УДК УДК 517.929

©2016 р.   Л.М. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне

НЕЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ З АСИМПТОТИЧНО СТАЛИМИ РОЗВ'ЯЗКАМИ

Отримано умови існування асимптотично сталих розв'язків нелінійних диференціально-різницевих рівнянь.

We obtain conditions for the existence of asymptotically constant solutions of nonlinear differential-difference equations.

Нехай $\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел, $\mathbb{N}$ – множина всіх натуральних чисел, $n \in \mathbb{N}$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – C^0-відображення і $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – C^1-відображення.

Розглянемо рівняння

$$\frac{d(x(t+1) - \varphi(x(t)))}{dt} = F(x(t) - \varphi(x(t-1))),\ t \geqslant 0. \quad (1)$$

Наведемо умови, коли всі розв'язки рівняння (1) є асимптотично сталими.

Будемо вважати, що відображення F задовольняє умови:
1) $F(0) = 0$;
2) нульовий розв'язок рівняння

$$\frac{dz(t)}{dt} = F(z(t-1)),\ t \geqslant 0, \quad (2)$$

є глобально асимптотично стійким, тобто нульовий розв'язок рівняння (2) є стійким за Ляпуновим [1] і для кожного розв'язку $z = z(t)$ цього рівняння

$$\lim_{t\to+\infty} \|z(t)\|_{\mathbb{R}^n} = 0. \quad (3)$$

У випадку виконання цих умов дослідження розв'язків диференціально-різницевого рівняння (1) зводиться до дослідження розв'язків різницевого рівняння

$$u(t+1) - \varphi(u(t)) = z(t), \quad t \geqslant 0,$$

права частина якого є розв'язком рівняння (2), для якої виконується (3).

Справджується наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай відображення F задовольняє умови 1 і 2. Якщо для деякої сталої $q \in [0, 1)$ для відображення φ справджується співвідношення*

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant q\|x-y\|_{\mathbb{R}^n},\ \ x, y \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

то кожний неперервно диференційовний розв'язок $x = x(t)$ рівняння (1) є асимптотично сталим і

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = a, \quad (5)$$

де a – нерухома точка відображення φ.

Доведення. Зазначимо, що кожному неперервно диференційовному розв'язку $x = x(t)$ рівняння (1) відповідає неперервно диференційовна функція $z = z(t)$, що є розв'язком рівняння (2), і справджується тотожність $x(t+1) - \varphi(x(t)) \equiv z(t)$. Оскільки $\varphi(a) = a$ і $x(t+1) - a \equiv \varphi(x(t)) - \varphi(a) + z(t)$, то завдяки (4)

$$\|x(t+1) - a\|_{\mathbb{R}^n} \leq q\|x(t) - a\|_{\mathbb{R}^n} + \|z(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

для всіх $t \geq 0$. Тому для всіх $m \in \mathbb{N}$ і $t \geq 0$

$$\|x(t+m) - a\|_{\mathbb{R}^n} \leq$$
$$\leq q^m\|x(t) - a\|_{\mathbb{R}^n} + \sum_{k=0}^{m-1} q^k \|z(t+m-k-1)\|_{\mathbb{R}^n},$$

і, отже, для всіх $m \in \mathbb{N}$

$$\max_{t\in[0,1]} \|x(t+m) - a\|_{\mathbb{R}^n} \leq$$
$$\leq q^m \max_{t\in[0,1]} \|x(t) - a\|_{\mathbb{R}^n} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{m-1} q^k \max_{t\in[0,1]} \|z(t+m-k-1)\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Звідси випливає (5), оскільки

$$\max_{t\in[0,1]} \|x(t)-a\|_{\mathbb{R}^n} < \infty, \quad q\in[0,1)$$

і

$$\lim_{t\to+\infty} \sum_{k=0}^{m-1} q^k \max_{t\in[0,1]} \|z(t+m-k-1)\|_{\mathbb{R}^n} = 0. \quad (6)$$

Співвідношення (6) виконується, оскільки функція $z=z(t)$ є розв'язком рівняння (2) і для нього виконується співвідношення (3).

Теорему 1 доведено.

Приклад. Розглянемо нелінійне скалярне диференціально-різницеве рівняння

$$\frac{d\left(x(t+1)-\operatorname{arctg}\dfrac{x(t)}{2}\right)}{dt} =$$
$$= -x(t) + \operatorname{arctg}\frac{x(t-1)}{2},\ t\geqslant 0. \qquad (7)$$

Це рівняння є окремим випадком рівняння (1), для якого

$$F(x)=-x, \quad \varphi(x)=\operatorname{arctg}\frac{x}{2}, \quad F(0)=0$$

і нульовий розв'язок диференціально-різницевого рівняння

$$\frac{dz(t)}{dt} = -z(t-1),\ t\geqslant 0, \qquad (8)$$

є асимптотично стійким [1], оскільки всі розв'язки відповідного характеристичного рівняння $\lambda + e^{-\lambda} = 0$ мають від'ємні дійсні частини. Оскільки рівняння (8) лінійне, то нульовий розв'язок цього рівняння є глобально асимптотично стійким.

Зазначимо, що точка 0 є нерухомою точкою C^1-відображення $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ і для φ виконується співвідношення, аналогічне (4). Справді, $\operatorname{arctg} 0 = 0$ і за теоремою Лагранжа про скінченні прирости

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{2}, \quad x,y\in\mathbb{R}.$$

Тому за теоремою 1 кожний неперервно диференційовний розв'язок $x=x(t)$ рівняння (6) асимптотично сталий і $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=0$.

Далі розглянемо C^0-відображення $G:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, C^1-відображення $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ та відповідне рівняння

$$\frac{d(x(t+1)-\phi(x(t)))}{dt} =$$
$$= G(x(t+1)-\phi(x(t)), x(t)-\phi(x(t-1)),$$
$$x(t-1)-\phi(x(t-2))),\ t\geqslant 0. \qquad (9)$$

Теорема 2. *Нехай:*
1) $G(0,0,0)=0$;
2) нульовий розв'язок рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = G(x(t), x(t-1), x(t-2)), \quad t\geq 0,$$

глобально асимптотично стійкий;
3) для деякої сталої $q\in[0,1)$ відображення φ задовольняє співвідношення

$$\|\phi(x)-\phi(y)\|_{\mathbb{R}^n} \leqslant q\|x-y\|_{\mathbb{R}^n}, \quad x,y\in\mathbb{R}^n.$$

Тоді кожний неперервно диференційовний розв'язок $x=x(t)$ рівняння (9) асимптотично сталий і $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=a$, де a – нерухома точка відображення ϕ.

Ця теорема доводиться аналогічним чином, як і теорема 1.

Аналогічні рівняння досліджувалися в [2], [3].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: Вид-во Українського держ. ун-ту водн. госп-ва та природокористування, 2003. – 288 с.

2. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1986. – 280 с.

3. *Слюсарчук Л. М.* Асимптотическое поведение решений систем разностных и дифференциально-разностных уравнений // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. – 119 с.