

ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА ДЛЯ РІВНЯНЬ НА ЧАСОВИХ ШКАЛАХ

В роботі отримано аналог принципу максимуму Понтрягіна для рівнянь на часових шкалах. Розглядається випадок, коли множина допустимих керувань не обов'язково замкнена (але опукла), а множина обмежень не обов'язково опукла.

In this paper, an analogue of the Pontryagin Maximum Principle for equations on time scales is given. We consider the case where a certain set of admissible values of the control is not necessarily closed (but convex), and the attainable set is not necessarily convex.

Вступ. Оптимальне керування є однією з найважливіших областей теорії екстремальних задач. Вивчення проблем оптимального керування на часових шкалах останнім часом викликає великий інтерес. Це пов'язано з тим, що в 1988 році Stefan Hilger в [2] ввів поняття Δ -похідної, що дозволило об'єднати з єдиної точки зору дискретний і неперервний аналіз. Основи теорії часових шкал викладено в монографії [3].

Стосовно методу динамічного програмування Беллмана на часових шкалах слід відзначити роботу [4], в якій отримані рівняння Гамільтона-Якобі-Беллмана в одновимірному випадку для оптимального керування системою, яка містить лінійну частину, а також роботу [5], де розглянуто загальний випадок. Відносно принципу максимуму Понтрягіна вкажемо на роботу [6], в якій встановлена слабка версія принципу максимуму Понтрягіна і [1], в якій отримано сильну версію принципу максимуму Понтрягіна, з використанням Ekeland's Variational Principle. У зв'язку з цим авторам довелося накласти деякі обмеження на задачу, а саме: множина обмежень вважалась опуклою, а множина значень керувань замкнутою. В даній роботі, базуючись на іншому підході, пов'язаному з "пакетом голок", зняті вказані вище обмеження роботи [1].

Сама робота складається зі вступу і двох розділів. В першому розділі приведено основні поняття, пов'язані з теорією часових шкал (підрозділ 1.1). В підрозділі 1.2

розглядається постановка задачі і формулюється теорема, яка дає необхідні умови оптимальності. Другий розділ присвячений доведенню основного результату. У підрозділі 2.1 побудований "пакет голок" – варіацій оптимального керування і наведені деякі твердження, щодо побудованого пакета. Доведення основного результату наведено в підрозділі 2.2.

1.1 Основні поняття, пов'язані з теорією часових шкал.

Нехай $\mathbb{T}$ – часова шкала, тобто довільна, непорожня, замкнена підмножина $\mathbb{R}^1$. Для кожної підмножини A з $\mathbb{R}$ позначимо $A_{\mathbb{T}} = A \cap \mathbb{T}$. Вважаємо, що $\sup \mathbb{T} = +\infty$.

Визначимо прямий і обернений оператори стрибка $\sigma, \rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ як $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} \mid s > t\}$ і $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} \mid s < t\}$. Функція зернистості $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty)$ визначається наступним чином $\mu(t) = \sigma(t) - t$. Точка $t \in \mathbb{T}$ називається *ліво-граничною* (*ліво-розсіяною*, *право-граничною* або *право-розсіяною*), якщо $\rho(t) = t$ ($\rho(t) < t$, $\sigma(t) = t$ або $\sigma(t) > t$). Визначимо поняття Δ -похідної.

Означення 1. Функція $f : [a, b]_{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}^1$ має Δ -похідну в $t \in \mathbb{T}$, якщо існує $\alpha \in \mathbb{R}^1$, що для $\varepsilon > 0$ існує окіл B точки t такий, що

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - \alpha(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|,$$

для всіх $s \in B \cap \mathbb{T}$. При цьому $f^{\Delta}(t) = \alpha$.

Позначимо через RS (RD, LS, LD) відповідно множину всіх право-розсіяних (право-граничних, ліво-розсіяних, ліво-граничних точок) з часової шкали $\mathbb{T}$. Для всіх $a, b \in \mathbb{T}$, $a \neq b$ і всіх $s \in [a, b]_{\mathbb{T}} \cap \text{RD}$, визначимо

$$\mathcal{V}_s^b = \{\beta \geq 0, s + \beta \in [s, b]_{\mathbb{T}}\},$$

і для кожного $s \in (a, b]_{\mathbb{T}} \cap \text{LD}$, визначимо

$$\mathcal{V}_a^s = \{\beta \geq 0, s - \beta \in (a, s]_{\mathbb{T}}\}.$$

Нехай t_0, t_1 – фіксовані точки з $\mathbb{T}$ і $t_0 < t_1$. Важливу роль в подальшому відіграватимуть властивості часових шкал в сенсі наступного означення.

Означення 2. Скажемо, що в точці $s \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \cap \text{RD}$ виконується умова щільності, якщо

$$\frac{\mu(s + \beta)}{\beta} \rightarrow 0, \text{ при } \beta \rightarrow 0, \quad (1)$$

для кожного $\beta \in \mathcal{V}_s^{t_1}$. Аналогічно, в точці $s \in (t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \cap \text{LD}$ виконується умова щільності, якщо

$$\frac{\mu(s - \beta)}{\beta} \rightarrow 0, \text{ при } \beta \rightarrow 0, \quad (2)$$

для кожного $\beta \in \mathcal{V}_{t_0}^s$.

1.2 Постановка задачі. Нехай t_0, t_1 – фіксовані точки з $\mathbb{T}$ і $t_0 < t_1$. Розглянемо наступну задачу оптимального керування на інтервалі $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$:

$$\Phi_0(x(t_0), x(t_1)) \rightarrow \inf, \quad (3)$$

$$x^\Delta = f(t, x(t), u(t)), t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}, \quad (4)$$

$$\Phi_i(x(t_0), x(t_1)) = 0, i = \overline{1, k}, \quad (5)$$

$$\Phi_i(x(t_0), x(t_1)) \leq 0, i = \overline{k+1, n}.$$

Тут $x \in D$ – фазовий вектор, D – область в $\mathbb{R}^d$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, U – опукла множина. Функції f, f'_x, f'_u визначені при $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$, $x \in D$, $u \in U$ і неперервні за сукупністю аргументів. Функції $\Phi_i (i = \overline{0, n})$ визначені в області $D \times D$ і гладкі за своїми аргументами.

Означення 3. Пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ називається керованим процесом в задачі (2)–(5), якщо:

1) керування $u(\cdot) : [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \rightarrow U$ – кусково неперервна (неперервна справа) функція;

2) фазова траєкторія $x(\cdot) : [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \rightarrow D$ неперервна;

3) для всіх точок $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ за винятком, можливо, точок розриву керування $u(\cdot)$, функція $x(\cdot)$, задовольняє диференціальному рівнянню

$$x^\Delta(t) = f(t, x(t), u(t))$$

і у всіх точках $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ інтегральному рівнянню

$$x(t) = x(t_0) + \int_{[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}} f(s, x(s), u(s)) \Delta s.$$

Зазначимо, якщо задовольняється умова (5), тоді пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ називається допустимим керованим процесом.

Означення 4. Керований допустимий процес $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ називається (локально) оптимальним, якщо існує $\varepsilon > 0$, що для кожного допустимого керованого процесу $(x(\cdot), u(\cdot))$, такого що $|x(t) - \hat{x}(t)| < \varepsilon$, для всіх $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ виконується нерівність

$$\Phi_0(x(t_0), x(t_1)) \geq \Phi_0(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)). \quad (6)$$

Означення 5. Лінійна система диференціальних рівнянь

$$\Psi^\Delta = - \left(\frac{\partial f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} \right)^* \Psi^\sigma. \quad (7)$$

називається спряженою до системи (3). Тут $*$ означає транспонування.

Означення 6. Функція $H(t, \Psi, x, v) = (\Psi, f(t, x, v)) = \sum_{i=1}^d (\Psi_i, f_i(t, x, v))$ називається функцією Понтрягіна, а функція $L(\lambda, x(t_0), x(t_1)) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \Phi_i(x(t_0), x(t_1))$ – функція Лагранжа задачі (2)–(5), $\lambda_i \in \mathbb{R}^n$ – множники Лагранжа.

Основним результатом роботи є наступна теорема, яка дає необхідні умови оптимальності в задачі (2)–(5).

Теорема 1. (Принцип максимума Понтрягіна). Нехай для функцій f і Φ_i ($i = \overline{0, n}$) виконуються умови постановки задачі (2)–(5), а для точок $s \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \cap \text{RD}$ і $s \in (t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \cap \text{LD}$ виконуються відповідні умови щільності (1) і (2). Тоді якщо $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ – оптимальний процес для задачі (2)–(5), то існує ненульовий вектор $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – множники Лагранжа і вектор $\Psi(t) = (\Psi_1(t), \dots, \Psi_d(t))^*$ – розв’язок спряженої системи такі, що виконуються умови:

1) невід’ємності:

$$\lambda_i \geq 0, i = 0, i = \overline{k+1, n};$$

2) доповнюючої нежорсткості:

$$\lambda_i \Phi_i(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) = 0, i = \overline{k+1, n};$$

3) умови трансверсальності:

$$\Psi(t_0) = L_{x_0}; \Psi(t_1) = -L_{x_1}, \text{ де}$$

$$L_{x_0} = \frac{\partial L}{\partial x(t_0)}; L_{x_1} = \frac{\partial L}{\partial x(t_1)};$$

4) умова максимума:

а) слабка умова максимума:

для кожної ізольованої точки $r \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ виконується наступна умова

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u}(r, \Psi^\sigma(r), \hat{x}(r), \hat{u}(r)), v - \hat{u}(r) \right)_{\mathbb{R}^n} \leq 0, \quad (8)$$

для всіх $v \in U$. Для точки t_0 ця умова виконується, якщо $t_0 \in \text{RS}$;

б) сильна умова максимума:

якщо $s \in [t_0, t_1] \cap \text{RD}$, тоді

$$\begin{aligned} \max_{v \in U} H(s, \Psi(s), \hat{x}(s), v) = \\ = H(s, \Psi(s), \hat{x}(s), \hat{u}(s)). \end{aligned} \quad (9)$$

Дана умова виконується також в довільній точці $s \in (t_0, t_1] \cap \text{LD}$, що є точкою неперервності керування $\hat{u}(t)$.

2. Доведення основного результату.

2.1 "Пакет голок". Для доведення теореми 1 включимо оптимальний процес $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ в деяку спеціальну сім’ю керованих процесів – "пакет" варіацій. Подальші викладки проводимо для право-розсіяних і

право-граничних точок. Для ліво-розсіяних і ліво-граничних точок міркування проводяться аналогічно.

Потрібна нам сім’я керованих процесів залежить від наступних параметрів:

- 1) початкові дані $x(t_0) = x_0$;
- 2) набір $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, де всі α_i достатньо малі і $\alpha = \sum_{i=1}^N \alpha_i$;
- 3) набір $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_N)$, $\tau_i \in (t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \cap \text{RD}$, $t_0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_N < t_1$;
- 4) набір $\bar{v} = (v_1, \dots, v_N)$, $v_i \in U$;
- 5) набір $\bar{r} = (r_1, \dots, r_\nu)$, $r_i \in (t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \cap \text{RS}$, $t_0 < r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_\nu < t_1$;
- 6) набір $\bar{z} = (z_1, z_2, \dots, z_\nu)$, $z_i \in U$,
- 7) набір $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_\nu)$, $\gamma_i \geq 0$ і достатньо малі.

В подальшому $\bar{\tau}, \bar{v}, \bar{r}, \bar{z}$ вважаються фіксованими, а $x_0, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}$ – змінні, за якими ми будемо диференціювати різні функції.

Пакет голок, який ми хочемо побудувати, буде складатись з двох видів елементарних голок: варіацій по право-граничним точкам і по право-розсіяним точкам. При $N = 1, \nu = 0$ такий пакет складається з однієї голки для право-граничних точок і співпадає з голчатою варіацією $II = (s, z)$ з підрозділу 3.2 роботи [1]. В нашому випадку $II = (\tau_i, v_i)$. Якщо $N = 0, \nu = 1$, такий пакет складається з однієї голки для право-розсіяних точок і співпадає з голчатою варіацією $\Pi = (r, y)$ з підрозділу 3.2 роботи [1]. В нашому випадку $\Pi = (r_i, z_i)$.

Однак, конструкція нашого пакету складніша. В ньому об’єднується довільне скінченне число елементарних голок як першого так і другого виду. Нехай серед голок першого виду є повторювані набори голок

$$(\tau_i, v_{1,i}), (\tau_i, v_{2,i}), \dots, (\tau_i, v_{q_i,i}). \quad (10)$$

Тут q_i – кількість повторень голок з однаковим τ_i . Таких наборів в пакеті може бути декілька. Для кожного з них визначимо наступні неперетинні інтервали

$$\Delta_{s,i} = [\tau_i + (s-1)\bar{\alpha}_i, \tau_i + (s-1)\bar{\alpha}_i + \alpha_{s,i}]_{\mathbb{T}},$$

тут $s = \overline{1, q_i}$, $\bar{\alpha}_i = \sum_{s=1}^{q_i} \alpha_{s,i}$ і $\alpha_{s,i} \geq 0$.

Кожному інтервалу $\Delta_{s,i}$ припишемо керування $v_{s,i}$ з набору (10). Позначимо $\Delta_i = \bigcup_{s=1}^{q_i} \Delta_{s,i}$. Оскільки різних пар елементарних голок (τ_i, v_i) N штук, то і інтервалів $\Delta_{s,i}$ також N штук.

Перенумеруємо тепер всі $\alpha_{s,i}$ і перепозначимо їх як α_i , $i = \overline{1, N}$. В результаті для голок першого виду ми отримаємо наступну варіацію оптимального керування $\hat{u}(\cdot)$:

$$u(t, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}) = \begin{cases} \hat{u}(t), t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \setminus \bigcup_{i=1}^N \Delta_i, \\ v_{s,i}, t \in \Delta_{s,i}, s = \overline{1, q_i}, i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (11)$$

Перейдемо до голок другого виду. Якщо серед них є повторювані голки виду: $(r_i, z_1), (r_i, z_2), \dots, (r_i, z_{l_i})$, тоді відповідна варіація має вигляд:

$$u(t, \bar{\gamma}, \bar{r}, \bar{z}) = \begin{cases} \hat{u}(r_i) + \gamma_{1,i}(z_1 - \hat{u}(r_i)) + \dots + \\ + \gamma_{l_i,i}(z_{l_i} - \hat{u}(r_i)), t = r_i, i = \overline{1, \nu}, \\ \hat{u}(t), t \neq r_i, i = \overline{1, \nu}. \end{cases} \quad (12)$$

Тут $\gamma_{p,i} \geq 0$, $p = \overline{1, l_i}$, l_i – кількість повторень голок з однаковими r_i в пакеті, $i = \overline{1, \nu}$. Тепер об'єднаємо пакети (11) і (12) в один пакет і побудуємо наступну варіацію оптимального керування $\hat{u}(\cdot)$. В подальшому позначимо $\hat{x}_0 = \hat{x}(t_0)$ і $u(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = u(t, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}, \bar{\gamma}, \bar{r}, \bar{z})$. Тоді отримаємо

$$u(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) = \begin{cases} \hat{u}(t), t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \setminus \bigcup_{i=1}^N \Delta_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\nu} \{r_i\}, \\ v_{s,i}, t \in \Delta_{s,i}, s = \overline{1, q_i}, i = \overline{1, N}, \\ \hat{u}(r_i) + \sum_{p=1}^{l_i} \gamma_{p,i}(z_p - \hat{u}(r_i)), t = r_i, \\ i = \overline{1, \nu}. \end{cases} \quad (13)$$

Тепер керування $u(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ для кожного $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ з (13) визначене коректно і $u(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) \in U$ для кожного $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$.

Позначимо через $x(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0)$ ($x(t_0, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0) = x_0 \in D$) сім'ю фазових траєкторій, визначених як розв'язок задачі Коші

$$x^\Delta(t) = f(t, x(t), u(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})), x(t_0) = x_0. \quad (14)$$

Означення 7. Система лінійних рівнянь вигляду

$$y^\Delta(t) = \frac{\partial f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))}{\partial x} y(t) \quad (15)$$

називається системою рівнянь у варіаціях, яка відповідає оптимальній парі $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$.

Через $\Omega(t, s)$ позначимо матрицант системи (15). Важливу роль грає наступна лема.

Лема 1. (Про пакет голок). Нехай відносно функції f виконуються умови постановки задачі (2)–(5), а для точок $s \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}} \cap \mathbb{R}D$ виконується умова щільності (1). Тоді:

1) при достатньо малому $\varepsilon_0 > 0$, розв'язок задачі Коші (14) такий, що $|x_0 - \hat{x}_0| < \varepsilon_0$, $0 \leq \alpha_i < \varepsilon_0$, $0 \leq \gamma_k < \varepsilon_0$, $i = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, \nu}$ визначений для $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$;

2) якщо $x_0 \rightarrow \hat{x}_0$ при $\alpha_i \rightarrow 0+$, $\gamma_k \rightarrow 0+$, ($i = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, \nu}$), тоді $x(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0) \rightarrow \hat{x}(t)$ рівномірно на $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$;

3) відображення $(x_0, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) \rightarrow x(t_1, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0)$ визначене по x_0 в деякому околі точки $\hat{x}_0$, а по α_i і γ_k ($i = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, \nu}$) в деякому правому околі нуля і диференційовне в точці $(\hat{x}_0, \bar{0}, \bar{0})$, тобто має місце наступне зображення:

$$\begin{aligned} & x(t_1, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h) - \hat{x}(t_1) = \\ & = \frac{\partial x(t_1, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h)}{\partial \bar{\alpha}} \Big|_{\bar{\alpha}=0, \bar{\gamma}=0, h=0} \bar{\alpha} + \\ & + \frac{\partial x(t_1, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h)}{\partial \bar{\gamma}} \Big|_{\bar{\gamma}=0, \bar{\alpha}=0, h=0} \bar{\gamma} + \\ & + \frac{\partial x(t_1, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h)}{\partial x_0} \Big|_{\bar{\alpha}=0, \bar{\gamma}=0, h=0} h + \\ & + o(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h), \text{ при } \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (16)$$

(тут частинні похідні $\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}$ і $\frac{\partial x}{\partial \gamma_k}$ як елементи матриць Якобі $\frac{\partial x}{\partial \bar{\alpha}}$ і $\frac{\partial x}{\partial \bar{\gamma}}$ розуміються як похідні справа). При цьому

$$\frac{\partial x(t_1, \bar{0}, \bar{0}, x_0)}{\partial x_0} \Big|_{x_0=\hat{x}_0} = \Omega(t_1, t_0), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x(t_1, \alpha_i, \bar{0}, \hat{x}_0)}{\partial \alpha_i} \Big|_{\alpha_i=0} = \Omega(t_1, \tau_i) * \\ & * [f(\tau_i, \hat{x}(\tau_i), v_i) - f(\tau_i, \hat{x}(\tau_i), \hat{u}(\tau_i))], \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial x(t_1, \bar{0}, \gamma_k, \hat{x}_0)}{\partial \gamma_k} \Big|_{\gamma_k=0} = \Omega(t_1, \sigma(r_k)) * \\ * \mu(r_k) \frac{\partial f(r_k, \hat{x}(r_k), \hat{u}(r_k))}{\partial u} (z_k - \hat{u}(r_k)). \quad (19)$$

Доведення. Для достатньо малих $\bar{\alpha}, \bar{\gamma}$ і h через $x(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h)$ позначимо розв'язок задачі Коші (14). Оскільки допустиме керування $u(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})$ – неперервне справа на $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$, тоді справедлива оцінка

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}} |u(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma})| \leq \sup_{t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}} |\hat{u}(t)| + \\ + \sum_{i=1}^N |v_i| + \sum_{i=1}^{\nu} |z_k|. \quad (20)$$

З (13) випливає існування функції $\varphi(\bar{\alpha}, \bar{\gamma})$, що $\varphi(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}) \rightarrow 0$ при $\bar{\alpha} \rightarrow 0, \bar{\gamma} \rightarrow 0$ і справедлива оцінка:

$$\int_{[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}} |u(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}) - \hat{u}(t)| \Delta t \leq \varphi(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}). \quad (21)$$

Тоді твердження 1) і 2) леми 1 випливають з леми 3 [1] і оцінки (21). Доведемо тепер твердження 3) цієї леми. Розглянемо приріст

$$x(t_1, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h) - \hat{x}(t_1) = \\ = x(t_1, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h) - x(t_1, 0, 0, \hat{x}_0) \quad (22)$$

Розглянемо наступний доданок

$$x(t_1, 0, \dots, 0, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_N, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h) - \\ - x(t_1, 0, \dots, 0, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_N, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h). \quad (23)$$

Далі позначимо

$$x_k(t) = x(t, 0, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_N, \bar{\gamma}, \hat{x}_0 + h), \\ u_k(t) = u(t, 0, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_N, \bar{\gamma}).$$

Можливі наступні два варіанти.

1. α_k і α_{k+1} відповідають різним значенням $\tau_k \neq \tau_{k+1}$ в (13). Тоді, згідно (13), отри-

маємо

$$x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1) = \\ = \int_{[\tau_k, \tau_k + \alpha_k]_{\mathbb{T}}} [f(s, x_k(s), v_k) - \\ - f(s, x_{k+1}(s), \hat{u}(s))] \Delta s + \\ + \int_{[\tau_k + \alpha_k, t_1]_{\mathbb{T}}} [f(s, x_k(s), u_{k+1}(s)) - \\ - f(s, x_{k+1}(s), u_{k+1}(s))] \Delta s = \\ = I_1 + I_2. \quad (24)$$

Можна показати, що перший доданок в (24) має вигляд:

$$[f(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), v_k) - f(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), \hat{u}(\tau_k))] \alpha_k + o(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h), \quad (25)$$

при $\bar{\alpha} \rightarrow 0, \bar{\gamma} \rightarrow 0, h \rightarrow 0$. Другий доданок в (24) з використанням формули Лагранжа має вигляд

$$I_2 = \int_{[\tau_k + \alpha_k, t_1]_{\mathbb{T}}} \frac{\partial f}{\partial x}(s, \theta(s, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h), u_{k+1}(s)) * \\ * (x_k(s) - x_{k+1}(s)) \Delta s, \quad (26)$$

де $\theta(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h) = x_{k+1}(t) + \theta(x_k(t) - x_{k+1}(t)) \in \mathbb{R}^d$ для деякого $\theta \in [0, 1]$.

Однак, як випливає з пропозиції 2 [1] вираз $\frac{x_k(t) - x_{k+1}(t)}{\alpha_k}$ рівномірно збігається

до $\frac{\partial x_k(t)}{\partial \alpha_k} \Big|_{\alpha_k=0}$ на $[\tau_k, t_1]_{\mathbb{T}}$ при $\alpha_k \rightarrow 0$, де $\frac{\partial x_k(t)}{\partial \alpha_k} \Big|_{\alpha_k=0}$ – розв'язок на $[\tau_k, t_1]_{\mathbb{T}}$ лінійної системи

$$y^\Delta(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_{k+1}(t), u_{k+1}(t)) y(t), \quad (27)$$

з початковими умовами

$$\frac{\partial x_k(\tau_k)}{\partial \alpha_k} \Big|_{\alpha_k=0} = f(\tau_k, x_{k+1}(\tau_k), v_k) - \\ - f(\tau_k, x_{k+1}(\tau_k), u_{k+1}(\tau_k)). \quad (28)$$

Покажемо, що розв'язок задачі Коші (27)–(28) рівномірно на $[\tau_k, t_1]_{\mathbb{T}}$ збігається до розв'язку спряженої системи (15) з початковою умовою

$$f(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), v_k) - f(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), \hat{u}(\tau_k)), \quad (29)$$

при $\bar{\alpha} \rightarrow 0, \bar{\gamma} \rightarrow 0, h \rightarrow 0$.

Позначимо розв'язок задачі Коші (27)–(28) як $y_k(t)$, а розв'язок задачі Коші (15), (29) як $y(t)$. Відмітимо, що оскільки $u_{k+1}(t) = \hat{u}(t)$ при $t \in [t_0, \tau_{k+1})_{\mathbb{T}}$, тоді $x_{k+1}(t) = \hat{x}(t)$ при $t \in [t_0, \tau_{k+1})_{\mathbb{T}}$. Тому початкові умови (28) і (29) співпадають. Неважко показати, що

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}} |y_k(t) - y(t)| \rightarrow 0, \quad (30)$$

при $\bar{\alpha} \rightarrow 0, \bar{\gamma} \rightarrow 0, h \rightarrow 0$.

Повертаючись тепер до формули (24), враховуючи (25) для $x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1)$ отримаємо:

$$\begin{aligned} & x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1) = \\ & = [f(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), v_k) - f(\tau_k, \hat{x}(\tau_k), \hat{u}(\tau_k))] \alpha_k + \\ & + \int_{[\tau_k, t_1]_{\mathbb{T}}} \frac{\partial f}{\partial x}(s, \hat{x}(s), \hat{u}(s)) y(s) \Delta s \cdot \alpha_k + \\ & + o(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h) = \frac{\partial x(t_1, \alpha_k, \bar{0}, \hat{x}_0)}{\partial \alpha_k} \Big|_{\alpha_k=0} \cdot \alpha_k + \\ & + o(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h), \text{ при } \bar{\alpha} \rightarrow 0, \bar{\gamma} \rightarrow 0, h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (31)$$

2. Нехай α_k і α_{k+1} відповідають одному і тому τ_k . Без обмеження загальності і спрощення викладок, розглянемо пакет голок $(\bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}, \bar{\gamma}, \bar{r}, \bar{z})$, який містить три голки вигляду (τ_k, v_k) , (τ_k, v_{k+1}) , (τ_k, v_{k+2}) , які відповідають одному і тому ж τ_k . Для іншої кількості голок доведення аналогічне.

За керуванням $u_{k+1}(t)$ побудуємо керування $u_{sh}(t)$, в якому дію голки (τ_k, v_{k+1}) змістимо на α_k вправо, а дію голки (τ_k, v_{k+2}) змістимо вправо на $2\alpha_k$. Покладемо $\alpha = \alpha_k + \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2}$. Матимемо

$$u_{sh}(t) = \begin{cases} \hat{u}(t), t \in [\tau_k, \tau_k + \alpha)_{\mathbb{T}} \cup \\ \cup [\tau_k + \alpha + \alpha_{k+1}, \tau_k + 2\alpha)_{\mathbb{T}}, \\ v_{k+1}, t \in [\tau_k + \alpha, \tau_k + \alpha + \alpha_{k+1})_{\mathbb{T}}, \\ v_{k+2}, t \in [\tau_k + 2\alpha, \tau_k + 2\alpha + \alpha_{k+2})_{\mathbb{T}}, \\ u_{k+1}(t), \text{ в інших точках.} \end{cases} \quad (32)$$

Тепер в керуванні $u_k(t)$ і $u_{sh}(t)$ голки (τ_k, v_{k+1}) і (τ_k, v_{k+2}) діють на однакових інтервалах. Позначимо через $x_{sh}(t)$ розв'язок задачі Коші (14) з $x_0 = \hat{x}_0 + h$, що відповідає

керуванню (32). Тоді маємо

$$x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1) = x_k(t_1) - x_{sh}(t_1) + x_{sh}(t_1) - x_{k+1}(t_1). \quad (33)$$

До першого доданку в (33) застосовуємо всі міркування випадку 1 з різними τ_k і τ_{k+1} . Тому

$$\begin{aligned} & x_k(t_1) - x_{sh}(t_1) = \\ & = \frac{\partial x(t_1, \alpha_k, \bar{0}, \hat{x}_0)}{\partial \alpha_k} \Big|_{\alpha_k=0} \alpha_k + o(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h), \end{aligned} \quad (34)$$

при $\bar{\alpha} \rightarrow 0, h \rightarrow 0$.

Неважко показати, що

$$x_{sh}(t_1) - x_{k+1}(t_1) = o(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h), \quad (35)$$

при $\bar{\alpha} \rightarrow 0, \bar{\gamma} \rightarrow 0, h \rightarrow 0$. Звідси, використовуючи (33), (34), отримаємо

$$\begin{aligned} x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1) & = \frac{\partial x(t_1, \alpha_k, \bar{0}, \hat{x}_0)}{\partial \alpha_k} \Big|_{\alpha_k=0} + \\ & + o(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h), \bar{\alpha} \rightarrow 0, \bar{\gamma} \rightarrow 0, h \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Перейдемо тепер до розгляду голок другого виду. Розглянемо в формулі (22) приріст вигляду

$$\begin{aligned} & x(t_1, \bar{0}, 0, \dots, 0, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_\nu, \hat{x}_0 + h) - \\ & - x(t_1, \bar{0}, 0, \dots, 0, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_\nu, \hat{x}_0 + h). \end{aligned} \quad (37)$$

Аналогічно попередньому позначимо $x_k(t) = x(t_1, \bar{0}, \dots, 0, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_\nu, \hat{x}_0 + h)$ – розв'язок задачі Коші (14) з початковою умовою $x_k(t_0) = \hat{x}_0 + h$, що відповідає керуванню $u_k(t) = u(t, \bar{0}, \gamma_k, \dots, \gamma_\nu)$.

Нехай деякому r_k в нашому пакеті відповідає декілька голок. Вважатимемо, без обмежень загальності, що вихідний пакет містить дві голки (r_k, z_1) , (r_k, z_2) . Тоді, враховуючи, що $x_k(r_k) = x_{k+1}(r_k) = \hat{x}(r_k)$ і $u_k(s) = u_{k+1}(s)$ при $s \in [\sigma(\tau_k), t_1)_{\mathbb{T}}$, маємо

$$\begin{aligned} & x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1) = \mu(r_k) * \\ & * [f(r_k, \hat{x}(r_k), u_k(r_k)) - f(r_k, \hat{x}(r_k), u_{k+1}(r_k))] + \\ & + \int_{[\sigma(r_k), t_1]_{\mathbb{T}}} [f(s, x_k(s), u_{k+1}(s)) - \\ & - f(s, x_{k+1}(s), u_{k+1}(s))] \Delta s. \end{aligned} \quad (38)$$

Перший доданок в (38) згідно з формулою Лагранжа і в силу рівномірної неперервності $\frac{\partial f}{\partial u}$ набуває вигляду

$$\mu(r_k) \frac{\partial f}{\partial u}(r_k, \hat{x}(r_k), \hat{u}(r_k))(z_1 - \hat{u}(r_k))\gamma_k + o(\bar{\gamma}, h), \text{ при } \bar{\gamma} \rightarrow 0, h \rightarrow 0. \quad (39)$$

Розглянемо другий доданок в (38).

$$\int_{[\sigma(\tau_k), t_1]_{\mathbb{T}}} \frac{\partial f}{\partial x}(s, \theta(s, \bar{\gamma}, h), u_{k+1}(s)) * \frac{x_k(s) - x_{k+1}(s)}{\gamma_k} \Delta s \cdot \gamma_k. \quad (40)$$

Однак, як впливає з пропозиції 1 [1], вираз $\frac{x_k(t) - x_{k+1}(t)}{\gamma_k}$ рівномірно збігається до $\left. \frac{\partial x_k(t)}{\partial \gamma_k} \right|_{\gamma_k=0}$ на $[\sigma(\tau_k), t_1]_{\mathbb{T}}$, при $\alpha_k \rightarrow 0$, причому $\left. \frac{\partial x_k}{\partial \gamma_k} \right|_{\gamma_k=0}$ – розв’язок на $[\sigma(\tau_k), t_1]_{\mathbb{T}}$ лінійної системи

$$y^\Delta(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_{k+1}(t), u_{k+1}(t))y(t)$$

з початковою умовою

$$y(\sigma(r_k)) = \mu(r_k) \frac{\partial f}{\partial u}(r_k, \hat{x}(r_k), \hat{u}(r_k))(z_1 - \hat{u}(r_k)). \quad (41)$$

Тепер, аналогічно викладкам з однією голкою першого виду, маємо

$$x_k(t_1) - x_{k+1}(t_1) = \left. \frac{\partial x(t_1, \bar{\alpha}, \gamma_k, \hat{x}_0)}{\partial \gamma_k} \right|_{\gamma_k=0} \gamma_k + o(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, h), \text{ при } \bar{\alpha} \rightarrow 0, \bar{\gamma} \rightarrow 0, h \rightarrow 0. \quad (42)$$

Розглянемо в формулі (22) останній доданок. Оскільки розв’язок $x(t, \bar{0}, \bar{0}, \hat{x}_0 + h)$ неперервно-диференційовний за h в точці $h = 0$, то маємо

$$x(t_1, \bar{0}, \bar{0}, \hat{x}_0 + h) - \hat{x}(t_1) = \left. \frac{\partial x(t_1, \bar{0}, \bar{0}, \hat{x}_0 + h)}{\partial h} \right|_{h=0} h + o(|h|), \quad (43)$$

при $h \rightarrow 0$. Враховуючи тепер (31), (36), (42), (43), з (22) отримаємо (16).

Для ліво-граничних точок міркування проводяться аналогічно, тільки в голках

першого виду інтервали $\Delta_{s,i}$ потрібно вибирати наступним чином

$$\Delta_{s,i} = [\tau_i - (s-1)\bar{\alpha}_i - \alpha_{s,i}, \tau_i - (s-1)\bar{\alpha}_i]_{\mathbb{T}}.$$

Зауваження 1. Основна відмінність і складність доведення цієї лему від класичної лему "про пакет голок" полягає в тому, що в нашому випадку функція $x(t_1, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0)$, взагалі кажучи, не має частинних похідних за α_i при $\alpha_i \neq 0$.

Далі наведемо результат про зв’язок розв’язків лінійної системи

$$x^\Delta(t) = A(t)x(t) \quad (44)$$

і спряженої системи

$$y^\Delta(t) = -A^*(t)y(\sigma(t)), \quad (45)$$

де $d \times d$ – вимірна матриця $A(t)$ неперервна на $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$.

З теореми 1 [7] випливає, що задача Коші з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ для (44) має єдиний розв’язок на $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$. Позначимо через $\Omega(t, \tau)$ ($t \geq \tau, \tau, t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$) матрицант системи (44). В свою чергу з теореми 4 [7] також випливає, що задача Коші з початковою умовою $y(t_1) = y_0 \in \mathbb{R}^d$ для (45) має єдиний розв’язок на $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$. Через $\Omega_*(t, \tau)$ ($t \leq \tau, \tau, t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$) позначимо матрицант системи (45). Безпосередньою перевіркою отримується наступний результат.

Лема 2. Нехай $x(t)$ і $y(t)$ – довільні розв’язки систем (44) і (45) відповідно на $[t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$. Тоді при $t \geq \tau, \tau, t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ маємо:

$$\Omega^*(t, \tau)y(t) = y(\tau), \Omega_*(\tau, t)x(\tau) = x(t). \quad (46)$$

Доведення. З формули (2) [1] маємо

$$(x(t), y(t))^\Delta = (x^\Delta(t), y(\sigma(t))) + (x(t), y^\Delta(t)) = (A(t)x(t), y(\sigma(t))) + (x(t), -A^*(t)y(\sigma(t))) = 0.$$

Тому, для довільних розв’язків (44) і (45)

$$(x(t), y(t)) \equiv const. \quad (47)$$

Співвідношення (46) випливає з того, що стовбці матрицантів $\Omega(t, \tau)$ і $\Omega_*(\tau, t)$ складається з розв’язків (44) і (45) відповідно.

2.2 Доведення основного результату.

В силу першого твердження леми 1, розв'язок $x(t, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0) = x(t)$ при $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ лежить в області D , якщо $0 \leq \alpha_i \leq \varepsilon_0$, $0 \leq \gamma_k < \varepsilon$, $|x_0 - \hat{x}_0| < \varepsilon_0$ для всіх $t \in [t_0, t_1]_{\mathbb{T}}$ при достатньо малому ε_0 . Тоді пара $(x(t), u(t, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{v}, \bar{\gamma}, \bar{r}, \bar{z}))$, де $u(\cdot)$ визначено в (13) являється керованим процесом задачі (2)–(5). Введемо наступну функцію:

$$I_i(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0) = \Phi_i(x(t_0, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0), x(t_1, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0)),$$

при $i = \overline{0, n}$. В силу неперервної диференційовності функції Φ_i за своїми аргументами і третього твердження леми 1, функції I_i – диференційовні в точці $(\bar{0}, \bar{0}, \hat{x}_0)$.

Розглянемо наступну скінченномірну екстремальну задачу

$$\begin{cases} I_0(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0) \rightarrow \inf, \\ I_i(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0) = 0, i = \overline{1, k}, \\ I_i(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0) \leq 0, i = \overline{k+1, n}, \\ \alpha_m \geq 0, m = \overline{1, N}, \\ \gamma_j \geq 0, j = \overline{1, \nu}, \end{cases} \quad (48)$$

до якої застосуємо правило множників Лагранжа. Отже, існують такі множники Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_\nu)$, які одночасно не дорівнюють нулю, що для функції Лагранжа

$$\begin{aligned} \Lambda(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0, \lambda, \mu, \beta) = & \sum_{i=1}^n \lambda_i I_i(\bar{\alpha}, \bar{\gamma}, x_0) - \\ & - \sum_{i=1}^N \mu_i \alpha_i - \sum_{i=1}^{\nu} \beta_i \gamma_i \end{aligned} \quad (49)$$

виконуються наступні умови:

- 1) $\lambda_i \geq 0, i = 0, i = \overline{k+1, n}, \mu_i \geq 0, i = \overline{1, N}, \beta_i \geq 0, i = \overline{1, \nu};$
- 2) $\lambda_i \Phi_i(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) = 0, i = \overline{k+1, n};$
- 3) $\hat{\Lambda}_{x_0} = 0;$
- 4) $\hat{\Lambda}_{\alpha_i} \geq 0, i = \overline{1, N}, \hat{\Lambda}_{\gamma_i} \geq 0, i = \overline{1, \nu},$

тут

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_{x_0} &= \Lambda_{x_0}(\bar{0}, \bar{0}, \hat{x}_0, \lambda, \mu, \beta), \\ \hat{\Lambda}_{\alpha_i} &= \Lambda_{\alpha_i}(\bar{0}, \bar{0}, \hat{x}_0, \lambda, \mu, \beta), \\ \hat{\Lambda}_{\gamma_i} &= \Lambda_{\gamma_i}(\bar{0}, \bar{0}, \hat{x}_0, \lambda, \mu, \beta). \end{aligned}$$

Умови 1) і 2) означають виконання умов 1) і 2) теореми 1. Розглянемо тепер умови 3) і 4) з використанням формули диференціювання суперпозиції і леми 1. Тоді маємо

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_{x_0} &= \Lambda_{x_0}(\bar{0}, \bar{0}, x_0, \lambda, \mu, \beta) \Big|_{x_0 \hat{x}_0} = \\ &= L_{x_0}^* + L_{x_1}^* \frac{\partial x(t_1, \bar{0}, \bar{0}, x_0)}{\partial x_0} \Big|_{x_0 = \hat{x}_0} = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Тут $L = \sum_{i=0}^n \lambda_i \Phi_i(x(t_0), x(t_1))$ – функція Лагранжа задачі (2)–(5). Співвідношення (50), враховуючи (17) буде мати вигляд

$$L_{x_0}^* + L_{x_1}^* \Omega(t_1, t_0) = 0. \quad (51)$$

Позначимо через $\Psi(t)$ – розв'язок системи (7) з початковою умовою

$$\Psi(t_1) = -L_{x_1}. \quad (52)$$

Тоді (51) приймає наступний вигляд

$$L_{x_0}^* - \Psi^*(t_1) \Omega(t_1, t_0) = 0.$$

Використовуємо лему 2, покладемо у першому співвідношенні (46) $t = t_1, \tau = t_0$. Тоді останнє співвідношення приймає вигляд $L_{x_0}^* - \Psi(t_0) = 0$, а це разом з (52) означає виконання умов трансверсальності 3) теореми 1. Розглянемо тепер умову 4).

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_{\alpha_i} &= \Lambda_{\alpha_i} = -\mu_i + \\ &+ \left(L_{x_1}, \frac{\partial x(t_1, \alpha_i, \bar{0}, \hat{x}_0)}{\partial \alpha_i} \Big|_{\alpha_i=0} \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Останнє з урахуванням (18) приймає вигляд

$$(L_{x_1}, \Omega(t_1, \tau_i) \Delta f(\tau_i)) - \mu_i \geq 0, \text{ де} \quad (53)$$

$$\Delta f(\tau_i) = f(\tau_i, \hat{x}(\tau_i), v_i) - f(\tau_i, \hat{x}(\tau_i), \hat{u}(\tau_i)).$$

Тоді ми маємо

$$(\Omega^*(t_1, \tau_i) L_{x_1}, \Delta f(\tau_i)) \geq \mu_i, i = \overline{1, N}. \quad (54)$$

З останньої формули випливає, що якщо всі $\lambda_i = 0$, тобто функція Лагранжа L задачі (2)–(5) тотожно дорівнює нулю, тоді $\mu_i = 0, i = \overline{1, N}$.

Враховуючи перше співвідношення (46) при $t = t_1, \tau = \tau_i$ і (52), (54) переписується у вигляді $(\Psi(\tau_i), \Delta f(\tau_i)) \leq 0$, що в термінах

функції Понтрягіна означає виконання умови 4b) теореми 1 в точці τ_i .

Аналогічно, з урахуванням (19)

$$\hat{\Lambda}_{\gamma_i} = (L_{x_1}, \Omega(t_1, \sigma(r_i))\mu(r_i) * \frac{\partial f(r_i, \hat{x}(r_i), \hat{u}(r_i))}{\partial u} (z_i - \hat{u}(r_i))) - \beta_i \geq 0. \quad (55)$$

Якщо всі $\lambda_i = 0$, то і $\beta_i = 0$, $i = \overline{1, \nu}$. Таким чином, не всі λ_i дорівнюють нулю. Тоді з (55) маємо

$$\mu(r_i) \left(\Psi^\sigma(r_i), \frac{\partial f(r_i, \hat{x}(r_i), \hat{u}(r_i))}{\partial u} (z_i - \hat{u}(r_i)) \right) \leq 0,$$

а це означає виконання умови 4a) теореми 1 в точці r_i .

Отримані множники Лагранжа $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, а отже і вектор Ψ залежить від вибраного "пакету голок". Існування "універсальних" і незалежних множників Лагранжа $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ доводиться аналогічно класичному випадку ($\mathbb{T} = \mathbb{R}^1$) з використанням відомої леми про центровану систему компактів.

Теорема 1 доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bourdin L., Trelat E. Pontryagin maximum principle for finite dimensional nonlinear optimal control problems on time scales // SIAM Control Optim. – 2013. – **51**, N5. – P. 3781-3813.
2. Hilger S. Ein Maßkettenkalkül mit Anwendungen auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. PhD thesis, Universität Würzburg, 1988.
3. Bohner M., Peterson A. Dynamic equations on time scales. An introduction with applications. — Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001. — 369 p.
4. Zhan Z., Wei W., Xu H. Hamilton-Jacobi-Bellman equations on time scales // Math. Comput. Modelling. – 2009. – **49**, N1. – P. 2019-2028.
5. Ластівка Л.О., Лаврова О.Є. . Метод динамічного програмування для систем диференціальних рівнянь на часових шкалах // Вісник Київського національного університету ім.Т. Шевченка. – 2014. – N2. – С. 71-76.
6. Hilscher R., Zeidan V. Weak maximum principle and accessory problem for control problems on time scales // Nonlinear Anal. – 2009. – **70**, N9. – P. 3209-3226.
7. Bourdin L., Trelat E. General Cauchy-Lipschits theory for Δ -Cauchy problems with Caratheodory

dynamics on time scales // Journal of Difference Equations and Applications. – 2014. – **20**, N4. – P. 526-547.