УДК 517.9

©С.М. Чуйко, О.В. Чуйко, М.В. Дзюба

Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ

# РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ МАТРИЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗБУРЕННЯ КРАЙОВОЇ УМОВИ

Знайдено конструктивні умови регуляризації матричної крайової задачі за допомогою збурення крайової умови. Побудовано узагальнений оператор Гріна та знайдено вигляд збурення крайової умови матричної крайової задачі.

We establish conditions of regularization of a linear boundary-value problem for a system of matrix differential equations. We also construct generalized Green's operator and determine the form of linear perturbation of the regularized linear boundary conditions.

**1. Постановка задачі.** Припустимо задачу про знаходження розв'язків матричного дифференциального рівняння

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \qquad (1)$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \qquad (2)$$

некоректно поставленою [1–3], а саме: припустимо, що матрична крайова задача (1), (2) не має розв'язків [4, 5]

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b]$$

для довільних неоднорідностей

$$F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b], \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}.$$

Тут $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — сталі матриці; $\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot): \ \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b] \to \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}.$$

Нами досліджено умови регуляризації [1–3] матричної крайової задачі (1), (2) за допомогою малого $0 < \varepsilon \ll 1$ збурення

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon) := \mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{U}Z(a,\varepsilon)\mathcal{V}$$

крайової умови (2):

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon) = \mathfrak{A}, \quad \mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\delta\times\alpha}, \quad \mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}. \qquad (3)$$

На відміну від статей [6, 7] регуляризація матричної крайової задачі (1), (2) відбувається не за рахунок імпульсного збурення, а за рахунок збурення крайової умови (2) у просторі [8–10]

$$Z(t,\varepsilon): \ Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b],$$
$$Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0].$$

Взагалі кажучи, припускаємо $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$. Тут $\mathbb{R}^{m\times n}$ — простір дійсних $(m \times n)$ – матриць з нормою

$$||A||_{\mathbb{R}^{m\times n}} := \max_{1\le i\le m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|, \quad A := \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

узгодженою з "кубічною" нормою у просторі $\mathbb{R}^n$; в свою чергу, $\mathbb{R}^n$ — простір дійсних векторів с "кубічною" нормою [1, 2]

$$||a||_{\mathbb{R}^n} := \max_{1\le i\le n} |a_i|, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

а також $\mathbb{C}_{m\times n}[a,b]$ — лінійний нормований простір дійсних $(m \times n)$ – матриць $A(t)$, неперервних на відрізку $[a,b]$ з нормою

$$||A(t)||_{\mathbb{C}_{m\times n}} := \max_{[a;b]} ||A(t)||_{\mathbb{R}^{m\times n}},$$

а також простір $\mathbb{C}^1_{m\times n}[a,b]$ — лінійний нормований простір дійсних $(m \times n)$ – матриць $A(t)$, неперервно-диференційовних на відрізку $[a,b]$ з нормою

$$||A(t)||_{\mathbb{C}^1_{m\times n}} := \max_{[a;b]} \sum_{k=0}^{1} ||A^{(k)}(t)||_{\mathbb{R}^{m\times n}}.$$

Нижній індекс при позначенні простору неперервних скалярних функцій $\mathbb{C}_1[a;b]$ домовимось пропускати: $\mathbb{C}[a;b]$. Умови розв'язності та структура розв'язків системи (1) були наведені в монографії [4]. Конструктивні умови розв'язності та структура періодичного розв'язку системи (1) за умов $\alpha = \beta = \gamma = \delta$ були отримані у статті [5]. Як відомо [4, с. 211], загальний розв'язок задачі Коші

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(a) = \Theta$$

має зображення

$$Z(t,\Theta) = W(t,\Theta) := U(t){\cdot}\Theta{\cdot}V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

де $U(t)$ та $V(t)$ — нормальні фундаментальні матриці:

$$U'(t) = AU(t), \quad U(a) = I_\alpha$$

та

$$V'(t) = BV(t), \quad V(a) = I_\beta.$$

**2. Умови регуляризації матричної задачі.** Загальний розв'язок $Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a,b]$ задачі Коші

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad Z(a) = \Theta$$

має зображення [5]

$$Z(t,\Theta) = W(t,\Theta) + K[F(s)](t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

де

$$K[F(s)](t) := \int_a^t U(t)U^{-1}(s)F(s)V(t)V^{-1}(s)\,ds$$

— оператор Гріна задачі Коші для матричного диференціального рівняння (1). Матрична крайова задача (1), (2) розв'язна тоді й тільки тоді, коли

$$\mathcal{L}W(\cdot,\Theta) = \mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot).$$

Позначимо $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ — природний базис [11] простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ и $c_j,\ j = 1,2,\ \ldots\ \alpha\cdot\beta$ — константи, які визначають розвинення матриці

$$\Theta = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \Xi^{(j)} c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1,2,\ \ldots\ \alpha\cdot\beta$$

по векторам $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ базиса простору $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при цьому

$$\mathcal{L}W(\cdot,\Theta) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j.$$

Визначимо оператор $\mathcal{M}[A]:\ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$, як оператор [12–14], який ставить у відповідність матриці $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, складений з $n$ стовпців матриці $A$, а також обернений оператор $\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}]:\ \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n}$. Таким чином, отримуємо лінійне алгебраїчне рівняння

$$\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j = \mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)$$

відносно $\alpha\cdot\beta$ констант $c_j \in \mathbb{R}^1,\ j = 1,2,\ \ldots\ \alpha\cdot\beta$, рівнозначне лінійному алгебраїчному рівнянню

$$\mathcal{Q}c = \mathcal{M}[\mathcal{A}] - \mathcal{M}\{\mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} \tag{4}$$

відносно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$; тут

$$\mathcal{Q} := [\,\mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(1)}]\ \ \mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(2)}]\ \ldots\ \mathcal{M}[\mathcal{Q}^{(\alpha\cdot\beta)}]\,] \in \mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta},$$

де

$$\mathcal{Q}^{(j)} := \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}, \quad j = 1,2,\ \ldots\ \alpha\cdot\beta.$$

Лінійне алгебраїчне рівняння (4) розв'язне тоді й тільки тоді, коли [1, 12–14]

$$P_{\mathcal{Q}^*}\mathcal{M}\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} = 0.$$

Тут $P_{\mathcal{Q}^*}$ — ортопроектор : $\mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\gamma\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\mathcal{Q}^*)$. Оскільки, за припущенням, матрична крайова задача (1), (2) не має розв'язків $Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b]$ для довільних $F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b]$, $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}$, для цієї задачі має місце критичний випадок [1], а саме: для матричної крайової задачі (1), (2) має місце нерівність $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$. Отже, матрична крайова задача (1), (3) матиме розв'язки

$$Z(t,\varepsilon):\ Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b],$$

$$Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0]$$

для довільних $F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b]$, $\mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}$ у випадку $P_{\mathfrak{Q}^*} = 0$; тут

$$\mathfrak{Q} := [\,\mathcal{M}[\mathfrak{Q}^{(1)}]\ \ \mathcal{M}[\mathfrak{Q}^{(2)}]\ \ldots\ \mathcal{M}[\mathfrak{Q}^{(\alpha\cdot\beta)}]\,] \in \mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta},$$

де

$$\mathfrak{Q}^{(j)} := \check{\mathcal{L}}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}, \quad j = 1, 2, \ldots \alpha\cdot\beta.$$

Як відомо [15], кожна $(m \times n)-$ матриця $Q$ у певному базисі може бути зображена у вигляді

$$Q = M \cdot J \cdot N, \quad \mathrm{rank}\ Q := \rho; \qquad (5)$$

тут $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ та $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невироджені матриці,

$$J := \begin{pmatrix} I_\rho & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Розвиненням (5) можна скористатися для знаходження умов регуляризації матричної крайової задачі (1), (2). Збурення матриці $\mathcal{Q}$ шукатимемо у вигляді

$$\mathfrak{Q} := \mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{\gamma\cdot\delta\times\alpha\cdot\beta}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Нерівність $P_{\mathfrak{Q}^*} \neq 0$ рівнозначна рівнянню

$$[\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}] \cdot [\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}]^+ = I_{\gamma\cdot\delta} \qquad (6)$$

відносно $(\gamma\cdot\delta \times \gamma\cdot\delta)-$ матриці $\mathcal{R}$. Зазначимо, що рівняння (6) розв'язне лише за умови $\gamma\delta \leq \alpha\beta$ [16]. Дійсно, припустимо рівняння (6) перевизначеним: $\gamma\delta > \alpha\beta$, при цьому

$$\mathrm{rank}\ (\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R})(\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R})^+ \leq \mathrm{rank}\ (\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}) =$$

$$= \mathrm{rank}\ (\mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R})^+ \leq \alpha\beta < \gamma\delta,$$

що суперечить рівності рангів лівої та правої частин рівняння (6). У випадку $\gamma\delta \leq \alpha\beta$ рівняння (6) має принаймні один розв'язок

$$\mathcal{R} := M \cdot \Pi_J \cdot N \in \mathbb{R}^{\gamma\delta\times\alpha\beta},$$

де $\Pi_J \in \mathbb{R}^{\gamma\delta\times\alpha\beta}$ — матриця повного рангу. Таким чином, поставлена задача про регуляризацію матричної крайової задачі (1), (2) рівнозначна задачі про регуляризацію матричного рівняння

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon)c = \mathcal{M}[\mathcal{A}] - \mathcal{M}\{\mathcal{L}K[F(s)](\cdot)\} \qquad (7)$$

з $(\gamma\delta\times\alpha\beta)-$ матрицею $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$. Остання задача розв'язна за умови $\gamma\delta \leq \alpha\beta$ у вигляді

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) := \mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := M \cdot \Pi_J \cdot N.$$

Дійсно, матриці $M$ та $N$ невироджені, тому має місце рівність [11, 4.48]

$$\mathrm{rank}\ \mathfrak{Q} = \mathrm{rank}\ (J + \varepsilon\Pi_J) = \mu\nu,$$

при цьому $P_{\mathfrak{Q}^*} = 0$, отже система (7) з матрицею $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ розв'язна для довільних неоднорідностей

$$F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a, b], \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}.$$

Припустимо, для визначеності, матрицю $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\gamma\times\alpha}$ — фіксованою, а $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta\times\delta}$ — невідомою матрицею; зазначимо, що

$$\mathcal{U}Z(a, \varepsilon)\mathcal{V} = \mathcal{U}\,W(a, c)\mathcal{V} = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathcal{U}\,\Xi^{(j)}\mathcal{V}c_j,$$

$$c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}.$$

Позначимо $\Lambda_j,\ j = 1, 2, \ldots \beta\cdot\gamma$ — природний базис [11] простору $\mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$. Невідому матрицю $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$ шукатимемо у вигляді

$$\mathcal{V} = \sum_{j=1}^{\beta\cdot\gamma} \Lambda_j\zeta_j \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}, \quad \zeta_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \ldots \beta\cdot\gamma.$$

Для цього використовуємо рівняння

$$\{\, \mathcal{M}[\mathcal{U}\,\Xi^{(1)}\mathcal{V}]\,,\ \ldots\,,\ \mathcal{M}[\mathcal{U}\,\Xi^{(\alpha\beta)}\mathcal{V}]\,\} = M\cdot\Pi_J\cdot N.$$

Позначимо матриці

$$\Pi_i := \{\, \mathcal{M}[\mathcal{U}\,\Xi^{(i)}\Lambda_1]\,,\ \ldots\,,\ \mathcal{M}[\mathcal{U}\,\Xi^{(i)}\Lambda_{\beta\gamma}]\,\},$$

де

$$\Pi_i \in \mathbb{R}^{\delta\gamma\times\beta\gamma},\ i = 1, 2,\ \ldots\ \alpha\cdot\beta.$$

Невідому матрицю $\mathcal{V}$ визначає вектор $\zeta \in \mathbb{R}^{\beta\gamma}$, для знаходження якого використовуємо систему

$$\mathfrak{D}\zeta = \mathcal{M}[\,M \cdot \Pi_J \cdot N]; \qquad (8)$$

тут

$$\mathfrak{D} := \begin{pmatrix} \Pi_1\mathcal{M}\Lambda_1 & \Pi_1\mathcal{M}\Lambda_2 & \cdots & \Pi_1\mathcal{M}\Lambda_{\beta\gamma} \\ \Pi_2\mathcal{M}\Lambda_1 & \Pi_2\mathcal{M}\Lambda_2 & \cdots & \Pi_2\mathcal{M}\Lambda_{\beta\gamma} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{\alpha\beta}\mathcal{M}\Lambda_1 & \Pi_{\alpha\beta}\mathcal{M}\Lambda_2 & \cdots & \Pi_{\alpha\beta}\mathcal{M}\Lambda_{\beta\gamma} \end{pmatrix}$$

— $(\alpha\beta\gamma\delta \times \beta\gamma)$ – вимірна стала матриця. Система (8) розв'язна за умови

$$P_{\mathfrak{D}^*}\mathcal{M}[\,M\Pi_J N] = 0. \qquad (9)$$

Якщо вимога (9) виконується (і тільки у цьому випадку) система (8) має принаймні один розв'язок

$$\zeta = \mathfrak{D}^+\mathcal{M}[\,M\Pi_J N];$$

тут $\mathfrak{D}^+$ — $(\beta\gamma \times \alpha\beta\gamma\delta)$ – вимірна псевдообернена (за Муром-Пенроузом) матриця [1], крім того, $P_{\mathfrak{D}^*}$ — матриця-ортопроектор:

$$P_{\mathfrak{D}^*}: \ \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta} \to \mathbb{N}(\mathfrak{D}^*).$$

Таким чином, поставлену задачу про регуляризацію матричної крайової задачі (1), (2) розв'язує принаймні одна матриця

$$\mathcal{V} = \mathcal{M}^{-1}[\mathfrak{D}^+\mathcal{M}(\,M\Pi_J N)],$$

яка визначає збурення матриці $\mathcal{Q}$ вигляду

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) := \mathcal{Q} + \varepsilon\mathcal{R}, \quad \mathcal{R} = M \cdot \Pi_J \cdot N,$$

при цьому $P_{\mathfrak{Q}^*}(\varepsilon) = 0$, отже система (7) з матрицею $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ розв'язна для довільних неоднорідностей. За умови

$$\mathfrak{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\{\mathcal{A} - \check{\mathcal{L}}K[F(s)](\cdot,\varepsilon)\} \in \mathbb{C}_{\alpha\beta}[0,\varepsilon_0] \tag{10}$$

система (7) має розв'язок

$$c = \mathfrak{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\{\mathcal{A} - \check{\mathcal{L}}K[F(s)](\cdot,\varepsilon)\} + P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon)c_r,$$

$$c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Таким чином, отримуємо розв'язок матричної крайової задачі (1), (3) вигляду

$$Z(t,\varepsilon) = W(t,c_r) + G[F(s);\mathfrak{A}](t,\varepsilon), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де

$$W(t,c_r) := \mathcal{M}^{-1}[X(t)P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon)c_r]$$

— загальний розв'язок однорідної частини матричної крайової задачі (1), (3),

$$G[F(s);\mathfrak{A}](t,\varepsilon) := K[F(s)](t)+ \tag{11}$$

$$+\mathcal{M}^{-1}\left\{\mathfrak{Q}^+(\varepsilon)\mathcal{M}\left\{\mathcal{A} - \check{\mathcal{L}}K[F(s)](\cdot,\varepsilon)\right\}\right\}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі про регуляризацію матричної крайової задачі (1), (3), $P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon)$ — матриця, складена з $r$ лінійно-незалежних стовпців матриці-ортопроектора

$$P_{\mathfrak{Q}}(\varepsilon): \ \mathbb{R}^{\alpha\beta} \to \mathbb{N}(\mathfrak{Q}(\varepsilon)).$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

**Теорема.** *Припустимо, що матрична крайова задача (1), (2) не має розв'язків*

$$Z(t) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b]$$

*для довільних неоднорідностей*

$$F(t) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[a,b], \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}.$$

*За умови $\gamma\delta \le \alpha\beta$ та за вимог (9), (10) за допомогою малого $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$ збурення*

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon) := \mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{U}Z(a,\varepsilon)\mathcal{V}$$

*крайової умови (2):*

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon) = \mathfrak{A}, \quad \mathcal{U} \in \mathbb{R}^{\delta\times\alpha}, \quad \mathcal{V} \in \mathbb{R}^{\beta\times\gamma}$$

*матрична крайова задача (1), (3) отримує розв'язки вигляду*

$$Z(t,\varepsilon) = W(t,c_r) + G[F(s);\mathfrak{A}](t,\varepsilon), \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

*у просторі*

$$Z(t,\varepsilon): \ Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1_{\alpha\times\beta}[a;b],$$

$$Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{\alpha\times\beta}[0,\varepsilon_0].$$

*Тут $G[F(s);\mathfrak{A}](t,\varepsilon)$ — узагальнений оператор Гріна (11) задачі про регуляризацію матричної крайової задачі (1), (3),*

$$W(t,c_r) := \mathcal{M}^{-1}[X(t)P_{\mathfrak{Q}_r}(\varepsilon)c_r]$$

*— загальний розв'язок однорідної частини матричної крайової задачі (1), (3).*

Зазначимо, що регуляризація матричної крайової задачі (1), (2) може бути здійснена аналогічно до статей [6,7] за рахунок імпульсного збурення розв'язків.

**3. Приклад.** *Умови доведеної теореми виконуються у випадку матричної задачі*

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad \mathcal{L}Z(\cdot) = \mathfrak{A}, \tag{12}$$

*яка для довільних неоднорідностей*

$$F(t) \in \mathbb{C}_{2\times 3}[0;2\pi], \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

*не має розв'язків у класі $Z(t) \in \mathbb{C}_{2\times 3}[0;2\pi]$; в той же час у класі функцій*

$$Z(t,\varepsilon): \ Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}_{2\times 3}[0;2\pi],$$

$$Z(t,\cdot) \in \mathbb{C}_{2\times 3}[0,\varepsilon_0]$$

*за допомогою малого збурення*

$$\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon) := \mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) + \varepsilon\mathcal{U}Z(0,\varepsilon)\mathcal{V}$$

*крайової умови (12) регуляризована крайова задача для системи (12) стає розв'язною для довільних неоднорідностей; тут* $\tau_1 := 0, \tau_2 := \pi, \tau_3 := 2\pi$,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}Z(\cdot) := \sum_{i=1}^{3} M_i Z(\tau_i) N_i, \quad M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$N_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$N_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок задачі Коші

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(a) = \Theta$$

для системи (12) має зображення

$$W(t,\Theta) = U(t)\cdot\Theta\cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{2\times 3},$$

де $U(t)$ и $V(t)$ — нормальні

$$U(0) = I_2, \quad V(0) = I_3$$

фундаментальні матриці:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix},$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 & -\sin 2t \\ -e^t + \cos 2t & e^t & -\sin 2t \\ \sin 2t & 0 & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$\Xi^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \dots,$$

$$\Xi^{(6)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

природний базис простору $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Загальний розв'язок задачі (12) визначає матриця

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-e^{2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

та її ортопроектор

$$P_{\mathcal{Q}^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $P_{\mathcal{Q}^*} \neq 0$, то матрична задача (12) не має розв'язків у класі $Z(t) \in \mathbb{C}_{2\times 3}[0;2\pi]$ для довільних неоднорідностей

$$F(t) \in \mathbb{C}_{2\times 3}[0;2\pi], \quad \mathfrak{A} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Матрицю $Q$ можна подати у вигляді $Q = MJN$; тут

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -e^{\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-e^{2\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

та

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— невироджені матриці,

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки умова $\gamma\delta = \alpha\beta = 6$ виконується, рівняння (6) має щонайменше один розв'язок

$$\mathcal{R} := M \cdot \Pi_J \cdot N \in \mathbb{R}^{6\times 6},$$

де

$$\Pi_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-e^{2\pi}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{-1+e^{2\pi}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матриця, для якої $\det(J+\varepsilon\Pi_J) = e^{\pi}\varepsilon^2(1+\varepsilon) \neq 0$. Стала матриця

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

задовольняє вимогу (9). Таким чином, поставлену задачу про регуляризацію матричної крайової задачі (12) розв'язує матриця

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

яка визначає збурення матриці $\mathcal{Q}$ вигляду

$$\mathfrak{Q}(\varepsilon) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -e^{\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon & 0 & 1-e^{2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при цьому $P_{\mathfrak{Q}^*} = 0$, крім того виконується умова (10). Отже матрична крайова задача (12) за допомогою малого збурення $\check{\mathcal{L}}Z(\cdot,\varepsilon)$ крайової умови стає розв'язною для довільних неоднорідностей. Зокрема, покладемо

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} \cos 5t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо функцію $\varphi(t) := -2\cos t - 9\sin 3t$. Оскільки матриця $\mathfrak{Q}(\varepsilon)$ невироджена, загальний розв'язок збуреної крайової задачі для системи (12) єдиний:

$$G[F(s);\mathcal{A}](t) = K[F(s)](t) =$$

$$= \begin{pmatrix} K[F(s)](t)\mathcal{P}_1 & K[F(s)](t)\mathcal{P}_2 & K[F(s)](t)\mathcal{P}_3 \end{pmatrix};$$

тут

$$\mathcal{P}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{P}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{P}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а також

$$K\Big[F(s)\Big](t)\mathcal{P}_1 = \frac{1}{96}\times$$

$$\times \begin{pmatrix} \varphi(t) + 9\cos 3t - 7\cos 5t - 2\sin t + 25\sin 5t \\ -2\cos t + 9\cos 3t - 7\cos 5t \end{pmatrix},$$

$$K\Big[F(s)\Big](t)\mathcal{P}_2 = 0, \quad K\Big[F(s)\Big](t)\mathcal{P}_3 = \frac{1}{96}\times$$

$$\times \begin{pmatrix} \varphi(t) - 9\cos 3t + 11\cos 5t + 2\sin t + 5\sin 5t \\ 2\sin t - 9\sin 3t + 5\sin 5t \end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що запропонована у статті техніка регуляризації матричної крайової задачі за допомогою збурення крайової умови може бути перенесена на матричні диференціально-алгебраїчні крайові задачі [9, 10], а також на матричні крайові задачі з запізненням [1, 17].

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.
2. *Азбелев Н.В., Максимов Н.П., Рахматуллина Л.Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 277 с.
3. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971. — 104 с.
4. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука. — 1969. — 367 с.
5. *Boichuk A.A., Krivosheya S.A.* A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation // Differential Equations. — 2001. — **37**, № 4. — P. 464 — 471.
6. *Чуйко С.М., Чуйко О.В.* Регуляризація періодичної крайової задачі за допомогою імпульсного впливу // Буковинский математичний журнал. — **1**. № 3 — 4, 2013. С. 158 — 161.
7. *Chuiko S.M.* On the regularization of a linear Fredholm boundary-value problem by a degenerate pulsed action // Journal of Mathematical Sciences — 2014. — **197**, № 1. — P. 138 — 150.
8. *Чуйко С.М.* Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динамические системы. — 2014. — **4 (32)**, № 1-2. — С. 101 — 107.
9. *Чуйко С.М.* Обобщенное матричное дифференциально алгебраическое уравнение // Український математичний вісник. — 2015. — **12**, № 1. — С. 11 – 26.
10. *Чуйко С.М.* Оператор Грина обобщенной матричной дифференциально-алгебраической краевой задачи// Сибирский математический журнал. — 2015. — **56**, № 4. — С. 942 — 951.
11. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. — М.: Наука. — 1984. — 318 с.
12. *Чуйко С.М.* О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика. — 2014, **19**, Вип. 1 (21), С. 49 — 57.
13. *Чуйко С.М.* О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестник Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика. — № 1120. — 2014. — С. 85 – 94.
14. *Чуйко С.М.* О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Чебышевский сборник. — 2015. — **16**, Вып. 1. — С. 52 – 66.
15. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. 3 изд. М.: Изд. МЦНМО. — 2009. — 672 с.
16. *Chuiko S.M., Chuiko E.V., Belushenko A.V.* On a regularization method for solving linear matrix equation // Bull. of Taras Shevchenko National Univ. Ser. Math. — 2014. — **1**, P. 12 — 14.
17. *Бігун Я.Й.* Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням // Укр. мат. журн. — 2007. —- **59**, № 4. – С. 435 — 446.