх $t > 0$ таких, що $x = -t^{-1} \in \bigcup_{k \in J} E_k^*$, де $J \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ – множина значень центрального індексу $\nu(x, f)$, і для всіх $n \geq 0$ з (11) маємо

$$\begin{aligned} \frac{|a_n| e^{t \text{Re}(z\lambda_n)}}{|a_k| e^{t \text{Re}(z\lambda_k)}} &= \left(\frac{b_n e^{x\mu_n}}{b_k e^{x\mu_k}} \right)^t \leq \\ &\leq \exp \left\{ -t \int_{\mu_k}^{\mu_n} (\mu_n - u) \alpha'(u) du \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

при $t = -\frac{1}{x} > 0$. Звідси, для всіх $t \in \bigcup_{k \in J} \tilde{E}_k \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{E}$, де $\tilde{E}_k \subset (0, +\infty)$ – образ множини E_k^* при відображенні $t = -\frac{1}{x}$, одержуємо (5).

Оцінимо логарифмічну міру множини

$$E_z = [-s_1^{-1}, +\infty) \setminus \tilde{E} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{+\infty} [-(s_k + \tau_{k-1})^{-1}, -(s_k + \tau_k)^{-1}).$$

Зауважимо, що оскільки $(\forall n)(\forall t): -\mu_n + t \text{Re}(z\lambda_n) \leq \ln \mu(tz, F)$, то при $t = \varphi_z^*(\mu_n)$ отримаємо

$$\text{Re}(z\lambda_n) \leq \frac{\mu_n + \Phi_z^*(t)}{t} = \frac{2\mu_n}{\varphi_z^*(\mu_n)}. \quad (13)$$

Звідси і з (10) виводимо

$$\begin{aligned} t \leq \varphi_z(\text{Re}(z\lambda_{\nu(tz-0, F)})) &\leq \varphi_z \left(\frac{2\mu_{\nu(tz-0, F)}}{\varphi_z^*(\mu_{\nu(tz-0, F)})} \right) \leq \\ &\leq c \varphi_z^*(\mu_{\nu(tz-0, F)}), \end{aligned} \quad (14)$$

останню нерівність виводимо за допомогою умови $\Phi_1 \in L_1$, тут $c < +\infty$. Справді нехай $K \in (0, +\infty)$ таке, що

$$\int_{te^{-2K}}^t \frac{\Phi_z(u)}{u} du \leq \int_0^t \frac{\Phi_z(u)}{u} du \leq K \Phi_z(t).$$

Тоді, $2\Phi_z(te^{-2K}) \leq \Phi_z(t)$. Звідси, (14) одержуємо з $c = e^{2K}$.

Нехай тепер $k \in J$. Тоді

$$\nu(s_k + \tau_{k-1} - 0, f) =$$

$$= \nu(-(s_k + \tau_{k-1} - 0)^{-1} z, F) \leq k - 1$$

і, отже, застосовуючи (14), маємо

$$|s_k + \tau_{k-1}|^{-1} = -(s_k + \tau_{k-1})^{-1} \leq c \varphi_z^*(\mu_{k-1}). \quad (15)$$

Звідси за означенням τ_k отримуємо

$$|s_k + \tau_{k-1}|^{-1} (|\tau_{k-1}| - |\tau_k|) \leq c \int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(u) v(4u) du,$$

а також при $k \rightarrow +\infty$

$$\ln -\text{meas}(\tilde{E}_k) =$$

$$\begin{aligned}
&= \ln - \text{meas} \left((|s_k + \tau_{k-1}|^{-1}, |s_k + \tau_k|^{-1}) \right) = \\
&= \ln \left| \frac{s_k + \tau_{k-1}}{s_k + \tau_k} \right| \leq \frac{|\tau_{k-1}| - |\tau_k|}{|s_k + \tau_k|} \leq \\
&\leq \frac{|\tau_{k-1}| - |\tau_k|}{|s_k + \tau_{k-1}| - (|\tau_{k-1}| - |\tau_k|)} \leq \\
&\leq c \int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(u)v(4u)du \left(1 - c \int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(u)v(4u)du \right)^{-1} \\
&\leq 2c \int_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(u)v(4u)du,
\end{aligned}$$

де стала $c > 0$ визначена вище. Якщо ж тепер $j \notin J$ і $k, p \in J$ такі, що $p < j < k$, $s_p < s_{p+1} = s_j = s_k < s_{k+1}$, то

$$\begin{aligned}
\bigcup_{j=p+1}^k \tilde{E}_k &= \bigcup_{j=p+1}^k [|s_j + \tau_{j-1}|^{-1}; |s_j + \tau_j|^{-1}) = \\
&= [|s_{p+1} + \tau_p|^{-1}, |s_k + \tau_k|^{-1})
\end{aligned}$$

і, отже,

$$\begin{aligned}
\ln - \text{meas} \left(\bigcup_{j=p+1}^k \tilde{E}_k \right) &\leq \ln \frac{|s_{p+1} + \tau_p|}{|s_{p+1} + \tau_k|} \leq \\
&\leq \frac{|\tau_p| - |\tau_k|}{|s_{p+1} + \tau_p| - (|\tau_p| - |\tau_k|)}.
\end{aligned}$$

Застосовуючи (15), при $p \rightarrow +\infty$ маємо

$$\ln - \text{meas} \left(\bigcup_{j=p+1}^k \tilde{E}_k \right) \leq 2c \int_{\mu_p}^{\mu_k} c_1(u)v(4u)du.$$

Тому, остаточно

$$\begin{aligned}
\ln - \text{meas} (E_z) &= \ln - \text{meas} \left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} \tilde{E}_j \right) \leq \\
&\leq 2c \int_0^{\infty} c_1(u)v(4u)du \leq c\sqrt{l(0)} < +\infty.
\end{aligned}$$

Звідси негайно отримаємо, що

$$\tau_2(E) = \int_{\psi: e^{i\psi} \in \gamma(F)} \left(\int_{E_{e^{i\psi}}} \frac{dt}{t} \right) d\psi \leq c\sqrt{l(0)} \cdot \theta.$$

Теорему 3 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Скасків О.Б. *О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию*// Матем. заметки. – 1985. – Т. 37, №1. – С. 41-47.
2. Скасків О.Б. *О теореме типа Бореля для ряда Дирихле, имеющего нулевую абсциссу абсолютной сходимости*// Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, №11. – С. 1532-1541.
3. Скасків О.Б. *О росте в полуполосах аналитических функций, представленных рядами Дирихле*// Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45, №5. – С. 681-694.
4. Шеремета М.Н. *Об одном свойстве целых рядов Дирихле с убывающими коэффициентами*// Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45, №6. – С. 843-853.
5. Скасків О.Б., Стасюк Я.З. *О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей*// Матем. заметки. – 1994. – Т. 56, №5. – С. 117-128.
6. Скасків О.Б. *Про еквівалентність суми і максимального члена цілого ряду Діріхле*// Матем. студії. – 2009. – Т. 31, №1. – С. 37-46.
7. Скасків О.Б., Стасюк Я.З. *Про еквівалентність суми і максимального члена абсолютно збіжного у півплощині ряду Діріхле*// Карпатські математичні публікації. – 2009. – Т. 1, №1. – С.100-106.
8. Сало Т., Скасків О. *Про максимум модуля і максимальний член абсолютно збіжних рядів Діріхле*// Матем. Вісник НТШ. – 2007. – Т. 3. – С. 764-574.
9. Долинюк М., *Про правильне зростання суперпозиції ряду Діріхле і зростаючої функції*// Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 70. – С. 45-51.
10. Lutsyshyn M.R., Skaskiv O.B. *Borel relation for entire Dirichlet series with complex exponents*// Complex Analysis and its Applications: Book of abstracts. – Internationale conf. (Lviv, May 26-29, 2003). – Lviv, 2003. – P.45.
11. Луцишин М.Р. *Про максимальний член цілого ряду Діріхле з комплексними показниками і монотонними коефіцієнтами*// Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.51. – С.33-36.
12. Овчар І.Є., Скасків О.Б. *Теорема типу Бореля для цілих рядів Діріхле з немонотонними показниками*// Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 2010. – Вип.72. – С.232-242.