УДК 517.96

©2016 р. **В.А. Літовченко, Г.М. Унгурян**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

# ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ РЕГУЛЯРНИМИ ПОЧАТКОВИМИ РОЗПОДІЛАМИ ТИПУ $S'$

Для параболічних типу Шилова рівнянь із змінними коефіцієнтами обмеженої гладкості та невід'ємним родом встановлено розв'язність задачі Коші в класі необмежених початкових даних, які є регулярними розподілами типу $S'$.

The solvability of the Cauchy problem for the Shilov–type parabolic systems with coefficients of bounded smoothness and of nonnegative kind are established for the class of unlimited initial data. The initial data are regular distributions of type $S'$.

**Вступ.** У [1] Я.І. Житомирський досліджуючи проблему розширення класу параболічних за Г.Є. Шиловим систем рівнянь із сталими коефіцієнтами, означує новий клас параболічних систем типу Шилова із молодшими коефіцієнтами, залежними лише від просторової змінної, які є параболічно стійкими до зміни своїх коефіцієнтів. Для таких систем методом послідовних наближень він установив існування розв'язку задачі Коші з гладкими обмеженими початковими даними, а відтак, і коректну розв'язність цієї задачі в класі обмежених функцій. Подальше дослідження задачі Коші для параболічних систем типу Шилова проводиться в [2–6]. Тут для систем із невід'ємним родом коефіцієнти яких вже можуть залежати і від $t$ (неперервно), є обмеженими та нескінченно диференційовними за просторовою змінною, розвинено теорію задачі Коші у просторах типу $S$ та $S'$ Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є. Зокрема, знайдено фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) та досліджено його основні властивості, встановлено коректу розв'язність цієї задачі у зазначених просторах, досліджено якісні властивості розв'язків, описано класи граничних значень гладких розв'язків, які є елементами просторів типу $S$ та $S'$, тощо.

У [7] розглядаються параболічні рівняння типу Шилова із невід'ємним родом, коефіцієнти яких мають скінченний ступінь гладкості, тобто є скінченно диференційовними за просторовою змінною. Для таких рівнянь побудовано ФРЗК та досліджено його властивості.

У пропонованій роботі для розглянутих у [7] параболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами досліджуються питання про існування класичних розв'язків задачі Коші в класі необмежених початкових даних, які є регулярними розподілами типу Жевре.

**1. Постановка задачі.** Нехай $T > 0$ – фіксоване дійсне число; $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел; $\mathbb{R}^n$ – дійсний $n$-вимірний простір із скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ та нормою $\|x\| := (x, x)^{1/2}$, $\mathbb{R} := \mathbb{R}^1$; $\mathbb{Z}_+^n$ – множина всіх $n$-вимірних мультиіндексів, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{Z}_+^1$; $\Pi_M := \{(t, x)|\ t \in M,\ \ x \in \mathbb{R}^n\}$, $M \subset \mathbb{R}$; $i$ – уявна одиниця, $|x + iy| := (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$; $|z|_+ := |z_1| + \ldots + |z_n|$, $z^l := z_1^{l_1} \ldots z_n^{l_n}$, якщо $z \in \mathbb{R}^n$ і $l \in \mathbb{Z}_+^n$. Через $S$ позначимо простір Л. Шварца нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^n$ швидкоспадних функцій, а через $S_\alpha$, $\alpha > 0$, – простір типу $S$ Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є. [8]:

$$S_\alpha := \{\phi \in S|\ \exists \delta > 0\, \forall\, k \in \mathbb{Z}_+^n\, \exists\, c_k > 0\, \forall\, x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|\partial_x^k \phi(x)| \leq c_k e^{-\delta \|x\|^{1/\alpha}}\};$$

$S'$ і $S'_\alpha$ – відповідні топологічно спряжені простори.

Згідно з критерієм збіжності у просторі $S_\alpha$, послідовність $\{\phi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \subset S_\alpha$ збігається до $\phi$ із $S_\alpha$ у цьому просторі, тобто, $\phi_\nu \xrightarrow[n\to\infty]{S_\alpha} \phi$, якщо [8]:

1)$\forall\ q\in\mathbb{Z}_+^n\ \forall\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n$ :

$$|\partial_x^k(\phi_\nu(x)-\phi(x))|\xrightarrow[\nu\to\infty]{\mathbb{K}\subset\mathbb{R}^n}0$$

(тут йдеться про рівномірну збіжність на кожному компакті $\mathbb{K}$);

2) $\forall\delta>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_+^n\ \exists c_k>0\ \forall x\in\mathbb{R}^n$

$$\forall\nu\in\mathbb{N}:|\partial_x^k\phi_\nu(x)|\le c_k e^{-\delta\|x\|^{1/\alpha}}.$$

Співвідношення між просторами типу $S$ і топологічно спряженими з ними характеризують наступні неперервні вкладення:

$$S_\alpha\subset S_\beta\subset S\subset L_2(\mathbb{R}^n)\subset S'\subset S'_\beta\subset S'_\alpha,$$

$$0<\alpha<\beta,$$

де $L_2(\mathbb{R}^n)$ – відповідний простір Лебега.

Далі, сукупність усіх регулярних узагальнених функцій із $S'_\alpha$ позначимо через $\hat{S}'_\alpha$. Зазначимо, що $f$ із $S'_\alpha$ належить до $\hat{S}'_\alpha$, якщо його дія визначається рівністю

$$\langle f,\phi\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{f(x)}\phi(x)dx\quad(\forall\phi\in S_\alpha)\qquad(1)$$

за допомогою деякої вимірної за Лебегом функції $f(\cdot)$, для якої майже скрізь на $\mathbb{R}^n$ виконується оцінка

$$|f(x)|\le c_\delta e^{\delta\|x\|^{1/\alpha}}\qquad(2)$$

при кожному $\delta>0$. Прикладом регулярної узагальненої функції із $S'_\alpha$ є функціонал $f_P$, породжений многочленом $P(\cdot)$ довільно фіксованого степеня, який на елементах $\phi\in S_\alpha$ визначається рівністю (1) при $f(\cdot)=P(\cdot)$.

Розглянемо диференціальне рівняння порядку $p$ вигляду

$$\partial_t u(t;x)=\sum_{|q|_+\le p}a_q(t;x)i^{|q|_+}\partial_x^q u(t;x),$$

$$(t;x)\in\Pi_{(0,T]},\qquad(3)$$

права частина якого допускає зображення

$$\sum_{|q|_+\le p}a_q(t;x)i^{|q|_+}\partial_x^q u(t;x)=\{P_0(t;i\partial_x)+$$

$$+P_1(t,x;i\partial_x)\}u(t;x),$$

де

$$P_0(t;i\partial_x):=\sum_{|q|_+\le p}a_q(t)i^{|q|_+}\partial_x^q u(t;x),$$

$$P_1(t,x;i\partial_x):=\sum_{|k|_+\le p_1}a_k(t;x)i^{|k|_+}\partial_x^k u(t;x),$$

причому рівняння

$$\partial_t u(t;x)=P_0(t;i\partial_x)u(t;x),\ (t;x)\in\Pi_{(0,T]},\qquad(4)$$

є параболічним за Г.Є. Шиловим у шарі $\Pi_{(0,T]}$ з показником параболічності $h$, $0<<h\le p$, зведеним порядком $p_0$ та невід'ємним родом $\mu$ [9].

Для рівняння (3) припускатимемо виконання ще таких умов:

(A) $0\le p_1<h-n(1-h\mu/p_0),\ 0\le\mu$;

(B) коефіцієнти $a_q(t;x)$ на множині $\Pi_{[0,T]}$ є неперервними за змінною $t$ рівномірно стосовно $x$, неперервно диференційовними за змінною $x$ до порядку $\alpha_*\ge p$ включно і обмеженими разом із своїми похідними комплексно значними функціями.

**Прикладом** рівняння (3) при $n=1$, для якого виконуються умови (A) і (B) із $\alpha_*=3$ є таке рівняння

$$\partial_t u(t;x)=\left\{t^2\partial_x^3+\partial_x^2-\sqrt{t}\partial_x+\frac{t\sqrt[3]{x^{10}}}{(1+x^2)^2}\right\}\times$$

$$\times u(t;x),\ t\in(0;T],\ x\in\mathbb{R}.$$

Відповідним параболічним за Шиловим рівнянням є

$$\partial_t u(t;x)=\left\{t^2\partial_x^3+\partial_x^2-\sqrt{t}\partial_x\right\}u(t;x),$$

$$t\in(0;T],x\in\mathbb{R},$$

для якого $p=p_0=3$, $h=2$, а $\mu\ge0$.

Зазначимо, що наведене рівняння не відноситься до класу рівнянь, параболічних за Петровським, ні до класу рівнянь, параболічних за Шиловим.

Наведемо тепер важливі для подальших наших досліджень відомості про ФРЗК для рівнянь (3) і (4).

Нехай $G(t,\tau;\cdot)$, $0\le\tau<t\le T$, – ФРЗК для рівняння (4). Відомо [10], що

$$G(t,\tau;\cdot)=F^{-1}\left[\Theta_\tau^t(\xi)\right](t,\tau;\cdot),$$

$$\Theta_{\tau}^{t}(\xi) := e^{\int_{\tau}^{t} P_0(\beta;\xi)d\beta}$$

(тут $F$ – оператор перетворення Фур'є, а $P_0(\beta;\cdot)$ – символ диференціального виразу $P_0(\beta; i\partial_x)$), причому правильні такі оцінки:

$$\exists\delta > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \exists c > 0\ \forall t \in (\tau; T]\ \forall\tau \in [0; T)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : |\partial_x^k G(t, \tau; x)| \le c(t-\tau)^{-\frac{n+|k|_+}{h}} \times$$

$$\times e^{-\delta\left(\frac{\|x\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\ \alpha := \mu/p_0.$$

Згідно з [7] ФРЗК для (3) має структуру

$$Z\left(t, x; \tau, \xi\right) = G\left(t, \tau; x-\xi\right) + W\left(t, x; \tau, \xi\right),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \in \mathbb{R}^n,$$

де

$$W\left(t, x; \tau, \xi\right) := \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G\left(t, \beta; x-y\right) \times$$

$$\times \Phi\left(\beta, y; \tau, \xi\right) dy.$$

Тут $\Phi\left(t, x; \tau, \xi\right) := \sum_{l=1}^{\infty} K_l\left(t, x, \tau, \xi\right)$ – функціональний ряд, у якому

$$K_1\left(t, x, \tau, \xi\right) := P_1\left(t, x; i\partial_x\right) G\left(t, \tau; x-\xi\right),$$

$$K_l\left(t, x, \tau, \xi\right) := \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1\left(t, x, \beta, y\right) \times$$

$$\times K_{(l-1)}\left(\beta, y, \tau, \xi\right) dy, \quad l > 1.$$

Умови (A) і (B) для функції $Z(t, x; \tau, \xi)$ забезпечують її диференційовність за змінною $t$ та неперервну диференційовність за змінною $x$ до порядку $\alpha_*$ включно, а також, виконання для всіх $t \in (\tau; T]$, $\tau \in [0; T)$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ і $|q|_+ \le \alpha_*$ таких оцінок [7]:

$$|\partial_t Z(t, x; \tau, \xi)| \le c_1(t-\tau)^{-\frac{n+p}{h}} \times$$

$$\times e^{-\delta_1\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}; \tag{5}$$

$$|\partial_x^q Z(t, x; \tau, \xi)| \le c_2(t-\tau)^{-\frac{n+|q|_+}{h}} \times$$

$$\times e^{-\delta_2\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}; \tag{6}$$

$$|\partial_x^q \Phi(t, x; \tau, \xi)| \le c_3(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+|q|_+}{h}} \times$$

$$\times e^{-\delta_3\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \tag{7}$$

(тут оціночні сталі $c_j$, $\delta_j$ не залежать від $t$, $\tau$, $x$ і $\xi$, а $\delta_j$ – ще й від $q$).

Далі, задамо для рівняння (3) початкову умову

$$u(t;\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in S'_{1-\alpha}, \tag{8}$$

яку розумітимемо як слабку збіжність у просторі $S'_{1-\alpha}$, тобто

$$\langle u(t;\cdot), \phi(\cdot)\rangle \xrightarrow[t\to+0]{} \langle f, \phi(\cdot)\rangle\ (\forall\phi \in S_{1-\alpha})$$

**Означення.** Розв'язком задачі Коші (3), (8) назвемо звичайну функцію $u(t; x)$, визначену на множині $\Pi_{(0;T]}$, яка задовольняє рівняння (3) у класичному розумінні, а початкову умову (8) у сенсі слабкої збіжності в просторі $S'_{1-\alpha}$.

**2. Розв'язування задачі Коші.** Оцінки (6) дозволяють у кожній фіксованій точці $(t; x) \in \Pi_{(0;T]}$ продовжити дію узагальненої функції $f$ із класу $\hat{S}'_{1-\alpha} \subset S'_{1-\alpha}$ не фундаментальний розв'язок $Z\left(t, x; 0, \cdot\right)$ рівняння (3) за правилом (1):

$$\langle f, Z(t, x; 0, \cdot)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\xi)} Z\left(t, x; 0, \xi\right) d\xi,$$

$$(t; x) \in \Pi_{(0;T]}.$$

А це означає, що функція

$$u(t; x) = \langle f, Z(t, x; 0, \cdot)\rangle, \quad f \in S'_{1-\alpha}, \tag{9}$$

є коректно визначеною на множині $\Pi_{(0;T]}$.

Дослідимо властивості цієї функції $u$.

**Лема 1.** *На множині $\Pi_{(0;T]}$ функція $u(t; x)$, яка визначається рівністю (9), є диференційовною один раз за змінною $t$, а за змінною $x$ – до порядку $\alpha_*$ включно, при цьому:*

$$\partial_t u(t; x) = \langle f, \partial_t Z(t, x; 0, \cdot)\rangle;$$

$$\partial_x^q u(t; x) = \langle f, \partial_x^q Z\left(t, x; 0, \cdot\right)\rangle, \quad |q|_+ \le \alpha_*. \tag{10}$$

**Доведення.** З огляду на властивості функції $Z$ стосовно змінних $t$ і $x$, доведення зводиться до обгрунтування можливості внесення відповідної похідної під знак інтеграла у рівності (9).

Зафіксуємо довільну точку $(t_0, x_0)$ із $\Pi_{(0;T]}$ і розглянемо множину $Q := [t_0/2; T] \times \times \mathbb{K}_r(x_0)$, де $\mathbb{K}_r(x_0)$ – куля у $\mathbb{R}^n$ з центром у т. $x_0$ скінченого радіуса $r$. Тоді згідно з оцінками (2), (5) і (6) для всіх $(t; x) \in Q$ маємо:

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\xi)} \partial_t Z\left(t, x; 0, \xi\right) d\xi \Big| \le c_\delta c_1 \left(\frac{2}{t_0}\right)^{\frac{n+p}{h}} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\delta ||\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}}} e^{-\delta_1 \left(\frac{||x-\xi||}{T^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\xi \le$$

$$\le c_\delta c_1 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{K}_r(x_0)} \{e^{-\frac{\delta_1}{2} \left(\frac{||x-\xi||}{T^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \delta ||\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}}}\} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta_1}{2} (\frac{||\eta||}{T^\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\eta;$$

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\xi)} \partial_x^q Z(t, x; 0, \xi) d\xi \Big| \le c_\delta c_2 \left(\frac{2}{t_0}\right)^{\frac{n+|q|_+}{h}} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\delta ||\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}}} e^{-\delta_2 \left(\frac{||x-\xi||}{T^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\xi \le$$

$$\le c_\delta c_1 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{K}_r(x_0)} \{e^{-\frac{\delta_2}{2} \left(\frac{||x-\xi||}{T^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \delta ||\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}}}\} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta_2}{2} \left(\frac{||\eta||}{T^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\eta, \ |q|_+ \le \alpha_*.$$

Оскільки при достатньо малому $\delta > 0$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{K}_r(x_0)} \{e^{-\frac{\delta_2}{2} \left(\frac{||x-\xi||}{T^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \delta ||\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}}}\} < +\infty,$$

то попередні оцінки характеризують рівномірну збіжність на множині $Q$ формально продиференційованих інтегралів

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\xi)} \partial_t Z(t, x; 0, \xi) d\xi$$

і

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\xi)} \partial_x^q Z(t, x; 0, \xi) d\xi, \quad |q|_* \le \alpha_*.$$

А це, у свою чергу, обгрунтовує існування $\partial_t u(t; x)$ у т. $t = t_0$ при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}^n$ і – $\partial_x^q u(t; x)$, $|q|_* \le \alpha_*$, у т. $x = x_0$ при кожному фіксованому $t \in (0; T]$, та правильність формул (10).

Лема доведена.

**Лема 2.** *При кожному фіксованому $t \in (0; T]$ функція $u(t; \cdot)$, що визначається рівністю (9), є елементом класу $\hat{S}'_{1-\alpha}$.*

**Доведення.** З диференційовності функції $u(t; \cdot)$, $t \in (0; T]$, випливає її належність до $L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$.

Урахувавши співвідношення

$$||\xi||^\beta = ||\xi - x + x||^\beta \le (||x - \xi|| + ||x||)^\beta \le$$

$$\le 2^\beta (||x - \xi||^\beta + ||x||^\beta), \quad \beta > 0, \quad \{x; \beta\} \subset \mathbb{R}^n,$$

згідно з оцінками (2) і (6) для всіх $(t; x) \in \Pi_{(0;T]}$ і $\delta \in \Big(0; \delta_2 / \Big(2 \left(2t^\alpha\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\Big)\Big)$, де $\delta_2$ – константа з (6), маємо

$$|u(t; x)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(\xi)| |Z(t, x; 0, \xi)| d\xi \le$$

$$\le c_\delta c_2 t^{-\frac{n+p_1}{h}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{\delta ||\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}}} e^{-\delta_2 \left(\frac{||x-\xi||}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\xi \le$$

$$\le c_\delta c_2 t^{-\frac{n+p_1}{h}} e^{\delta (2||x||)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-(\delta_2 / (2t^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}) - \delta 2^{\frac{1}{1-\alpha}}) ||x-\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}}} \times$$

$$\times e^{-\frac{\delta_2}{2} \left(\frac{||x-\xi||}{t^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\xi \le c_\delta c_2 t^{\alpha n - \frac{n+p_1}{h}} \times$$

$$\times \Big( \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta_2}{2} ||\eta||^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\eta \Big) e^{\delta (2||x||)^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

Отже, при кожному фіксованому $t$ з $(0; T]$ для функції $u(t; \cdot)$ на $\mathbb{R}^n$ виконується відповідна оцінка (2) із довільним $\delta > 0$.

Зазначимо також, що оцінка (11) забезпечує визначеність та неперервність лінійного функціонала $u_t$ типу функції $u(t; \cdot)$ на елементах $\phi \in S_{1-\alpha}$ за правилом

$$\langle u_t, \phi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{u(t; x)} \phi(x) dx, \quad t \in (0; T].$$

Таким чином, $u_t \in \hat{S}'_{1-\alpha}$ при кожному $t \in (0; T]$.

Лема доведена.

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

**Теорема.** *Нехай виконуються умови (A) і (B), а початковий розподіл $f$ із $S'_{1-\alpha}$ є елементом класу $\hat{S}'_{1-\alpha}$, тоді розв'язком задачі Коші (3), (8) є відповідна функція*

$$u(t;x) = \langle f, Z\,(t,x;0,\cdot)\rangle,\ (t;x) \in \Pi_{(0;T]},$$

*яка на множині $\Pi_{(0;T]}$ є диференційовною за змінною $t$, а також, диференційовною за змінною $x$ до порядку $\alpha_*$ включно, причому для її похідних справджуються формули (10).*

**Доведення.** З лінійності функціонала $f$ та твердження леми 1 знаходимо, що

$$\Big\{\partial_t - \sum_{|q|_+\le p} a_q(t;x) i^{|q|_+}\partial_x^q\Big\} u(t;x) =$$

$$= \langle f, \big\{\partial_t - \sum_{|q|_+\le p} a_q(t;x) i^{|q|_+}\partial_x^q\big\} Z\,(t,x;0,\cdot)\rangle =$$

$$= \langle f, 0\rangle = 0,\ (t;x) \in \Pi_{(0;T]}.$$

Отже, зазначена функція $u$ є класичним розв'язком рівняння (3) на множині $\Pi_{(0;T]}$.

З'ясуємо тепер виконання початкової умови (8). Передусім зазначимо, що твердження леми 2 забезпечує коректність постановки цієї умови для функції $u$.

Користуватимемося тут зображенням

$$u(t;x) = \langle f, G\,(t,0;x-\cdot)\rangle + \langle f, W\,(t,x;0,\cdot)\rangle \equiv$$

$$\equiv u_G\,(t;x) + u_W\,(t;x)\,,\ (t;x) \in \Pi_{(0;T]},$$

яке одержується безпосередньо із структури $Z$ та лінійності $f$.

Оскільки $f \in S'_{1-\alpha}$, а $G$ – ФРЗК для рівняння (4), то, як установлено в [10], $u_G$ є розв'язком задачі Коші (4), (8), тому

$$\langle u_G\,(t;x)\,, \phi(x)\rangle \xrightarrow[t\to+0]{} \langle f, \phi(x)\rangle$$

$$(\forall \phi \in S_{1-\alpha})\,.$$

Таким чином обгрунтування виконання умови (8) зводиться до встановлення граничного співвідношення

$$\langle u_W\,(t;x)\,, \phi(x)\rangle \xrightarrow[t\to+0]{} 0 \quad (\forall \phi \in S_{1-\alpha})\,. \qquad (12)$$

Змінивши порядок інтегрування згідно з теоремою Фубіні, одержимо

$$\langle u_W\,(t;x)\,, \phi(x)\rangle =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{W\,(t,x;0,\xi)}\phi(x)dx\Big)d\xi \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi) I_W(t;\xi)d\xi, t \in (0;T].$$

Тоді для встановлення (12) досить переконатися у правильності таких тверджень:

а) $I_W\,(t;\xi) \xrightarrow[t\to+0]{\xi\in\mathbb{K}} 0 \quad (\forall \mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n)$;

б) $\exists \delta > 0\ \exists \varepsilon \in (0;1)\ \exists c > 0\ \forall t \in (0;\varepsilon)$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n:\ |I_W(t;\xi)| \le c e^{-\delta||\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}}}.$$

Ще раз скориставшись теоремою Фубіні та структурою $W$, дістанемо зображення

$$I_W(t;\xi) =$$

$$\int\limits_0^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{G(t,\beta;x-y)}\phi(x)dx\Big)\overline{\Phi\,(\beta,y;0,\xi)}dy$$

$$\equiv \int\limits_0^t d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{J\,(t-\beta;y)\,\Phi\,(\beta,y;0,\xi)}dy,$$

$$(t;\xi) \in \Pi_{(0,T]},$$

у якому

$$J(t;y) = G\,(t,0;y) * \overline{\phi(y)},$$

$$0 < t \le T,\ y \in \mathbb{R}^n,\ \phi \in S_{1-\alpha}.$$

Згідно з твердженням леми 3 із [3], для $J$ справджується граничне співвідношення

$$J(t;\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{S_{1-\alpha}} \phi\,(\cdot)\,,$$

яке гарантує обмеженість за $t$ (при $0 < t << 1$) сукупності $J\,(t;\cdot)$ у просторі $S_{1-\alpha}$, тобто $\exists \delta > 0\ \exists \varepsilon \in (0;1)\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \exists c_k > 0 \forall t \in (0;\varepsilon)$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n: |\partial_\xi^k J(t;\xi)| \le c_k e^{-\delta||\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

(див. критерій збіжності в просторах типу $S$).

Звідси та з оцінки (7), а також, з існування сталих $\delta_0 > 0$ і $\delta_1 > 0$, з якими виконується нерівність

$$||x+\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}} \geq \delta_0 ||\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}} - \delta_1 ||x||^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

одержуємо, що

$$|I_W(t;\xi)| \leq c_0 c_3 \times$$

$$\times \int_0^t \Big(\beta^{-\frac{n+p_1}{h}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta ||\xi+\eta||^{\frac{1}{1-\alpha}}} e^{-\delta_3 \left(\frac{||\eta||}{\beta^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\eta\Big) d\beta \leq$$

$$\leq c_0 c_3 e^{-\widetilde{\delta}_0 ||\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}}} \int_0^t \Big(\beta^{-\frac{n+p_1}{h}} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} e^{\widetilde{\delta}_1 ||\eta||^{\frac{1}{1-\alpha}}} e^{-\delta_3 \left(\frac{||\eta||}{\beta^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} d\eta\Big) d\beta \leq$$

$$\leq c_0 c_3 e^{-\widetilde{\delta}_0 ||\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}}} \int_0^t \beta^{\alpha_0 - 1} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\delta_3}{2} ||y||^{\frac{1}{1-\alpha}}} dy =$$

$$= c t^{\alpha_0} e^{-\widetilde{\delta}_0 ||\xi||^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \; 0 < t << 1, \; \xi \in \mathbb{R}^n \qquad (13)$$

(тут оціночні сталі $c$ і $\widetilde{\delta}_0$ не залежать від $t$ і $\xi$, а $\alpha_0 := \alpha n + 1 - \frac{n+p_1}{h} > 0$ згідно з умовою (A)).

З огляду на оцінку (13), твердження а) і б) стають очевидними.

Теорема доведена.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для некоторых типов параболических по Г.Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1959. – **23**. – С. 925–932.

2. *Літовченко В.А, Довжицька І.М.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами // Укр. мат. вісник. – 2010. – **7**, N 4. – С. 516–552.

3. *V.A. Litovchenko, I.M. Dovzhytska* Cauchy problem for a class parabolic systems of Shilov type with variable coefficients // Cent. Eur. J. Math. 2012. – **10**, N 3. – P. 1084–1102.

4. *Литовченко В.А, Довжицкая И.М.* Стабилизация решений параболических систем типа Шилова с неотрицательным родом // Сиб. мат. журн. – **55**, N 2. – С. 341–349.

5. *Довжицька І.М., Літовченко В.А.* Задача Коші для параболічних рівнянь типу Шилова із змінними коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. – Чернівці: Рута, 2012. – **2**, N 1. – С. 24–31.

6. *Довжицька І.М.* Задача Коші для параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами та невід'ємним родом // Автореферат дис. ... к. фіз.-мат. наук: 01.01.02. – Чернівці, 2014. – 20 с.

7. *Літовченко В.А, Унгурян Г.М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь із коефіцієнтами обмеженої гладкості // Математичне і комп'ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. Вип. 10. – Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2014. – с.128–139.

8. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

9. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

10. *Литовченко В.А.* Задача Коши для параболических по Шилову уравнений // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, N 4. – С. 809–821.